сторонами, параллельными сторонам квадрата, не содержащий внутри ни одной из наших точек, должен целиком лежать или в верхней половине квадрата, или в нижней.

Обе эти половины снова разделим горизонтальными отрезками пополам, и разместим на этих отрезках точки настолько часто, чтобы прямоугольник площади $\frac{1}{201}$, не содержащий ни одной из этих точек, должен был целиком помещаться в одном из полученных прямоугольников $1\times\frac{1}{4}$. Для этого достаточно разместить на каждом из отрезков по 100 точек.

Продолжая таким же образом дальше, мы должны будем для каждого $k = 1; 2; 3; \ldots$ построить 2^{k-1} отрезков и на каждом из них расположить $\left[\frac{200}{2^{k-1}}\right]$ точек, делящих этот отрезок на $\left[\frac{200}{2^{k-1}}\right]+1$ равных частей. При этом каждый раз ширина прямоугольников, на которые проведенные горизонтальные отрезки делят квадрат, уменьшается вдвое. После того как мы построим точки, соответствующие $k = 7$, эта ширина будет равна $\frac{1}{256}$. В такой прямоугольник уже не может поместиться прямоугольник площади $\frac{1}{200}$, так что больше не нужно строить никаких точек.

Нам понадобилось всего $200 + 2\cdot 100 + 4\cdot 50 + 8\cdot 25 + 16\cdot 12 + {} + 32\cdot 6 + 64\cdot 3 + 128\cdot 1 = 1504$ точки. Остальные 1965 − 1504 точки можно расположить как угодно.

344. Разделим квадрат на 25 квадратиков со стороной $\frac{1}{5}$. В одном из них наверняка найдутся 3 точки из данных. Радиус окружности, описанной около квадрата со стороной $\frac{1}{5}$, равен $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$.

345. Пусть ABC − треугольник наибольшей площади с вершинами в данных точках. Все данные точки содержатся в треугольнике $A'B'C'$, в котором стороны треугольника ABC являются средними линиями (см. рис.56). В самом деле, если

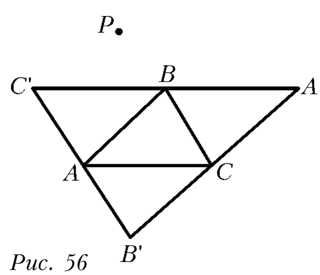

Рис. 56

какая-то точка P окажется вне треугольника $A'B'C'$, расстояние от нее до одной из сторон треугольника ABC будет больше некоторой высоты треугольника ABC. Площадь треугольника PAC окажется больше площади треугольника ABC. Площадь же треугольника $A'B'C'$ не больше 4.

346. Опишем вокруг каждой из данных точек круг радиуса $1/2$. Сумма диаметров этих кругов равна 100. Если какие-то два круга пересекаются, заменим их одним кругом, а именно, кругом наименьшего диаметра, содержащего эти два. Сумма диаметров при этом не станет больше, а число кругов уменьшится. Продолжая эту процедуру, мы получим систему попарно не пересекающихся кругов, содержащих все данные точки, причем сумма диаметров этих кругов не больше 100. Отметим, что расстояние от каждой точки до границы круга не меньше $1/2$. Пусть r – наименьшее расстояние между кругами. Если $r > 1$, то все доказано. При $r < 1$ заменим каждый из кругов концентрическим с ним кругом, радиус которого на $\frac{1}{2}-\frac{r}{3}$ меньше. Полученная система кругов удовлетворяет условию.

347. Пусть A и B – наиболее удаленные из данных n точек. Два круга радиуса 1 с центрами в точках A и B содержат все данные точки.

