одной окружности с центром B, докажите, что $2\angle HKP = \angle HBP$. Отсюда следует, что $\angle HEP = \angle HBP$, т.е. что точки E, H, P лежат на окружности с диаметром BC.

448. $\angle MBD = \angle MCD = \angle MAB$.

449. Чтобы догадаться, что это за окружность, начертите побольше равнобедренных треугольников; особенно внимательно проследите, что происходит с их боковыми сторонами, когда основание стремится к нулю или к бесконечности. Искомая окружность касается данной прямой в точке A и в 2 раза больше вписанной окружности.

450. Соедините последовательно центры полученных окружностей и докажите, что построенные отрезки проходят через вершины данного четырехугольника, после чего докажите, что суммы противоположных углов полученного четырехугольника равны по $180°$.

451. Докажите, что в четырехугольнике $O_1O_2PO_2$ (мы считаем, что C лежит между A и B) $\angle O_3 = 180° - \angle PCB$, а $\angle O_2 = 180° - \angle PCA$.

452. Докажите сначала, что если X и Y – точки, лежащие соответственно на двух окружностях, пересекающихся в точках K и H, то точки X, K и Y лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle XKH + \angle YKH = 360°$.

453. Докажите, что $\angle CMB = 180° - \angle CAB$, этим будет доказано второе утверждение, а затем – что дуга CM окружности, описанной вокруг треугольника ABC, равна дуге MB той же окружности, откуда следует первое утверждение.

454. Постройте окружность на AC как на диаметре и докажите лемму: если три окружности пересекаются, то три их общие хорды пересекаются в одной точке.

455. Покажите, что если начать соответствующее построение из произвольной точки, то в результате получим одну и ту же точку.

456. Для центра каждой окружности рассмотрите все точки, удаленные от этого центра не дальше, чем от любого другого, и покажите, что это – выпуклый многоугольник, содержащий выбранную окружность, а также, что все такие многоугольники, примыкая друг к другу, заполняют весь квадрат.

457. Рассмотрите последовательность углов между разрезами и соответствующими сторонами многоугольника.

458. Отношение расстояний от точки M до плоскостей ABC и $A'B'C'$ равно отношению площадей треугольников ABC и $A'B'C'$. Искомое геометрическое место – две плоскости, проходящие через линию пересечения плоскостей ABC и $A'B'C'$ (саму линию следует исключить).

459. Эти отрезки – диагонали параллелограммов, образованных средними линиями граней.

460. Углы при самом большом ребре тетраэдра – острые.

461. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ – параллелепипед без прямых плоских углов. Можно считать, что углы A и A' в основаниях $ABCD$ и $A'B'C'D'$ тупые, и, следовательно, углы B и B' острые. Рассматривая грань $ABA'B'$, видим, что либо к вершине A прилежат два тупых угла, а к вершине B – два острых, либо к вершине A' – два тупых, а к вершине B' – два острых. Теперь ясно, что, как бы ни располагались тупые углы в гранях $ADD'A$ и $BCC'B$, ровно в одной из вершин A, B, A', B' сходятся три тупых или три острых угла.

462. $n + 1$ ребро. Многоугольник, получающийся в сечении, не может иметь больше сторон, чем количество граней пирамиды.

463. Пусть есть m-гранник, имеющий 7 ребер. Ни одна из его граней не может быть четырехугольником. Значит, все его грани – треугольники. Но тогда он имеет $\frac{3m}{2}$ ребер, что невозможно, так как 7 не делится на 3. Многогранник с $2m$ ребрами – n-угольная пирамида, а с $2n + 3$ ребрами – n-угольная пирамида, на одной из боковых граней которой как на основании построен тетраэдр.

464. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ – расстояния от точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ до плоскости. Произведение из условия задачи равно

$$\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{h_3} \cdot \ldots \cdot \frac{h_{n-1}}{h_n} \cdot \frac{h_n}{h_1} = 1 .$$

465. а) Доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы планиметрии.

б) Пусть стороны AB, BC, CD и DA касаются сферы в точках K, L, M, N соответственно. Очевидно, что

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1 .$$

Проведем плоскость через точки K, L, M и докажем, что она пересечет ребро DA в точке N. Пусть N^* – точка пересечения секущей плоскости с DA. Тогда (см. задачу 464)

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN^*}{N^*A} = 1 .$$

Следовательно,

$$\frac{DN}{NA} = \frac{DN^*}{N^*A}.$$

Итак, $N = N^*$.

