147. При каких натуральных n число $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ делится на 512?

148. При каких натуральных k число $k^{k+1} + (k+1)^k$ делится на 3?

Разложение на множители

149. Существует ли такое натуральное n, при котором $3^n + 1$ делится на 5^{1965}?

150. Найдите все натуральные n, при которых число $2^n - 1$ а) делится на 49; б) делится на 7^k и не делится на 7^{k+1}.

151. Найдите наименьшее натуральное a, при котором число

$$A = 137^{2k-1} + a \cdot 144^{2k-1}$$

делится на 1967 при любом натуральном k.

152. Найдите все натуральные n, при которых число $n^4 + n^2 + 1$ является простым.

153. Найдите все простые числа вида $n^n + 1$, меньшие 10^{19}.

154. Найдите все простые числа p и q, для которых число $r = p^q + 1$ является простым.

155. Найдите все натуральные n, при которых числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ простые.

156. Докажите, что если $2^p - 1$ – простое число, то p – тоже простое.

157. Докажите, что если число $2^n + 1$ – простое, то n является степенью двойки.

158. Между двумя единицами вписано 2^{1969} нулей. Докажите, что если еще вписать любое количество нулей, меньшее 2^{1969}, то полученное число будет составным.

159. Может ли сумма нескольких последовательных натуральных чисел быть степенью двойки?

Десятичная запись числа

160°. Известно, что в десятичной записи числа 2^{29} участвуют ровно девять цифр и все эти цифры различны. Докажите, что среди этих цифр есть ноль.

161. Найдите наименьшую степень двойки, десятичная запись которой начинается цифрой 7.

162. Докажите, что десятичная запись степени двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

163. Пусть b – последняя цифра десятичной записи числа 2^n ($n \geq 4$), т.е. $2^n = 10a + b$. Докажите, что ab делится на 6.

164. Может ли число, записываемое в десятичной системе счисления при помощи 1973-х единиц и некоторого количества нулей, быть а) квадратом, б) кубом некоторого натурального числа?

165. Существуют ли два последовательных натуральных числа таких, что сумма цифр каждого из них делится на 125?

166. Чему равна максимальная разность между соседними числами из тех, сумма цифр которых делится на 7?

167. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся цифрами 1967, которые после вычеркивания этих цифр уменьшаются в целое число раз.

168°. Если к пятизначному числу приписать единицу в конце, то получится число в три раза большее, чем число, получающееся, если приписать единицу спереди. Найдите это пятизначное число.

169. Если последнюю цифру a шестизначного числа переставить в начало, то число увеличится в a раз. Найдите это число.

170. Найдите все девятизначные числа, в записи которых имеются все цифры, кроме нуля, увеличивающиеся в восемь раз после некоторой перестановки цифр.

171. Найдите все четырехзначные числа, которые в четыре раза больше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

172. Существует ли натуральное число, делящееся на 7, десятичная запись которого состоит из 7 единиц и некоторого числа нулей?

173. Докажите, что если число делится на 99, то сумма его цифр не меньше 18.

174. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма

$$1!+2!+3!+\ldots+n!$$

является точным квадратом.

175. Первые цифры в десятичной записи чисел 2^n и 5^n одинаковы. Каковы эти цифры?

176. Числа 2^{1971} и 5^{1971} выписаны одно за другим (в десятичной записи). Сколько всего цифр выписано?

177. Некоторое число обладает тем свойством, что если зачеркнуть последнюю цифру записи этого числа в двоичной системе счисления, то получится его запись в троичной системе счисления; если и теперь зачеркнуть последнюю цифру, то получится его же запись в десятичной системе счисления. Найдите это число.

178. Натуральное число k обладает тем свойством, что если натуральное число M делится на k, то и всякое число, полученное из M перестановкой цифр, тоже делится на k. Найдите все k, обладающие этим свойством.

179. Целое число делят с остатком последовательно на все натуральные числа, начиная от единицы и кончая самим числом. Оказалось, что если сложить все полученные остатки, то получится само это число. Найдите его.

180. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 равен либо единице, либо простому числу.

181. Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами быть равным 23?.

182. Два двузначных числа, записанные одно за другим, образуют четырехзначное число, которое делится на их произведение. Найдите исходные числа.

