Теперь мы можем построить угол α, а затем и четырехугольник. Для построения угла возьмем произвольный отрезок l, построим отрезки $u = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{l}$ (для определенности будем считать, что $a^2 + d^2 \geq b^2 + c^2$) и $v = \frac{2(ad + bc)}{l}$. Угол α будет при этом углом прямоугольного треугольника с катетом u и гипотенузой v. Дальнейшее ясно.

374. Если четырехугольник $ABCD$ – искомый (рис.71), то в четырехугольнике $AOCD$, где O – центр вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности, угол AOC равен $90° + \angle B$. После этого замечания построение точки O не представляет труда – это точка пересечения биссектрисы BK угла B и дуги AOC, вмещающей известный угол, – геометрического места всех вершин углов, равных $\angle AOC$.

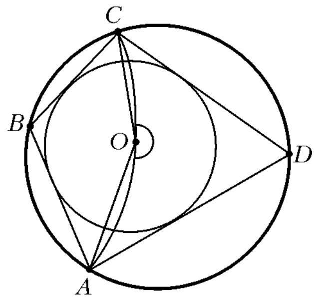

Рис. 71

375. Проведите окружность с диаметром PO. Точки ее пересечения с данной окружностью – вершины прямых углов искомых треугольников.

376. Постройте окружность, центрально-симметричную одной из данных относительно данной точки. Две вершины искомого параллелограмма лежат в точках пересечения этой окружности и второй данной окружности.

377. В треугольнике AXY легко находится длина стороны XY и угол между стороной XY и биссектрисой угла A, после чего треугольник AXY можно построить, так как известен радиус описанной вокруг него окружности.

378. Возьмем отрезок с концами на данных прямых, равный AB, и построим равный и параллельный ему отрезок AD. Тогда одна из точек E и P лежит на прямой BD. Выясните, сколько решений имеет задача.

379. Постройте угол δ между диагоналями трапеции (рис.72), а далее воспользуйтесь тем, что угол между диагональю трапеции и диаметром, проходящим через точку

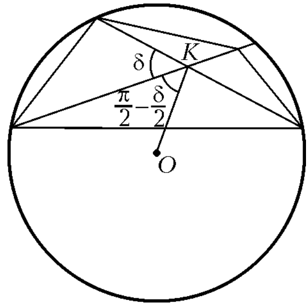

Рис. 72

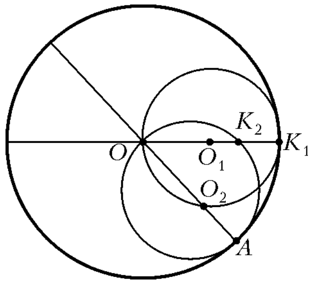

Рис. 73

пересечения диагоналей, равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$.

380. Траектория движения каждой точки подвижной окружности – диаметр большой окружности. Пусть точка K малой окружности переехала из положения K_1 в положение K_2 (рис.73); при этом O_1 и O_2 – положения центра малой окружности, O – центр большой, A – точка касания во второй момент. Мы используем далее лишь то, что вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую опирается, а центральный – целой дугой.

Так как радиус подвижной окружности в 2 раза меньше, $\angle K_2O_2A = 2\angle K_1OA$ – ведь дуги K_1A и K_2A равны – проскальзывания нет. С другой стороны, точка O лежит на подвижной окружности, поэтому $\angle K_2OA = \frac{1}{2}\angle K_2O_2A = \angle K_1OA$, значит, точки K_2, K_1 и O лежат на одной прямой.

381. Введем декартову систему координат, как показано на рис.74. Пусть точка $P(x, y)$ удовлетворяет условию задачи. Пользуясь симметрией квадрата, рассмотрим точки, для которых $y \geq x \geq 0$. Расстояния от точки P до сторон квадрата равны $|x-1|$, $|y-1|$, $x+1$ и $y+1$. Рассмотрите случаи:

1) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;

2) $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 1$;

3) $x \geq 1, y \geq 1$

и получите ответ.

382. Это точки, выделенные на рис.75.