348. Нет. Пусть на плоскости даны N точек, D – наибольшее, а d – наименьшее из расстояний между ними. Возьмем любую из данных точек и построим круг с центром в этой точке (рис.57). Все остальные точки окажутся внутри или на границе этого круга. Теперь рассмотрим круги радиусом $\frac{d}{2}$ с центрами во всех данных точках. Эти круги не перекрываются и их суммарная площадь равна $\frac{\pi N d^2}{4}$. С другой стороны, все эти круги целиком содержатся в круге радиусом $D+\frac{d}{2}$, поэтому их суммарная площадь меньше площади большого круга, т.е. $\frac{\pi N d^2}{4} < \pi\left(D+\frac{d}{2}\right)^2$. Следовательно, $\frac{d\sqrt{N}}{2} < D+\frac{d}{2}$, откуда $\frac{D}{d} > \frac{\sqrt{N}-1}{2}$. Однако при

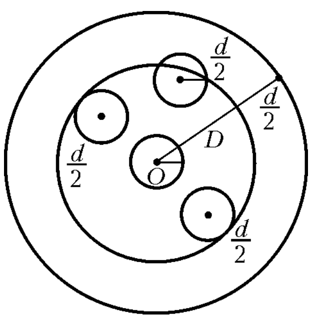

Рис. 57

$N = 225$, $D \le 21$ и $d \ge 3$ полученное неравенство не выполняется.

349. Суммарная площадь всех монет меньше площади стола. Если радиус каждой монеты увеличить вдвое, то монеты покроют все точки стола, отстоящие более чем на r от края, следовательно, суммарная площадь всех монет станет больше площади круга радиуса $R - r$. Поэтому

$$\frac{\pi(R-r)^2}{4} < \pi n r^2 \le \pi R^2, \text{ т.е. } \frac{R-r}{2r} < \sqrt{n} \le \frac{R}{r}.$$

350. 49500. Чтобы решить эту задачу, достаточно заметить две вещи: 1) можно сказать, что шарики не сталкиваются, а проскакивают друг сквозь друга без изменения скорости; 2) каждая пара шариков за один «цикл» (за 0.2 с) столкнется два раза.

351. Движение джентльменов периодично с периодом 12 мин: через каждые 12 мин любой из них находится в первоначальной точке на аллее и движется по ней в ту же сторону.

Намотаем ось времени на окружность длиной 12 мин, а эту окружность будем считать трехслойной. Первый слой состоит из двух дуг длиной в 6 мин, второй из 4 дуг по 3 мин каждая, третий слой – 6 дуг по 2 мин каждая. Дуги каждого слоя покрасим в два цвета, черный и белый (цвет определяется направлением движения данного джентльмена по аллее так, чтобы эти цвета в одном слое чередовались). Рассмотрим пересечение одноцветных дуг первого и второго слоев, получим по крайней мере две общие черные дуги α и β по 2 мин каждая и две белые дуги γ и δ, также по 2 мин. 6 дуг третьего слоя делятся на 3 черные и 3 центрально симметричные им белые дуги. Поэтому, если пересечение дуг α и β с тремя черными дугами составляет меньше 1 мин, то пересечение дуг γ и δ с белыми дугами составляет дугу, большую 1 мин. Что и требовалось.

352. Самое красивое решение этой задачи основано на выходе в трехмерное пространство. Направим ось времени вертикально вверх (выберем на ней начало отсчета и единицу измерения) и построим график движения для каждого пешехода: для каждой точки M дороги отметим на вертикальной прямой, проходящей через M, точку, показывающую, в какой момент времени пешеход проходит через точку M. Поскольку движение равномерное, графики будут прямыми. Моменту встречи пешеходов соответствует точка пересечения их графиков движения. Докажите, исходя из условий задачи, что все четыре графика лежат в одной плоскости. Отсюда будет следовать утверждение задачи.

353. Пусть A_1 – первый наблюдатель, A_2 – последний из всех наблюдателей, начавший следить за улиткой до того, как закончил наблюдать A_1, A_3 – последний из наблюдателей, приступивший к наблюдению до того, как за ней кончил следить A_2, и т.д. Нечетные промежутки, когда наблюдали $A_1, A_3, A_5, \ldots$, не пересекаются, также как четные промежутки, когда наблюдают A_2, A_4, A_6. Но любой из этих промежутков равен 1 мин, а весь интервал наблюдения составляет 6 мин. Поэтому как четных, так и нечетных промежутков не больше 10, и, значит, улитка проползла не более 10 м. Пример движения улитки, при котором она проползет ровно 10 м, постройте самостоятельно (улитка может и останавливаться!).