183. Найдите наибольший полный квадрат, такой, что после вычеркивания двух последних его цифр снова получается полный квадрат. (Предполагается, что одна из вычеркиваемых цифр не нуль.)

184. Если в некотором натуральном числе, не оканчивающимся нулем, зачеркнуть одну из цифр, то оно уменьшится в целое число раз. На каком месте может стоять вычеркиваемая цифра?

185. Подряд записано 99 девяток. Докажите, что к ним можно приписать справа 100 цифр так, что получившееся 199-значное число окажется полным квадратом.

Бесконечность множества простых чисел

186. Пусть P_n – произведение первых n простых чисел. Докажите, что ни одно из чисел $P_n - 1$ и $P_n + 1$ не является полным квадратом.

187. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2, 3, 5, 7, ..., p_n (первые n простых чисел) дает в остатке 1, и докажите затем, что существует простое число p, большее чем p_n. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел.

188. Докажите, что среди чисел $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, ..., $n! - 1$ есть простое число. Пользуясь этим утверждением, докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

189. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 4 остаток 3, т.е. простых чисел вида $4n + 3$. То же для простых чисел вида $6n + 5$.

190. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $p+n^{2k}$ ни при каких простых p и натуральных n и k.

191. Докажите, что любые два числа последовательности

$$2^{2^0}+1=3,\ 2^{2^1}+1=5,\ 2^{2^2}+1=17,\ \ldots,\ 2^{2^n}+1,\ \ldots$$

взаимно просты. Выведите из этого утверждения еще одно доказательство бесконечности множества простых чисел.

192. Докажите, что для любого натурального N существуют N последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не является простым.

193. Докажите, что для любого натурального N существуют N последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат натурального числа, отличного от единицы.

194. Докажите, что ни при каком натуральном n $(n>1)$ число

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

не является целым.

195. Докажите, что при всяком простом p числитель дроби, получающейся после приведения к общему знаменателю выражения

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1},$$

делится на p.

196. Можно ли число 1 представить в виде

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\ldots+\frac{1}{n_{1971}},$$

где $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{1971}$ – различные нечетные числа?

Несколько теорем

197. (Алгоритм Евклида.) Даны два натуральных числа a и b. При делении на b число a дает остаток, равный r_1. Разделим b на r_1 (ясно, что $r_1<b$), получим в остатке r_2, далее r_2 разделим на r_1 и получим в остатке r_3 и т.д. Докажите, что на некотором шагу r_{n-1} разделится на r_n нацело, при этом $r_n=\text{НОД}(a,b)$.

198. Докажите, что наибольшая степень простого числа p, на которую делится $n!$, равна $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right]$, где $p^m \le n < p^{m+1}$.

199. Докажите, что число $n!$ ни при каком натуральном n не делится на p^n (p – простое число).

200. Докажите, что число $(n!)!$ делится на $(n!)^{(n-1)!}$.

201. Найдите все натуральные n, для которых

а) $(n - 1)!$ не делится на n;

б) $(n - 1)!$ не делится на n^2.

202. Докажите, что если число p из набора 2, 3, 4, ..., n взаимно просто со всеми остальными числами этого набора, то оно является простым числом, большим $\frac{n}{2}$.

203. (Теорема Вильсона.) Докажите, что натуральное число p является простым тогда и только тогда, когда $(p - 1)! + 1$ делится на p.

204. (Малая теорема Ферма.) Докажите, что если p – простое число, то $a^p - a$ делится на p при любом целом a.

205. (Теорема Эйлера.) Обозначим через $\varphi(n)$, где n – натуральное число, количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. Пусть a – взаимно простое с n число. Докажите, что $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на n.

206. (Функция Эйлера $\varphi(n)$.) Как и в предыдущей задаче, $\varphi(n)$ – количество простых чисел, меньших n и взаимно простых с ним.

а) Найдите $\varphi(p^k)$, где p – простое число, k – натуральное.

б*) Докажите, что если натуральные числа m и n взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

в) Найдите $\varphi(n)$, если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ – различные простые делители числа n.

Смесь

207. Простые числа p и q таковы, что $p^3 - 1$ делится на q, а $q - 1$ делится на p. Докажите, что $q = p^2 + p + 1$.