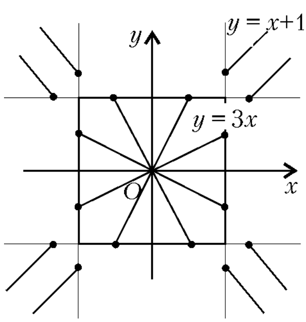

Рис. 74

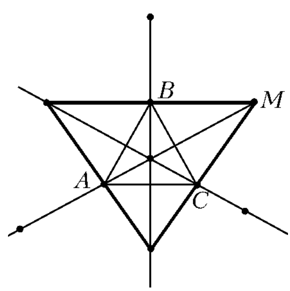

Рис. 75

383. Два отрезка прямых, параллельных сторонам квадрата и проходящих через точку A, а также два равных отрезка, параллельных данной диагонали квадрата, один из которых проходит через точку A (концы всех отрезков лежат на сторонах квадрата).

384. Окружность диаметра $AO/2$, касающаяся внутренним образом данной в точке A.

Пусть $AH = h$, KL – диаметр окружности, M – точка пересечения KP и AH (рис.76). Так как $AH = HA'$, $AM \cdot MA' = x(2h - x) = KM \cdot MP$. Кроме того, аналогично, $HM \cdot MQ = y(2h - y) = KM \cdot MP$. Итак, $x(2h - x) = y(2h - y)$. Отсюда следует, что $x = y$. Таким образом, искомое геометрическое место получается из множества всех точек H гомотетией с коэффициентом $1/2$ и центром H. Точки H в свою очередь лежат на окружности с диаметром AO.

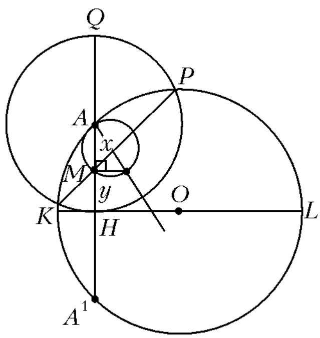

Рис. 76

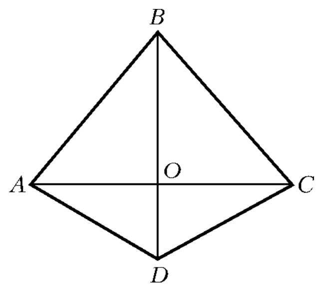

Рис. 77

385. а) $AB < AO + BO$, $CD < OC + OD$ (рис.77). Осталось сложить эти неравенства.

б) Сложив неравенство пункта а) с данным, получим требуемое.

386. Могут. Рассмотрите равнобедренный треугольник с очень большим основанием и очень маленькой высотой.

387. Угол A – заведомо острый. Если $\angle C \geq 90°$, утверждение очевидно. Если угол C острый (рис.78), точки M и C лежат по разные стороны от основания H высоты BH. Поэтому $MK > KC$, но тогда $ME > EC$.

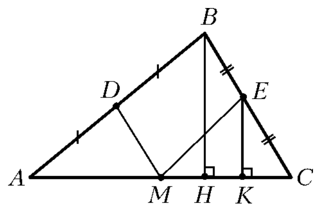

Рис. 78

388. Искомая точка M – основание высоты BM треугольника ABC.

389. Пусть α, β, γ – углы треугольника, причем $\beta > \alpha$. Тогда $180° = \alpha + \beta + \gamma < 2\beta + \gamma$, откуда $\beta + \frac{\gamma}{2} > 90°$. Но это и требовалось.

390. Ось симметрии четырехугольника – либо диагональ, либо средняя линия.

391. Постройте окружность на диагонали, проведенной из острого угла, как на диаметре.

392. Если бы была точка, не покрываемая этими кругами, то каждая сторона была бы видна из этой точки под углом меньшим $90°$.

393. Можно считать, что три вершины квадрата лежат на сторонах треугольника (рис.79,*а*, *б*). Докажите, что площадь прямоугольника, расположенного так, как показано на рис.79,*б*, не превосходит половины площади треугольника.