466. а) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и $\dfrac{AP}{AO} = x$. Тогда

$$S_{AKL} = S_{AKP} + S_{ALP} = \alpha x S_{ABO} + \beta x S_{AOD} = \alpha\beta S_{ABD}.$$

б) $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}$. Воспользуйтесь результатом пункта а).

467. а) Рассмотрите развертку тетраэдра и воспользуйтесь тем, что если α, β, γ – плоские углы трехгранного угла, то $\alpha+\beta > \gamma$.

б) Докажем, например, что $a = a'$ (рис.97). Из равенства периметров граней следует, что $a+b = a'+b'$ и $a+b' = b+a'$. Сложив эти равенства, получим, что $a = a'$. Равенства $b = b'$ и $c = c'$ доказываются аналогично.

в) Развертка тетраэдра – треугольник, в котором проведены средние линии.

г) Все грани – остроугольные треугольники, причем углы, показанные на рисунке 97, равны. Кроме того, равны радиусы окружностей, описанных около граней.

д) См. задачу 459.

е) Докажите, что проекция тетраэдра на плоскость, параллельную ребрам AB и CD, – параллелограмм, и получите отсюда равенство ребер AC и BD, а также AD и BC, после чего аналогично установите равенство $AB = CD$. Можно также воспользоваться тем, что отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD, перпендикулярен этим ребрам.

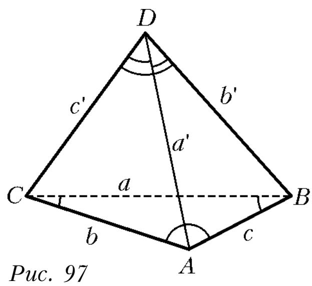

Рис. 97

468. Пусть A' и B' – проекции точки A и B на плоскость. Нас интересуют точки M, для которых $\dfrac{A'M}{B'M} = \dfrac{A'A}{B'B}$. Геометрическим местом точек M будет окружность (или прямая, если $AA' = BB'$)

469. а) Пусть l_1 и l_2 – любые две из данных прямых и есть третья прямая l_3, не проходящая через их точку пересечения.

Тогда прямые l_1, l_2, l_3 лежат в одной плоскости и всякая другая прямая, пересекаясь с каждой из прямых l_1, l_2, l_3, имеет по меньшей мере 2 общие точки с этой плоскостью.

б) Пусть две из данных окружностей ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Если есть окружность ω_3, пересекающаяся с каждой из них в двух точках и не проходящая через обе точки A и B, то имеются две возможности. 1) Окружности ω_1 и ω_2 лежат в одной плоскости, но тогда ω_3 имеет 3 общих точки с этой плоскостью. 2) Если ω_1 и ω_2 не лежат в одной плоскости, то они принадлежат некоторой сфере и тогда ω_3 лежит на этой сфере. Остальные окружности также лежат в первом случае – на плоскости, во втором – на сфере.

470. а), б). Докажите, что если высоты из вершин A и D пересекаются, то $AD \perp BC$ и, наоборот, если $AD \perp BC$, то и высоты пересекаются.

Далее может оказаться полезной ссылка на задачу 469, а).

в) Впишем тетраэдр $ABCD$ в параллелепипед, проведя пары параллельных плоскостей через его ребра. Докажите, что противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны тогда и только тогда, когда все грани этого параллелепипеда – ромбы, т.е. все ребра параллелепипеда равны, а диагонали граней равны ребрам тетраэдра. Далее воспользуйтесь тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

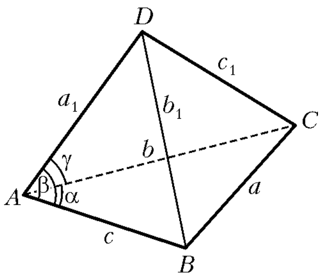

Рис. 98

г) Если основание высоты тетраэдра – ортоцентр грани, то, по теореме о трех перпендикулярах, его противоположные ребра перпендикулярны.

д) Не могут. Из пункта в) следует (рис.98), что $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$. По теореме косинусов

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$2a_1c\cos\beta = a_1^2 + c^2 - b_1^2 = \left(b_1^2 + b^2 - a^2\right) + c^2 - b_1^2 = b^2 + c^2 - a^2,$$

аналогично

$$2a_1b\cos\gamma = b^2 + c^2 - a^2.$$

Поэтому $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ имеют одинаковые знаки и, следовательно, все углы при вершине A либо острые, либо прямые, либо тупые. То же самое относится и к любой другой вершине. Однако двух вершин, в которых сходились бы только тупые или только прямые углы, в тетраэдре быть не может, так что либо одна из граней с вершиной A, либо грань BDC – остроугольный треугольник.

