Пусть k-й ход – последний, в результате которого сумма меняет знак (включая ходы, перед которыми она равна нулю). За первые $k - 1$ ходов будут заведомо использованы числа 20, 19, 18, …, $20 - (k - 1)$. Так что максимальная по модулю сумма будет после k-го хода не больше, чем $20 - (k-1) + 20 - k = 41 \cdot 2k$.

За каждый из оставшихся $10 - k$ ходов сумма уменьшается по крайней мере на 1, так как первый каждый раз вычитает из модуля суммы *наибольшее* из оставшихся чисел m, а второй не может добавить к нему *больше* $m - 1$. В результате сумма будет не больше, чем $41 \cdot 2k - (10 - k) = 31 - k \le 30$.

306. Пусть карточки выложены в ряд так, как требуется в условии задачи. Занумеруем их слева по порядку. Две карточки, на которых написан нуль, занимают четное и нечетное места, т.е. сумма номеров их мест нечетна. Карточки, на которых написана единица, занимают или обе четные места, или обе – нечетные места, т.е. сумма номеров их мест четна. Наконец, сумма номеров мест, которые занимают карточки с девятками, четна. Таким образом, получается, что сумма номеров мест всех карточек нечетна. На самом деле эта сумма равна 1 +2 + 3 + … + 20 = 210.

307. а) Обходя окружность, подсчитаем, сколько раз мы меняем знак с + на – (и с – на +). Пусть это число d. Докажите, что $p = a + d$, $q = b + d$.

б) Непосредственно следует из пункта а). Можно рассуждать и так: из того, что $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_mx_1 = 0$, следует, что количество +1 в этой сумме равно количеству –1. Однако, так как $(x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_mx_1) = x_1^2x_2^2\ldots x_m^2 = 1$, количество –1 (а также и количество +1) в выписанной сумме четно, так что m равно удвоенному четному числу.

308. 6210001000. Вы, по-видимому, без особого труда нашли это число. Попробуйте найти короткое и изящное доказательство его единственности.

309. Если a^m – самое большое из чисел, лежащих в одном из карманов, то сумма чисел из другого кармана не больше, чем $1 + a + \ldots + a^{m-1} < a^m$.

310. У каждого пассажира осталась по крайней мере одна монета сдачи, и по крайней мере n монет опущено в кассу. Нетрудно придумать пример такого обмена, когда четыре пассажира опускают в кассу 20-копеечную монету, причем каждый платит ровно 5 копеек и получает ровно одну монету сдачи

311. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{50}$. В сумме, указанной в условии задачи, освободимся от знаков абсолютной величины.

Получаем:

$$\pm\left(a_1-a_2\right)\pm\left(a_2-a_3\right)\pm\ldots\pm\left(a_{50}-a_1\right).$$

Если раскрыть круглые скобки, то в полученной алгебраической сумме 50 слагаемых будут стоять со знаком плюс и 50 – со знаком минус. Эта сумма, очевидно, не больше, чем

$$2a_{50}+2a_{49}+\ldots+2a_{26}-2a_{25}-\ldots-2a_1.$$

Для того чтобы получить наибольшую возможную сумму, достаточно расположить числа в следующем порядке: $a_{50}, a_1, a_{49}, a_2, \ldots, a_{26}, a_{25}$.

312. Воспользуемся индукцией по числу машин.

Нетрудно доказать, что найдется по крайней мере одна машина, которая может доехать до следующей (по часовой стрелке). Выльем весь бензин из второй машины в первую и вторую машину уберем с дороги. Среди оставшихся $n-1$ машин, по предположению индукции, найдется такая, которая может проехать всю дорогу, забирая по пути бензин у остальных. Нетрудно проверить, что эта же машина годится и для первоначальной задачи, когда на дороге стоит n машин.

313. Можно доказывать по индукции по n.