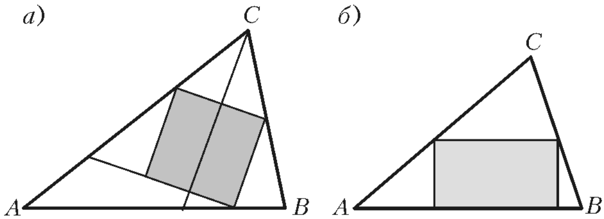

Рис. 79

394. Вначале покажите, что площадь четырехугольника не уменьшается, если, не меняя угла между отрезками длины 1, передвинуть их так, чтобы их общий конец лежал на биссектрисе данного угла. Затем покажите, что каждый из этих отрезков выгодно расположить так, чтобы он отсекал от половины данного угла равнобедренный треугольник.

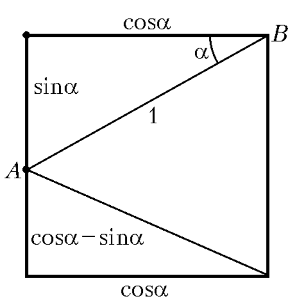

Рис. 80

395. Докажите, что $AM \perp OA$.

396. Докажите, что у любого треугольника площади 1 хотя бы одна из высот не больше высоты равностороннего треугольника такой же площади.

397. Точки A и B – концы диагонали квадрата. *Указание*. Можно считать, что B – вершина квадрата AB =

$= 1$. Пусть A расположена так, как показано на рисунке (рис.80). Тогда сумма расстояний от A до вершин равна $S = 1 + \cos\alpha + {}$ $+ \sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha}$. Очевидно, что $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ и тогда $S \ge 2\cos\alpha + 1 \ge 1 + \sqrt{2}$, причем при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ значение $1 + \sqrt{2}$ достигается. В случаях, когда AB − сторона квадрата или A − вершина, сумма расстояний от A до вершин больше, чем $1 + \sqrt{2}$.

398. M − середина гипотенузы.

399. Это треугольник, образованный основаниями высот треугольника ABC.

400. Это точка, из которой стороны треугольника видны под углами $120°$, если наибольший из углов меньше $120°$, и вершина тупого угла, если этот угол не меньше $120°$.

401. Если $AB' = AC'$. В этом случае точки B' и C' являются точками касания вневписанной окружности с продолжениями сторон AB и AC (рис.81). Для доказательства этого достаточно заметить следующее: если x такая точка на стороне BC, что $BX = BB'$, а $CX = CC'$, то $\angle B'XC' = \frac{\pi + \alpha}{2}$. Если R − радиус окружности, описанной около треугольника $B'XC'$, то $B'C' = 2R\sin\frac{\pi+\alpha}{2} = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$ и $B'C'$ будет минимальна при минимальном R. Однако из всех окружностей, пересекающих продолжения сторон AB и AC сторону BC, наименьший радиус имеет вневписанная окружность треугольника ABC.

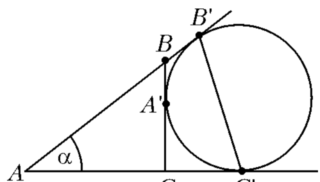

Рис. 81

402. а) Луч, проходящий через центр окружностей.

б) Луч, перпендикулярный радиусу, проходящему через данную точку (см. также задачу 395).

403. Точка пересечения диагоналей.

404. Это прямая, отрезок которой, высекаемый на ней сторонами угла, делится данной точкой пополам.

405. Одна из диагоналей ромба совпадает с диагональю прямоугольника.