354. Через 18π с ≈ 57 с. Пусть B – точка, в которой находится самолет в момент запуска. Проверим, что ракета летит по окружности радиуса 5 км, для которой прямая AB является касательной. Пусть P – произвольная точка окружности, по которой летит самолет, M – точка пересечения отрезка PA с окружностью радиуса 5 км – предполагаемой траекторией ракеты. Тогда угол PAB измеряется половиной дуги MA, т.е. дуга PB вдвое меньше (в смысле количества градусов) дуги MA. Но радиус дуги PB вдвое больше радиуса дуги MA, так что по длине эти дуги равны. Поскольку скорости самолета и ракеты равны, то если ракета будет лететь по окружности радиуса 5 км, то она все время будет находиться на прямой, соединяющей самолет с точкой A, что мы и хотели проверить. Ракета догонит самолет, когда она пролетит половину окружности радиуса 5 км, т.е. через $\dfrac{5\pi}{1000} = \dfrac{\pi}{200}$ ч.

355. Если провести прямые, соединяющие гангстера с полицейскими в начальный момент, то все эти прямые пройдут через «двери» некоторых домиков (точки $D_0, D_1, D_{-1}, E_0, E_1, E_2, E_{-1}, E_{-2}$ и т.д., см. рис.58).

Пусть теперь полицейские поехали со скоростью v. Если гангстер начнет двигаться в обратном направлении со скоростью $u = \dfrac{v}{2}$, то прямая, соединяющая его с полицейским P_0, постоянно проходит через точку E_0, прямая, соединяющая его с полицейским P_1, постоянно проходит через точку E_1 и вообще каждая такая прямая как

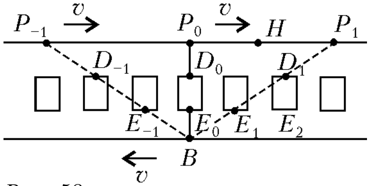

Рис. 58

бы вращается вокруг двери соответствующего домика. Значит, полицейские никогда не увидят гангстера. По тем же причинам гангстера не увидят, если он поедет со скоростью $u = 2v$ (помогают верхние двери домиков: точки D_0, D_1, D_2, D_{-1} и т. д. Интересно, что для того, чтобы гангстер мог скрыться, не нужно домиков – хватило бы и дверей!) Можно показать, что других решений у задачи нет. Ясно, что в ту же сторону, что и полицейские, гангстер двигаться не может. Действительно, полицейский P_0 при своем движении по отрезку P_0H просмотрит весь отрезок, и наверняка увидит гангстера, если тот будет двигаться направо.

Сложнее показать, что если гангстер будет двигаться навстречу полицейским со скоростью u, где $u \neq \frac{v}{2}$ и $u \neq 2v$, то они его увидят, Поскольку скорости полицейских и гангстера постоянны, можно считать, что прямые, соединяющие гангстера с полицейскими, вращаются каждая около некоторой точки. Эти точки лежат на некоторой прямой, параллельной дорогам, на расстоянии $9a\frac{u}{u+v}$ друг от друга. Постарайтесь доказать, что если число $\alpha = \frac{3u}{u+v}$ не целое, то одна из этих точек обязательно попадет в просвет между домами. (Это эквивалентно тому, что найдется целое n, для которого $\frac{1}{6} < n\alpha - [n\alpha] < \frac{5}{6}$, где $[n\alpha]$ – целая часть числа $n\alpha$.) Соответствующий полицейский увидит гангстера.

Итак, гангстер должен двигаться навстречу полицейским со скоростью $\frac{v}{2}$ или со скоростью $2v$.