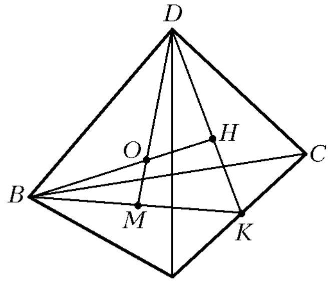

Рис. 99

471. Рассмотрите треугольник BDK (рис.99). В нем DK и BK – медианы граней ABC и ADC, M и N – их центры тяжести. Найдите отношение $OM : OD$ (например, воспользуйтесь методом решения задачи 466, а)).

472. Разделите многоугольник на треугольники и трапеции прямыми, параллельными горизонтальной плоскости, и воспользуйтесь тем, что при проектировании их высоты умножаются на $\cos\alpha$, а основания не меняются.

473. Площадь проекции параллелепипеда равна удвоенной площади проекции треугольника KLM (рис.100) и будет максимальной, когда плоскость KLM горизонтальна.

474. Проекция тетраэдра – либо треугольник, либо четырехугольник. В первом случае площадь проекции не больше площади одной из граней. Во втором – не

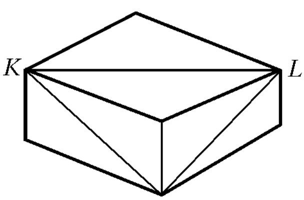

Рис. 100

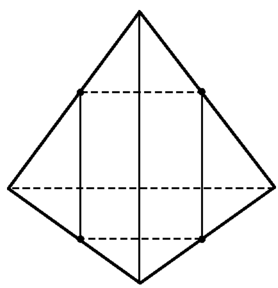
Рис. 101

больше удвоенной площади проекции параллелограмма – сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через середины четырех ребер и параллельной двум остальным ребрам (рис.101). Далее рассуждаем так же, как в предыдущей задаче. Правильную пирамиду при $b \geq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ нужно располагать так, чтобы одно ребро основания и противоположное ему боковое ребро были горизонтальны, а при $b \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ горизонтальной должна быть плоскость основания.

475. $6S$. В каждой грани соедините точки касания с вершинами и рассмотрите возникающие при этом треугольники.

476. Пусть O – центр шара, R – его радиус, P – точка внутри шара, $OT = d$, через d_1, d_2, d_3 обозначим расстояния от O до попарно перпендикулярных плоскостей, проведенных через точку P. Докажите, что $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = d^2$ (отсюда получится, что сумма площадей кругов равна $\pi\left(3R^2 - d^2\right)$).

477. а) Пусть такой шар существует, тогда отрезки от каждой вершины до точек касания ребер, выходящих из этой вершины, равны. На каждой паре противоположных ребер лежит ровно по одному из этих отрезков. Поэтому условие $AB + CD = AC + BD = BC + AD$ выполняется. Для доказательства обратного утверждения покажите, что из равенства сумм противоположных ребер следует, что окружности, вписанные в соседние грани, касаются их общих ребер в одной и той же точке (рис.102). После этого докажите, что все вписанные в грани окружности лежат на одной сфере.

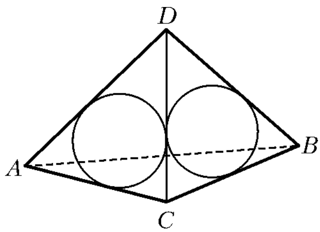

Рис. 102

б) Если шар касается ребер AB, BC и CA и продолжений ребер AD, BD и CD, то $AB - CD = BC - AD = CA - BD$.

в) Из полученных условий следует, что два шара типа б) существуют тогда и только тогда, когда противоположные ребра равны. При этом существуют и два других шара типа б).

Шар типа а) и шар типа б) существуют только для правильных пирамид (шар б) при этом касается ребер основания).

г) Следует из в).

478. Пусть l_1 и l_2 – прямые, по которым пересекаются противоположные грани четырехгранного угла (они проходят через его вершину). Всякая плоскость, параллельная плоскости, проходящей через l_1 и l_2, и пересекающая ребра четырехгранного угла, пересекает его по параллелограмму.