208. Докажите, что существует бесконечное количество натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех кубов целых чисел.

209. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов натуральных чисел.

210. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1967$ не имеет решений в целых числах.

211. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ и $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2n}$ – два набора натуральных чисел, полученных некоторыми перестановками из набора 1, 2, 3, ..., $2n$. Докажите, что какие-нибудь два из чисел $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots, a_{2n}+b_{2n}$ дают при делении на $2n$ одинаковые остатки.

212. Докажите, что последние цифры чисел вида $\frac{n(n+1)}{2}$ периодически повторяются, и найдите наименьший период.

213. Докажите, что последние цифры чисел вида n^n периодически повторяются, и найдите наименьший период.

214. Докажите, что натуральные числа k, для которых числа k^k+1 делятся на 30, образуют арифметическую прогрессию. Найдите разность этой прогрессии.

215. Дана таблица чисел

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \ldots & & 1967 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \ldots & \\ & & 4 & & 8 & & 12 & & \ldots & & \\ & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & & \\ & & & & & \ldots & & & & & \end{array}$$

(под каждой парой чисел записана их сумма). Докажите, что число, стоящее внизу, делится на 1967.

216. Числа Фибоначчи u_n образуют следующую последовательность: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... (каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих, т.е. $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n \geq 3$). Докажите, что u_{5n} делится на 5.

217. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – последовательность чисел, образованных по следующему закону:

$$a_1 = 1, \quad a_n = na_{n-1} + (-1)^n.$$

Докажите, что a_n делится на $n-1$ при $n > 1$.

218. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ образована по закону

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 1.$$

Докажите, что число $a_{2^{1968}}$ четно, но не делится на 4.

219. Некоторые из 20 листов бумаги разрезали на 10 частей, затем некоторые из получившихся листов разрезали еще на 10 частей и т.д. Когда подсчитали общее количество получившихся листов, то получили, что их число равно 1968. Докажите, что при подсчете была допущена ошибка.

220. Пятнадцать простых чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что разность этой прогрессии больше 30000.

221. Докажите, что среди чисел k, $k+1$, $k+2$, ..., $2k$ при любом натуральном k найдется полный квадрат.

222. Можно ли выбрать 1000000 натуральных чисел так, чтобы никакая сумма нескольких из этих чисел не являлась полным квадратом?

223. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1991. Разрешается взять несколько чисел, сумма S которых делится на 5, вычеркнуть их и вписать число $S/5$. Можно ли добиться, чтобы в результате на доске осталось единственное число: а) 1; б) 2?

Уравнения в целых числах

224. При каких натуральных n сократима дробь $\frac{4n+5}{7n+5}$?

225. При каких целых n будет целым число $\frac{n^5+3}{n^2+1}$?

226. Число $3m+5n$ делится на 19. Докажите, что число $7m+18n$ тоже делится на 19.

227. Остап Бендер организовал в городе Арбатове раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну членам профсоюза и поровну не членам. Оказалось, что существует лишь один способ раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у Остапа Бендера?

228. Докажите, что если $a^2+b^2=c^2$ и a, b, c – взаимно простые числа, то abc делится на 60.

229. Докажите, что число $121k+8$ ни при каком целом k не может быть представлено в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

230. Найдите все натуральные k, для которых число $22k+5$ является квадратом целого числа.

231. Сколько существует целых чисел a, при которых число $a^2+a+1969$ является квадратом целого числа?

232. Докажите, что уравнение $x^2+xy=y^2$ не имеет решений в целых ненулевых числах.

233. Решите в целых числах x и y уравнения

а) $3^x-y^3=1$;

б) $3^x-2^y=1$;

в) $1+x+x^2+x^3=2^y$.

234. Докажите, что уравнения

а) $19x^2-65y^2=1965$;

б) $19x^3-17y^3=50$;

в) $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ ($xyz \neq 0$)

не имеют решений в целых числах.

235. Решите в целых числах уравнение

$$\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}}_{1961\text{ знак корня}} = m\,.$$

236. а) Докажите, что все решения уравнения $x^n = y^m$, где натуральные числа m и n взаимно просты, задаются формулами $x = t^m$, $y = t^n$ (t – любое целое число).