356. Обозначим длину луча прожектора через a. Назовем круг радиуса a, просматриваемый прожектором, кругом обнаружения. Предположим, что катер может пробраться к острову незамеченным, и отметим тот момент, когда он входит в круг обнаружения. (Ясно, что катеру выгоднее всего войти в этот круг в такой точке A, через которую только что прошел луч прожектора.) За время $\frac{5\pi a}{2v}$ после этого момента катер не успеет дойти до острова: он будет где-то внутри круга радиуса $\frac{5\pi a v}{2v \cdot 8} = \frac{5\pi a}{16} < a$, заштрихованного на рис.59. За это время луч прожектора повернется на угол $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ радиан; таким образом, он

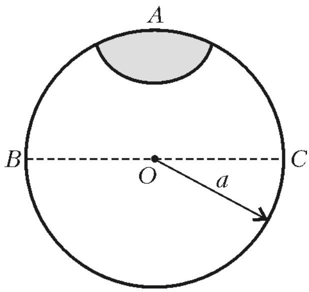

Рис. 59

просмотрит весь полукруг $OBAC$, т.е. просмотрит всю зону, где мог находится в это время катер.

357. Покажите, что корабль найдет жителя планеты, если он будет действовать следующим образом. Выберем на планете две диаметрально противоположные точки полюса и начертим на поверхности планеты спираль, которая начинается в одном из полюсов – «северном», заканчивается в другом и пересекает каждый меридиан в точках, отстоящих друг от друга на ε – малое положительное число. (Все расстояния на поверхности планеты измеряются по дугам больших кругов и выражаются в радианах, т.е. радиус планеты принят за единицу.)

Предлагается следующий план поиска: корабль летает на постоянном расстоянии $R = \sqrt{2}$ от центра планеты над проведенной спиралью, начиная с северного полюса, с максимальной скоростью.

358. Сможет. Пусть v – скорость, с которой плавает ученик. Тогда $4v$ – скорость бега учителя. Выбрав окружность достаточно малого радиуса, ученик может оказаться на прямой, проходящей через точку T, изображающую учителя, и через центр бассейна (рис.60). Если d – расстояние от ученика до края бассейна, то, двигаясь напрямую по радиусу, ученик доплывет до края бассейна за время $\dfrac{d}{v}$, а учитель добежит до точки Q за время $\dfrac{\pi R}{4v}$, где R – радиус бассейна. Для того чтобы ученик мог сбежать, нужно, чтобы было $\dfrac{d}{v} < \dfrac{\pi R}{4v}$, т.е. $d < \dfrac{\pi}{4} R$. Если, например, ученик будет сначала плыть по окружности радиуса $\rho = R - \dfrac{0,1}{4} R = 0,9\dfrac{R}{4}$, его угловая скорость будет больше, чем у учителя, и он сможет занять позицию, показанную на рисунке, а затем, проплыв расстояние $d = \dfrac{3,1}{4}$, достичь края бассейна до того, как туда прибежит учитель.

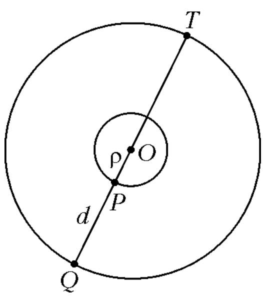

Рис. 60

359. Назовем длиной пути число отрезков, из которых он состоит. Пусть n – длина кратчайшего пути от перекрестка A до перекрестка B. Докажем утверждения задачи индукцией по n. При $n = 1$ кроме кратчайшего пути AB существует путь, идущий из A в перекресток $C \neq A$, удаленный от B на 1 и не проходящий через B. Пусть $n > 1$, D – ближайший к A перекресток на кратчайшем пути от A к B. По предположению индукции, существуют 2 непересекающихся пути p и q из D в B. Будем идти из A по пути l, не проходящему через D. Если этот путь не пересекается с путями p и q, то все доказано. Если же он впервые пересекает, скажем, путь p, то дальше следует идти по p прямо в B. Полученный путь не пересекается с q.

360. При проделываемых операциях периметр многоугольника не меняется, а площадь каждый раз увеличивается на величину не меньшую, чем самая маленькая площадь, которую может иметь треугольник, две стороны которого равны сторонам данного многоугольника, а угол между ними равен одному из углов между прямыми, на которых лежат стороны и диагонали многоугольника.