479. 5, 6, 7 или 8. Заведомо существует сфера, касающаяся всех граней тетраэдра (вписанная сфера) и четыре сферы, касающихся граней и их продолжений (вневписанные сферы). Кроме того, имеются еще шесть областей (в форме четырехскатной крыши), примыкающих к ребрам тетраэдра и ограниченных всеми четырьмя плоскостями граней. На рисунке 103 такой «крышей» является $A'AA''B'BB''$. Если существует сфера, касающаяся всех граней «крыши», то ее центр I принадлежит биссекторной плоскости π двугранного угла с ребром AB и прямой l, проходящей через вершину A и состоящей из точек, одинаково удаленных от плоскостей ABD, ABC и ADC (биссектриса трехгранного угла $AA'A''B$). Поскольку для «крыши» при ребре CD центр вписанной в нее сферы должен также принадлежать упомянутым плоскости и прямой, из единственности точки пересечения прямой и плоскости следует, что если в одну из «крыш» можно вписать сферу, то в противоположную ей – нельзя.

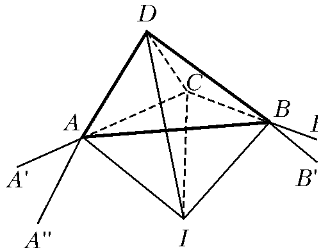

Рис. 103

Допустим, что точка I пересечения прямой l и плоскости π принадлежит «крыше» с ребром AB. Пусть ρ – расстояние от точки I до всех четырех плоскостей. Рассмотрим шестигранник $DACBI$. Пусть площади граней ABC, ADB, ADC и BDC равны соответственно S_1, S_2, S_3, S_4. Тогда объем V тетраэдра ABC, очевидно, равен

$$V = V_{IADC} + V_{IBDC} - V_{IADB} = \frac{1}{3}\rho\left(S_3 + S_4 - S_1 - S_2\right).$$

Таким образом, для существования вписанной в «крышу» сферы необходимо условие $S_3 + S_4 > S_1 + S_2$. Докажем, что это условие является и достаточным. Пусть I – точка, удаленная от трех из данных плоскостей на расстояние, равное $\dfrac{3V}{S_3 + S_4 - S_1 - S_2} = \rho$, а ρ' – расстояние от I до четвертой из них (например, до плоскости ABC). Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\rho\left(S_3 + S_4 - S_2\right) - S\frac{1}{3}\rho' S_1 = \frac{1}{3}\rho\left(S_3 + S_4 - S_1 - S_2\right).$$

Откуда $\rho = \rho'$.

Итак, если $S_3 + S_4 > S_1 + S_2$, сфера вписывается в «крышу» с ребром AB, если $S_1 + S_2 > S_3 + S_4$ – в «крышу» с ребром CD. При $S_3 + S_4 = S_1 + S_2$ такой сферы нет. Таким образом, если $S_1 + S_2 \neq S_3 + S_4$, $S_1 + S_3 \neq S_2 + S_4$, $S_1 + S_4 \neq S_2 + S_3$, существуют все 3 вневписанные сферы второго рода. Если верно только оно из равенств $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$, $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$, таких сфер две, если два равенства, то одна и, наконец, если все 3 равенства, т.е. если $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ – ни одной.

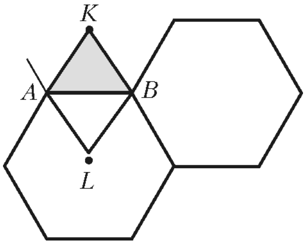

Рис. 104

480. а) Пусть сфера касается двух – черной и белой – граней многогранника с общим ребром AB (рис.104) в точках K и L соответственно. Треугольники AKB и ALB равны по трем сторонам и, следовательно, имеют равные площади. Так как всякая черная грань граничит только с белыми гранями, а сумма площадей всех рассмотренных треугольников, равная сумме площадей черных граней, больше суммы площадей белых граней, возникает противоречие.

б) Рассуждение аналогично. Только нужно рассматривать не площади треугольников AKB и ALB, а *углы* при вершинах K и L. Сумма этих углов для черных граней равна $2\pi m$, где m – число черных граней, и, следовательно, больше, чем $2\pi k$, где k – число белых граней.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Николай Борисович Васильев,
Анатолий Павлович Савин,
Андрей Александрович Егоров

Избранные олимпиадные задачи

Математика

Библиотечка «Квант». Выпуск 100

Приложение к журналу «Квант» №2/2007

Редактор *А.Ю.Котова*
Обложка *А.Е.Пацхверия*
Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*
Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 85

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская.
Печать офсетная. Объем 5 печ.л. Тираж 3500 экз.
Заказ № .

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области.
Сайт: www.chpk.ru. E-mail:marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672)6-25-36, факс: 8(499)270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59