б) Какими должны быть числа a и b, чтобы число $\log_a b$ было рациональным?

237. Решите в натуральных числах уравнения

а) $x^x + y^y = x^y + y^x$;

б) $x^{y^x} = y^{x^y}$.

238. а) Найдите все решения в рациональных числах уравнения $x^2 + x + 1 = y^2$.

б) Докажите, что существует бесконечно много рациональных чисел a, для которых число $8a^2 - 2a - 3$ является квадратом рационального числа.

239. Докажите, что уравнение

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

240. Пусть x и y – целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + x = 3y^2 + y\,. \qquad (*)$$

Докажите, что числа

а) $x - y$;

б) $2x + 2y + 1$ – полные квадраты.

в) Докажите, что уравнение ($*$) имеет бесконечно много решений в целых числах.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Последовательность операций

241. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые три секунды. Всего прозвучало 13 ударов (слившиеся удары воспринимались как один). Сколько времени на первых часах?

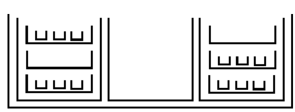
242. Из Нью-Йорка в Гавр в 12 часов ежедневно отправляется пароход. Расстояние между этими портами он покрывает за 7 суток. Сколько пароходов, следующих из Нью-Йорка в Гавр, встретит на своем пути пароход, отправляющийся в 6 часов из Гавра в Нью-Йорк?

243. Имеются два сосуда. В первом находится один литр воды, а второй пустой. Из первого переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Найдите количество воды, оказавшейся в первом сосуде после 1965-го переливания.

244. а) Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его по росту. Докажите, что если шеренгу восьмиклассников выстроить по росту и шеренгу семиклассников тоже выстроить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.

б) Полк солдат выстроен в виде прямоугольника так, что в каждой шеренге солдаты стоят по росту. Докажите, что если в каждой колонне перестроить солдат по росту, то в каждой шеренге они по-прежнему будут стоять по росту.

245. В ящик вложили k ящиков. В каждый из k вложенных ящиков либо вложили k новых ящиков, либо не вложили ни одного и т.д. (рис.1). Найдите число пустых ящиков, если заполненных ящиков (т.е. ящиков, в которые вложены другие ящики) оказалось m штук.



$k = 3, m = 7$

Рис.1

246. Один математик выписывает

подряд натуральные числа, повторяя некоторые из них, так чтобы у каждого числа n оказались выписанными ровно n его делителей (включая 1 и само число n). Получается такая последовательность:

$$1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ \ldots$$

а) Сколько раз он выпишет число 3^m?

б) Докажите, что в этой последовательности встретятся все натуральные числа.

247. Числа 1, 2, ..., n расположены на окружности по часовой стрелке. За один ход разрешается переставить любые два из этих чисел. Найдите наименьшее число ходов, после которых числа будут располагаться в том же порядке, но против часовой стрелки.

248°. В таблице $m \times n$ разрешается изменить знак у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца. Докажите, что несколькими такими заменами можно добиться того, что суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке будут неотрицательны.

249. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить по единице к некоторым 23 из них. Докажите, что, повторив эту операцию некоторое число раз, можно сделать все данные числа равными.

Каким условиям должны удовлетворять числа m и n ($m < n$), чтобы была разрешима общая задача*: заданы произвольные n целых чисел, разрешается прибавлять по единице к любым m из них и требуется добиться того, чтобы все они стали равными?

250. В n кошельках лежат деньги. Из первого кошелька перекладывают во второй $\frac{1}{n}$ содержащихся в нем денег, затем из второго перекладывают в третий $\frac{1}{n}$ оказавшейся там суммы, затем из третьего – перекладывают в четвертый $\frac{1}{n}$ оказавшейся там суммы и т.д., наконец, из последнего перекладывают в первый $\frac{1}{n}$ оказавшейся там суммы. Какое количество денег было первоначально в каждом кошельке, если после всех перекладываний в каждом кошельке оказалось по A рублей?

251*. В ящик поставим два ящика, в каждый из этих двух поставим еще по два ящика, в каждый из этих четырех поставим еще по два ящика и т.д. Через n таких шагов получаем 2^n маленьких ящиков. В каждый из них кладем по монете орлом