406. Площадь одного из треугольников ABX, BXC, CZD, DZE, EYF и FAY (рис.82) не больше $1/6$ площади шестиугольника. Пусть, например, это треугольник AXB, но тогда одна из

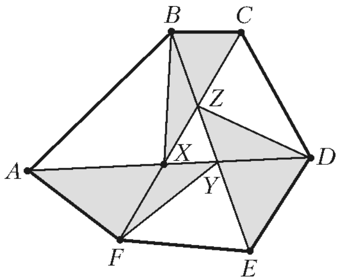

Рис. 82

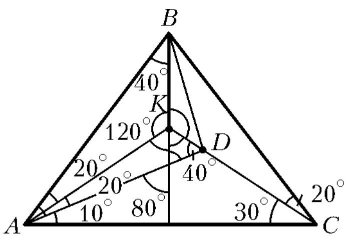

Рис. 83

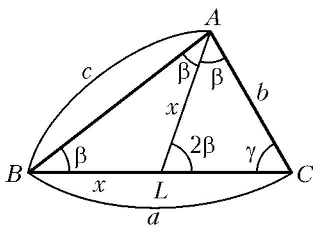

Рис. 84

площадей треугольников ABC или ABF не больше площади AXB.

407. $30°$, $60°$, $90°$.

408. $70°$. *Указание.* Пусть K – точка пересечения CO и биссектрисы угла BAO (рис.83). Докажите равенство треугольников AKB и AKO.

409. $60°, 120°$. *Указание.* Докажите, что расстояние от вершины C до ортоцентра равно $2R|\cos C|$, где R – радиус описанной окружности.

410. $18°$, $18°$, $144°$.

411. $45°$ или $135°$. См. указание к задаче 409.

412. 1. Пусть A – биссектриса угла A (рис.84). Докажите, что $\Delta ABC \backsim \Delta LAC$. Из этого подобия следует, что $a^2 = b^2 + bc$, откуда, в свою очередь, получается, что $a = \sqrt{3}$. Но это значит, что треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90°$) и $\angle A = 60°$.

413. $\dfrac{2k}{(k+1)^2}$. Воспользуйтесь тем, что диагональ ромба – биссектриса угла треугольника ABC.

414. $13S$.

415. $\dfrac{rR(R+r)}{R-r}$.

416. $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

417. $c^2 + s^2$.

418. tmn, $tm^2, t\left(m^2 - n^2\right)$, где m и n – взаимно простые натуральные числа, $m < n < 2m$, t – произвольное натуральное число. Из указания к задаче 412 следует, что стороны a, b и c удовлетворяют уравнению

$$a^2 = b(b+c),$$

решения которого в целых числах нам предстоит найти. Будем считать, что $\text{НОД}(a,b,c)=1$. Тогда $\text{НОД}(a,c)=1$, $\text{НОД}(b,c)=1$. Пусть $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$. Рациональные числа x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2 = y^2 + y.$$

Положив $y = kx$, где k – некоторое рациональное число, имеем

$$x = \frac{k}{1-k^2}, \quad y = \frac{k^2}{1-k^2}.$$

Запишем k в виде $k=\frac{m}{n}$, где m и n $(m < n)$ – взаимно простые натуральные числа.

Тогда $x=\frac{mn}{n^2-m^2}$, $y=\frac{m^2}{n^2-m^2}$. Так как $\frac{a}{c}=x$, $\frac{b}{c}=y$, из взаимной простоты числителей и знаменателей следует $a = mn$, $b=m^2$, $c=n^2-m^2$.

Из неравенства треугольника $a + b > c$ получим после преобразований, что $n < 2m$. Итак, все взаимно простые тройки описаны. Умножением тройки на произвольные натуральные t получаем все решения.

419. Докажите, что $S_1S_4 = S_2S_3$. Далее воспользуйтесь тем, что число, оканчивающееся цифрами …65, не может быть полным квадратом.

420. $90°$. Докажите, что C_1A_1 и C_1B_1 – биссектрисы углов CC_1B и CC_1A соответственно.

421. $1/2$.

422. $1/2$.

423. Из условия следует, что $a+b=c+d$, $a+d=b+c$, откуда $a=c$, $b=d$, после чего из равенства $a+d+e=a+b+m$ получаем $e = m$.

424. Пусть α и β – наименьшие углы данных треугольников, S_1 и S_2 – их площади, c_1 и c_2 – их гипотенузы. Из формул $S_1=\frac{1}{4}c_1^2\sin^2 2\alpha$, $S_2=\frac{1}{4}c_2^2\sin^2 2\beta$ следует, что $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, т.е. $\alpha=\beta$.