Отметим те числа, перед которыми нет больших. Они расположены в порядке возрастания, так что если таких чисел не менее $n+1$, то все ясно. Отметим далее те числа, за которыми нет больших. Они расположены в порядке убывания. Если всех отмеченных чисел не больше $2n-1$, то остальных чисел – по крайней мере $(n-1)^2+1$, и по предположению индукции из них можно выбрать возрастающую или убывающую цепочку из $n-1$ чисел. Нетрудно доказать, что к ней всегда можно добавить одно из отмеченных чисел.

314. Индукция по числу кружков. Выберем наименьшее m, для которого существует m кружков таких, что имеется ровно m ребят, занимающихся в этих кружках. Рассмотрим один из этих m кружков (если таких m вообще не существует, можно взять произвольный кружок). Назовем любого из его участников старостой. Докажите, что если этот кружок разогнать, а старост выгнать из школы, то для оставшихся кружков все условия задачи будут выполнены.

> Утверждение задачи 314 представляет собой одну из наиболее важных теорем «комбинаторного анализа» – ее называют «теорема Холла», или «теорема о различных представителях».

315. а) Внутри прямоугольника $m \times n$ расположено $(m-1)(n-1)$ узлов, на его сторонах – $(2m+2n)$ узлов.

$(m-1)(n-1)+\dfrac{2(m+n)}{2}-1=mn$ – площади прямоугольника.

б) Пусть r – число узлов внутри трапеции, j_1 – число узлов на ее наклонной стороне, j_2 – число узлов на остальных сторонах и в вершинах. Из двух одинаковых трапеций можно составить прямоугольник, приложив их наклонными сторонами друг к другу (рис.45). Площадь этого прямоугольника в соответствии с а) равна $2r+j_2+\dfrac{2j_1-2}{2}-1$. Площадь одной трапеции в 2 раза меньше: $r+\dfrac{j_1+j_2}{2}-1$.

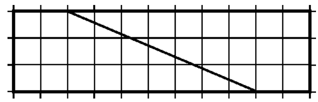

Рис. 45

в) Проведем вертикальную прямую в стороне от многоугольника (рис.46) и от каждой его вершины проведем горизонтальный отрезок до этой прямой. Площадь многоугольника равна разности между площадью трапеций, наклонные стороны которых не видны с вертикальной прямой, и площадью трапеций, наклонные стороны которых видны с вертикальной прямой. Площадь каждой трапеции определяем согласно б). Остается проверить, что при этом каждый узел внутри многоугольника и на границе считается требуемое число раз.

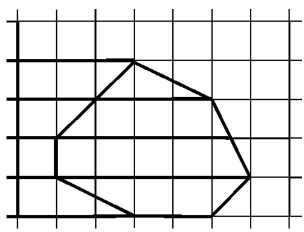

Рис. 46

Доказанная важная формула называется формулой Пика. Она верна и для невыпуклых многоугольников. Попробуйте это доказать, воспользовавшись тем, что произвольный многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники, проводя разрезы по диагоналям.

316. $m+n-d$, где $d = \text{НОД}(m,n)$.

317. Предположим, что можно обойти доску $4 \times n$ конем так, как указано в задаче. Разрежем доску на отдельные поля и расположим эти $4n$ полей на окружности в том порядке, как их обходил конь; черные и белые поля чередуются. Где будут расположены $2n$ полей, стоявшие в двух крайних рядах доски $4 \times n$? Никакие два из них не стоят рядом, так как с крайних полей конь всегда ходит на средние. Значит, они стоят через одно. Но тогда все они должны иметь одинаковый цвет.

318. Если x и y − целые неотрицательные числа, причем $x + y = k > 0$, то числа $\frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = \frac{k^2+k}{2} + x$ при изменении y от k до 0 пробегают отрезок натурального ряда от числа $\frac{k^2+k}{2}$ до числа $\frac{k^2+3k}{2}$. Если же $x + y = k + 1$, соответствующий отрезок натурального ряда состоит из всех чисел от $\frac{k^2+3k}{2} + 1$ до $\frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2} + k + 1$, т.е. является продолжением предыдущего отрезка.