Глава 4. Геометрические задачи

361. Проведите окружность с центром вершине данного угла (рис.61) и затем последовательно отложите против часовой стрелки равные дуги $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{18}A_{19}$. Поскольку $19 \cdot 19 = 361$, $\angle A_0AA_{19} = 1°$.

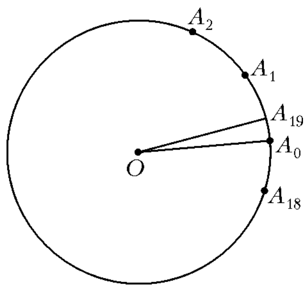

Рис. 61

362. Достаточно построить угол $\frac{\pi}{21}$. Поскольку $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{21}$, построим угол $\frac{\pi}{3}$ и удвоим данный угол. Разность построенных углов и даст угол, равный $\frac{\pi}{21}$.

Замечание. Сходным способом можно разделить на 3 равные части любой угол $\frac{\pi}{2n+1}$, n – натуральное, где $2n + 1$ не делится на 3. Задача же о делении на 3 равные части угла $\frac{\pi}{3}$ циркулем и линейкой неразрешима.

363. Пусть A_1 и B_1 – данные точки (рис.62). Эти точки

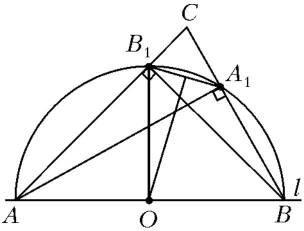

Рис. 62

лежат на окружности, построенной на основании треугольника как на диаметре. Центр этой окружности (а вместе с ним и основание AB треугольника) находится как точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку A_1B_1 и данной прямой l. Осталось провести прямые AB_1 и BA_1 и найти их точку пересечения.

364. Пусть даны точки A (вершина), H – ортоцентр, A_1 – середина противоположной стороны (см. рис.63). Высота треугольника, опущенная из вершины A, лежит на прямой AH, центр O описанной около него окружности – на прямой l, походящей через точку A_1 и параллельной прямой AH. Сторона BC лежит на прямой m, перпендикулярной l и проведенной через точку A_1.

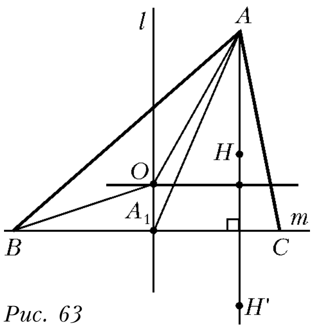

Рис. 63

Заметим еще, что *точка* H', *симметричная ортоцентру* H (*треугольника* ABC) *относительно прямой* BC, *лежит на описанной около этого треугольника окружности.* (Докажите это важное и само по себе утверждение.)

Из всего сказанного следует, что построение треугольника можно осуществить так: 1) строим прямые AH, l и m; 2) находим центр O описанной окружности как точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AH_1 и прямой l; 3) строим окружность радиусом AO с центром в точке O. Она пересекает прямую m в вершинах B и C треугольника ABC.

365. По указанным данным легко находится вершина треугольника, лежащая вне данной прямой, и середина основания треугольника, после чего задача сводится к задаче 4. Выясните, сколько решений имеет данная задача.

366. Заметим, что если дополнить наш треугольник ABC (медиана AO известна) до параллелограмма $ABCD$, то в треугольнике ABD высоты из A и D равны данным (из B и C), а $AD = 2AO$. Осталось построить треугольник ABD по основанию и высотам из вершин A и D.

367. Докажите сначала, что высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Если даны основания высот B_1, C_1 и прямая l, на которой лежит высота AA_1, то для построения треугольника ABC нужно построить точку A_1 как точку пересечения прямой $B_1C_1^*$, где C_1^* – точка, симметричная точке C_1 относительно прямой l, с прямой l (рис.64). Вершины B и C находятся как точки пересечения биссектрис углов $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$ с перпендикуляром к l в точке A_1, а точка A – это точка пересечения прямой BC_1 с прямой l.