425. Воспользуйтесь тем, что расстояние от вершины C треугольника до точки касания с впи-

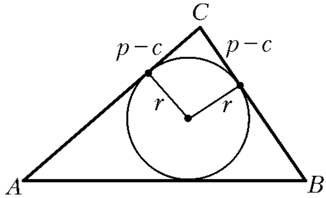

Рис. 85

санной окружностью равно $p - c$, p – полупериметр треугольника (рис.85).

426. Центр O квадрата лежит на описанной окружности.

427. Точки B, K, H и A лежат на одной окружности. Поэтому $\angle KBH = \angle KAH = 60°$. Аналогично, $\angle KCH = \angle KPH = 60°$.

428. Пусть S – площадь треугольника, a, b, c – его стороны, h_a, h_b, h_c – соответствующие высоты Стороны квадратов равны соответственно $\frac{ah_a}{a+h_a} = \frac{2s}{a+h_a}, \frac{2s}{b+h_b}, \frac{2s}{c+h_c}$, откуда $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Отсюда получите, что $a = b = c$.

429. Треугольники KAD, LCD и KBL равны по двум сторонам и углу между ними (рис.86).

430. Докажите, что данный треугольник не может быть остроугольным, затем рассмотрите случай тупоугольного треугольника.

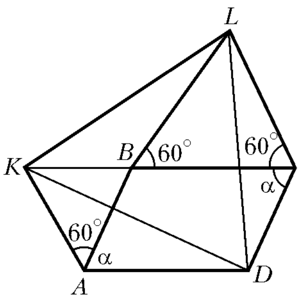

Рис. 86

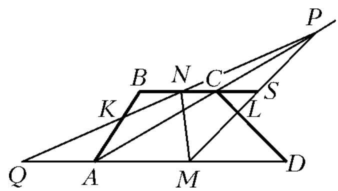

Рис. 87

431. Докажите, что у этих трапеций соответствующие углы равны, и используйте теорему о сегменте, вмещающем данный угол (см. задачу 374).

432. Из подобий треугольников следует, что (рис.87)

$$\frac{BK}{KA} = \frac{BN}{AQ} = \frac{NC}{QA} = \frac{PC}{PA}$$

и

$$\frac{CL}{LD} = \frac{CS}{MD} = \frac{CS}{AM} = \frac{PC}{PA}.$$

433. Удобно представить стороны пятиугольника как векторы и через них выразить указанный отрезок. Возможны и другие решения.

434. Рассмотрите вписанные углы (рис.88).

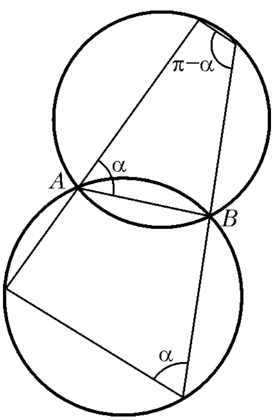

Рис. 88

435. Пусть K, L, M и N – середины сторон четырехугольника (рис.89). Треугольники NPM и BKL равны. Поэтому $S_{BLK} = S_{NPM} = S_{NOM} = \frac{1}{4} S_{ABC}$. Кроме того, $S_{MND} = \frac{1}{4} S_{ACD}$, так что $S_{NOMD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

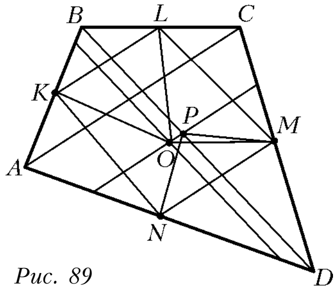

Рис. 89

436. Это следует из того, что выделенные на рис.90 дуги $\overset{\smile}{KL}$ и $\overset{\smile}{MN}$ в сумме дают $180°$ (докажите это!).

437. Докажите, что угловая мера суммы дуг $\overset{\smile}{KBM}$ и $\overset{\smile}{LDN}$ равна $180°$ (рис.91).