319. 20 поворотов. Если по каждой из 10 улиц одного из параллельных направлений проходит часть маршрута, то на каждой из этих улиц есть по крайней мере два поворота. В противном случае найдется такая улица, которую маршрут пересекает на всех десяти перекрестках, т.е. на каждой из 10 перпендикулярных ей улиц расположена часть маршрута.

320. mn. В волейбольной сетке из $m \times n$ ячеек имеется $n(m+1) + m(n+1) = 2mn + m + n$ веревочек, соединяющих соседние узлы, и $(m+1)(n+1)$ узлов. Если мы разрезали несколько веревочек с выполнением условия задачи, из каждого узла A можно пройти в любой другой узел B по единственному пути. (Если таких путей два, то существуют два узла C и D такие, что из C в D ведут два непересекающиеся пути, см. рис.47. Любую из веревочек одного из них можно перерезать и тогда все равно испорченная сетка будет состоять из одного куска.) Но тогда число перерезанных веревочек будет в точности равно $(m+1)(n+1) - 1 = mn + m + n$. А так как общее количество веревочек равно $2mn + m + n$, можно разрезать не больше mn веревочек.

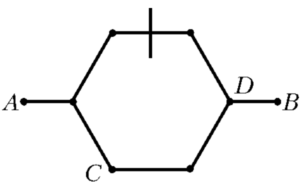

Рис. 47

Пример такого разрезания строится без труда (см. рис.48, на котором в сетке 4×7 показаны штрихами разрезаемые веревочки).

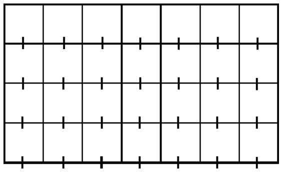
Рис. 48

321. Введите систему координат, приняв какие-либо две взаимно перпендикулярные линии клетчатой бумаги за оси координат, а ширину клетки за 1. Пусть x_i и y_i – проекции n-звенной ломаной линии на оси координат (с учетом знака). Тогда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \ ,$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + x_n = 0 \ ,$$

$$x_i^2 + y_i^2 = c \ ,$$

где c – некоторое натуральное число. При делении на 4 число c может давать остатки 0, 1 и 2. Рассмотрим отдельно эти случаи. Если c делится на 4, то оба числа x_i и y_i – четные ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) и мы вместо данной ломаной можем рассмотреть ломаную с проекциями $x_i' = \dfrac{x_i}{2}, y_i' = \dfrac{y_i}{2}$, так что в этом случае задача сводится к ситуации, когда одно из двух чисел x_i и y_i нечетное (если $c \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$) или оба числа x_i и y_i нечетные (если $c \equiv 2 (\operatorname{mod} 4)$).

В обоих случаях, если n нечетно, либо среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, либо среди чисел $y_1, \ldots, y_n$ окажется нечетное количество нечетных чисел, так что соответствующая сумма не будет равна 0.

322. Занумеруем отрезки, по которым полз жук, по порядку. Одно из трех направлений отрезков сети назовем горизонтальным. Докажем, что все номера горизонтальных отрезков имеют одинаковую четность. Пусть a и b – два соседних горизонтальных отрезка на кратчайшем пути, в том смысле, что путь между a и b состоит из отрезков двух других направлений. Ситуация, когда жук пересекает некоторую полосу шестиугольников в двух направлениях (сначала «туда», а потом «обратно»), невозможна, так как в этом случае путь можно было бы сократить (соединив точки P и Q пунктирной линией, см. рис.49). Отсюда следует, что число промежуточных отрезков между a и b нечетно и что по этим отрезкам жук полз в одном направлении. Поэтому все вообще горизонтальные отрезки пути жука имеют номера одной четности и жук ползет по ним в одном направлении. Это относится и к отрезкам двух других направлений. Поскольку направлений всего три, то либо все отрезки с четными номерами, либо все отрезки с нечетными номерами имеют одинаковое направление. Таких отрезков ровно 50.