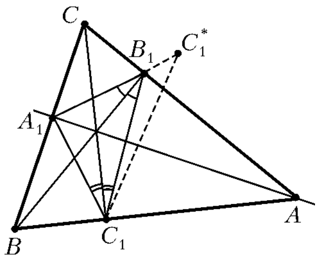

Рис. 64

368. Учтите, что медиана, проведенная из прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы, и постройте точку пересечения медиан.

369. По отрезку OK восстанавливается прямая, на которой лежит нижнее основание. Далее легко находится прямая, на которой лежит верхнее основание. *Точка X пересечения боковых сторон лежит на прямой, проходящей через точку O и середину отрезка EF; кроме того, отношение ее расстояний до оснований трапеции такое же, как и у точки O* (докажите это утверждение, а затем завершите построение).

370. Если $S_{AQX} = \frac{1}{2} S_{PQR}$ (рис.65), то $QX \cdot AQ = \frac{1}{2} PQ \cdot QR$, т.е. $\frac{QX}{QR} = \frac{PQ}{2AQ}$.

371. а) Постройте точку A_1 –

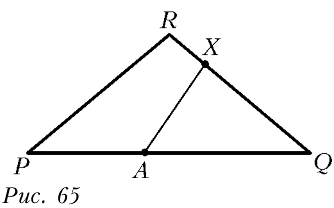

Рис. 65

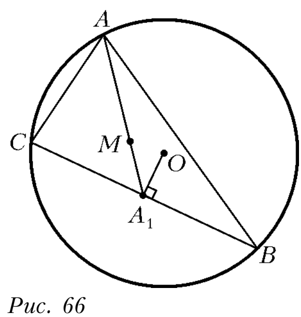

Рис. 66

основание медианы, проведенной из вершины A (рис.66). Перпендикуляр к OA_1 (O – центр окружности) пересекает окружность в остальных вершинах треугольника ABC.

б) Докажите, что если биссектриса угла A пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке A' (рис.67), то $A'C = AM$ (M – точка пересечения биссектрис треугольника ABC). После этого задача легко решается.

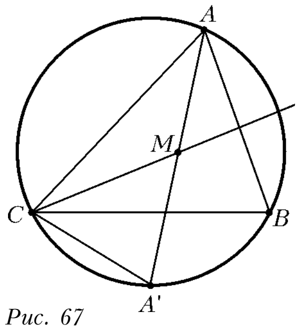

Рис. 67

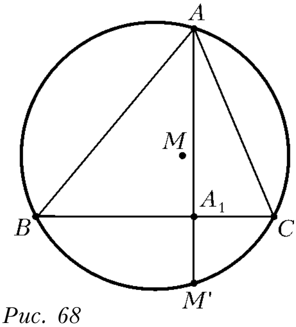

Рис. 68

в) Пусть M' – точка пересечения AM с окружностью, A_1 – середина отрезка MM'. Перпендикуляр к MM' в точке A_1 пересекает окружность в вершинах B и C треугольника (рис.68).

372. По известной формуле $CC_1 = l_c = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{\gamma}{2}$ (см.рис.69),

$$BK = 2a\cos\frac{\gamma}{2} = l_c\left(\frac{h_b}{h_a}+1\right).$$

Строим отрезок BK, а затем прямоугольный треугольник BB_1K. Срединный перпендикуляр к отрезку BK пересекает B_1K в точке C.

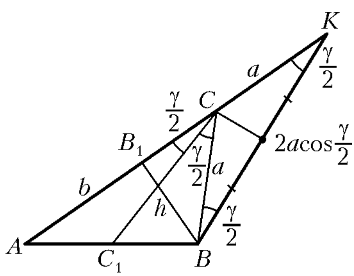

Рис. 69

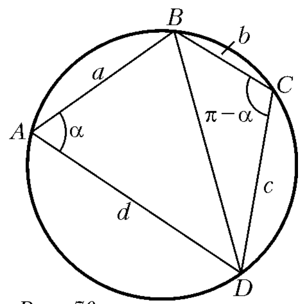

Рис. 70

373. Пусть a, b, c, d – последовательные стороны вписанного четырехугольника, а $\angle A = \alpha$ (рис.70). По теореме косинусов

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$