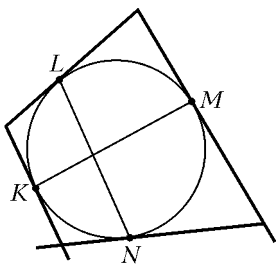

Рис. 90

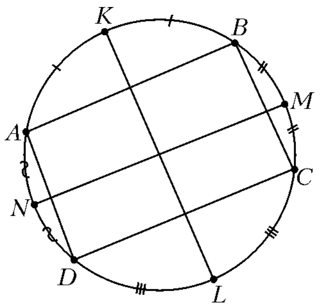

Рис. 91

438. Площадь треугольника BLC равна сумме площадей треугольников ABK и KCD (рис.92).

439. Воспользуйтесь тем, что около четырехугольника $AMBO$ (рис.93) можно описать окружность, а угол AMB равен одному из углов, образованных диагоналями прямоугольника.

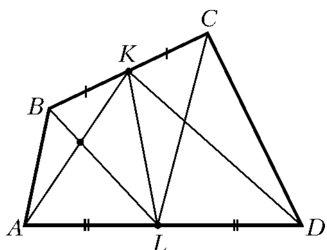

Рис. 92

440. Заметим, что $\angle T_1AT_2 = 180° - \frac{\alpha}{2}$ (рис.94). Поэтому $\angle 1 + \angle 2 = \frac{\alpha}{2}$ и

$$\angle M_1T_2M_2 = 180° - \angle PT_2T_1 - \angle 1 - \angle 2 = 180° - 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90° .$$

441. Пусть P, Q, R, S − основания перпендикуляров,

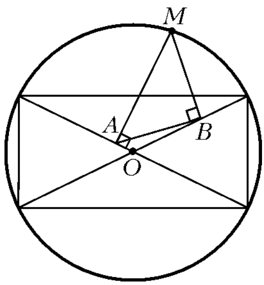

Рис. 93

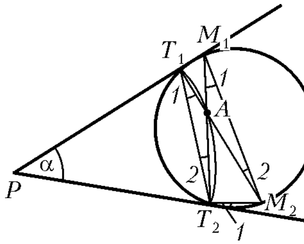

Рис. 94

опущенных из точки M описанной окружности на прямые AB, BC, CD и DA соответственно (рис.95). Докажите, что треугольники SMRи MPQ подобны, пользуясь тем, что каждая из четверок точек S, M, R, D и M, Q, B, P лежит на некоторой окружности (каждая четверка – на своей). Аналогичное рассуждение проведите и для диагоналей четырехугольника.

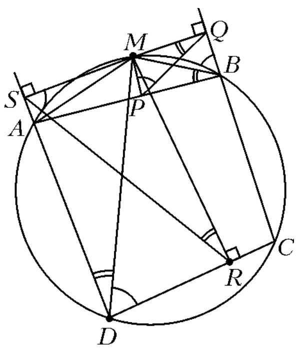

Рис. 95

442. Пусть $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$). Рассмотрите треугольник ACK, где $CK \parallel BD$, а точка K лежит на прямой AD.

443. Проведите две указанные секущие, соедините точки их пересечения с окружностями с точкой B и докажите подобие образовавшихся треугольников.

444. Пусть R – радиус окружности. Докажите, что $AM^2 + BM^2 = 2R^2$. Один из способов доказательства связан с таким утверждением: если AB и CD – перпендикулярные хорды окружности радиуса R, то $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

445. Диаметр BE перпендикулярен хорде AC, а углы BAC и CAD равны. Поэтому $AB = AF$. Вторая часть утверждения следует из того, что $EC \perp AD$.

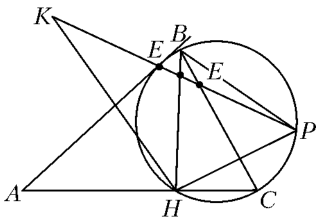

Рис. 96

446. Пусть O – центр окружности. Докажите подобие треугольников OAP и OPB.

447. Пусть E – точка пересечения KP и AB (рис.96). Пользуясь тем, что точки K, H и P лежат на