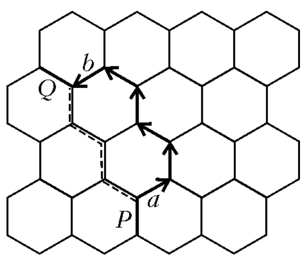

Рис. 49

323. Возьмем любую белую точку A и проведем окружность радиусом 1966 с центром в точке A. Если все точки окружности черные, то все ясно (есть и отрезок с разноцветными концами, и отрезок с одноцветными концами). Также все ясно, если на окружности есть точки разного цвета. Если все точки окружности белые, возьмем какую-нибудь черную точку B и соединим ее с точкой A равнозвенной ломаной, устроенной так, как показано на рисунке 50. Одно из звеньев ломаной заведомо имеет разноцветные концы.

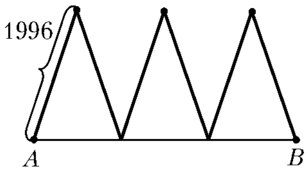

Рис. 50

324. 2. Только 3 прямых, из которых 2 параллельны, а третья их пересекает, имеют 2 точки попарных пересечений.

325. 4 км/ч. Сумма периметров всех кварталов равна удвоенной длине всех улиц плюс длина шоссе.

326. Можно последовательно получать нужные разбиения для любого $n \geq 5$, прикладывая новые прямоугольники «по спирали», как показано на рис.51.

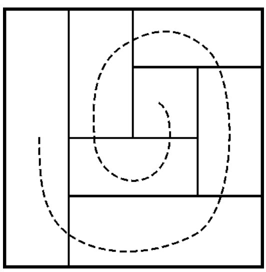

Рис. 51

327. Предположим, что такое расположение 7 точек и 7 прямых существует. Будем называть эти прямые и точки «отмеченными».

Прежде всего докажем, что каждые две отмеченные точки лежат на одной из отмеченных прямых. Действительно, если A – одна из отмеченных точек, то через нее проходит три отмеченные прямые, и остальные шесть отмеченных точек разбиваются на три пары: каждая пара лежит на одной из трех прямых.

Точно так же доказывается, что каждые две отмеченные прямые пересекаются в отмеченной точке: если a – одна из прямых, то на ней лежат три отмеченные точки и через каждую из них проходит пара отмеченных прямых, не считая a. Теперь построим «выпуклую оболочку» семи отмеченных точек, – наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти точки; ясно, что его вершинами будут некоторые из отмеченных точек, и, следовательно, каждая его сторона лежит на одной из отмеченных прямых. Поэтому на каждой стороне должна лежать кроме вершин еще одна отмеченная точка. Отсюда сразу следует, что число сторон не может быть больше трех.

Если же построенный многоугольник – треугольник ABC, и отмеченные точки, лежащие на его сторонах, – E и F, то прямая EF пересекает прямую AC вне треугольника ABC, хотя она должна, по доказанному выше, пересекать ее в отмеченной точке. Полученное противоречие доказывает, что расположить 7 прямых и 7 точек требуемым образом нельзя.

Замечание. Понятия выпуклой фигуры и выпуклой оболочки часто помогают в решении разных задач про расположение точек и фигур на плоскости. Приведем точные определения.

Фигура (т.е. множество точек на плоскости или в пространстве) называется выпуклой, если вместе с каждыми двумя точками A и B она содержит и весь отрезок AB (рис.52).

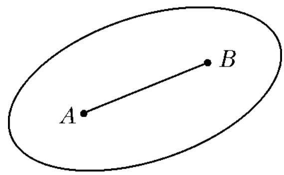

Рис. 52

Выпуклой оболочкой какого-то множества точек называется наименьшая выпуклая фигура, содержащая это множество точек.

Выпуклую оболочку множества M на плоскости можно получить как общую часть всех полуплоскостей, содержащих множество M.

Наглядно можно представить себе выпуклую оболочку так: вобьем во все точки множества M гвозди и натянем на все эти гвозди замкнутую резинку. Фигура, ограниченная этой резинкой, и будет выпуклой оболочкой множества M.

Если M – конечное множество или многоугольник, то выпуклая оболочка M будет, очевидно, многоугольником.

328. Поскольку в каждой вершине куба сходятся три ребра, к каждой вершине должен был бы примыкать конец проволоки. Но концов всего два, а вершин у куба – восемь.

329. Турист может идти от кафе по произвольному маршруту с единственным условием: придя на перекресток (на площадь), он должен выбирать следующую улицу среди тех, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажем, что хотя бы одна такая улица всегда найдется.

Пусть турист пришел на какую-то площадь, кроме вокзальной. Предположим, что до этого турист выходил на эту площадь – и, следовательно, уходил с нее – k раз. Тогда на эту площадь ведет в общей сложности $2k + 1$ «след» туриста. Поэтому среди улиц, выходящих на площадь, хотя бы по одной турист шел нечетное число раз.

Осталось заметить, что маршрут, удовлетворяющий указанному нами условию, не может проходить два раза по одной и той

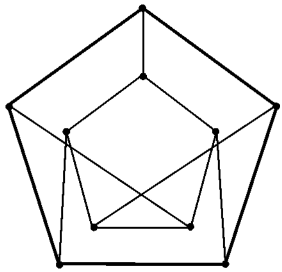

Рис. 53

же улице: после того, как турист прошел по какой-то улице, возвращаясь из кафе на вокзал, эта улица относится уже к тем, по которым он шел четное число раз, и больше попасть на нее турист не может. Поскольку число улиц конечно, через некоторое время турист придет на вокзал.

330. 10 городов. Из любого города A можно добраться не более чем до трех городов, а из каждого из них не более чем до двух (не считая A). Таким образом, всего городов не более, чем $1+3+3\cdot 2=10$.

Пример на рис.53 показывает, что нужная система авиалиний в государстве с десятью городами существует.

Замечание. Граф на рис.53 имеет специальное название «граф Петерсена» и часто используется в теории графов в качестве примера.

331. n окружностей – на $n(n-1)+2$ части. Индукция: n + 1-я окружность делится предыдущими максимум на $2n$ дуг, и каждая из этих дуг делит имевшуюся до этого часть плоскости на две, т.е. прибавляет одну новую часть плоскости. Чтобы получить пример того случая, когда каждая окружность делится предыдущими на максимально возможное число дуг, достаточно проводить каждую окружность так, чтобы она пересекала часть плоскости, лежащую внутри всех предыдущих, а также пересекала часть плоскости, лежащую вне всех предыдущих.

332. Для призмы при четном n – две, при нечетном n – три. Для пирамиды при четном n – три, при нечетном n – четыре. Нужно построить соответствующие примеры и в каждом случае показать, что меньшим числом букв обойтись нельзя.

333. Докажите, что сумма номеров сторон при такой расстановке должна для каждого треугольника равняться $\frac{3(n+1)}{2}$. Отсюда следует, что при четном n такая расстановка невозможна. При нечетном: если приписать отрезку, выходящему из общей вершины 1-го и 2-го ребра, номер n и далее нумеровать отрезки через один в порядке убывания, то сумма номеров сторон у всех треугольников будет одна и та же.

334. К каждому многоугольнику, у которого A не вершина, можно ее добавить и получить многоугольник с вершиной A_1.

335. Концы всех дуг, покрывающих окружность, делят ее на несколько частей. Если какую-то часть окружности покрывают три или больше дуг, то выберем из этих дуг две, которые простираются дальше всего по и против часовой стрелки (это может быть даже одна дуга), а все остальные выбросим. После нескольких таких операций мы добьемся того, что все части окружности будут покрыты не более чем двумя дугами.

336. Введем прямоугольную систему координат xOy так, чтобы ни один из данных векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ не лежал на осях координат. Пусть $\overline{a}_i = (x_i, y_i)$. Тогда $|\overline{a}_n| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \le |x_i| + |y_i|$. По условию $4 = \left|\sum_{i=1}^{n} |\overline{a}_i|\right| \le \sum_{i=1}^{n} |\overline{a}_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$. Отсюда следует, что сумма длин проекций векторов на один из лучей, лежащих на координатных осях, не меньше 1. Но тогда длина суммы векторов, лежащих в соответствующих квадратах, будет больше 1.

337. а) Пусть k − количество точек пересечения звеньев. Всего звеньев окажется $2k$. На рис.54,*а*,*б* показаны такие ломаные для $n = 6$ и $n = 8$. Разглядывая эти рисунки, можно

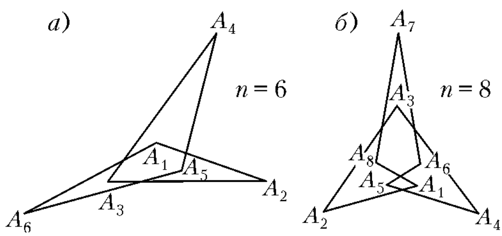

Рис. 54

понять, как построить требуемую ломаную для любого $n = 2k$, $k \ge 5$.

б) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ − вершины правильного $2n - 1$ угольника. Ломаная $A_1A_3A_5 \ldots A_{2n-2}A_1$ удовлетворяет условию.

338. Двигаясь по полуокружности длиной $\sqrt{2\pi S}$, мы наверняка выйдем из леса, так как площадь полукруга соответствующего радиуса в точности равна S.

339. Треугольников 3932, разрезов 5893. Пусть получилось n треугольников. Сумма их углов равна $2\pi + 1965 \cdot 2\pi = n\pi$, т.е. $n = 3932$.

340. а) Нет. Рассмотрим точку A, для которой минимальное из расстояний до других точек максимально. Все прочие точки

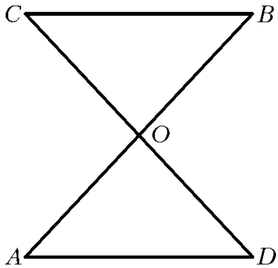

Рис. 55

лежат вне круга радиуса d с центром в точке A. Если бы какая-то из этих точек была соединена с A, то для нее минимальное расстояние до ближайшей к ней точки A оказалось бы больше d, что противоречит определению точки A.

б) Нет. Пусть точка B – ближайшая к точке A, D – ближайшая точка к точке C, а отрезки AB и CD пересекаются (рис.55). Тогда $AD > AB$, $BC > CD$ и $AD + BC > AB + CD$, что невозможно, ибо $AD \le AO + OD$, $BC \le CO + OB$ и $AD + BC \le AB + CD$ (см. также задачу 385).

341. Возьмем две ближайшие друг к другу планеты. Ясно, что астрономы на этих планетах смотрят друг на друга.

Остается еще $n - 2$ планеты и $n - 2$ астронома. Если хотя бы один из них смотрит на уже выбранную планету, то на одну из $n - 2$ планет не хватит астрономов. Если же на эти две планеты никто больше не смотрит, то снова применяем уже проведенное рассуждение. Поскольку n нечетно, в конце концов останется одна планета, на которую никто не смотрит.

342. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть его вершины – это k из данных точек. Остальные $102 - k$ точек лежат внутри этого k-угольника.

Будем соединять точки друг с другом непересекающимися отрезками до тех пор, пока это возможно. В результате k-угольник (сравните с задачей 99) окажется разбит на треугольники так, что всякие два треугольника разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общую сторону (такое разбиение называется триангуляцией). Подсчитаем, сколько треугольников получилось. Пусть n – их количество. Тогда, с одной стороны, сумма углов всех треугольников равна $n\pi$, а с другой – равна сумме углов k-угольника, т.е. $\pi(k-2)$, плюс сумма всех углов с вершинами внутри k-угольники, т.е. $2\pi(102-k)$. Таким образом, $\pi n = \pi(k-2) + 2\pi(102-k)$, откуда $n = 202 - k \ge 100$. Площадь k-угольника меньше 1. Поэтому найдется треугольник с площадью меньшей 0,01.

343. Можно. Приведем одно из возможных расположений точек. Разделим квадрат горизонтальным отрезком пополам и поместим на этом отрезке 200 точек, которые разделят его на 201 кусок длины $\frac{1}{201}$. Тогда, очевидно, любой прямоугольник со