Очевидно, что сумма чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ минус сумма остатков делится на $2n$. Но $x_1 + \ldots + x_{2n} = 2 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2}$ и разность

$$2 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(2n-1)}{2} = 2n\left(n + \frac{3}{2}\right)$$

не делится нацело на $2n$. Противоречие.

280. Из условия задачи видно, что если первый слой в башне задан, то по нему единственным образом строится второй слой, по первому и второму слою однозначно строится третий и т. д. Так можно построить бесконечную башню, удовлетворяющую условиям задачи. Постараемся обрезать эту бесконечную башню так, чтобы условия соседства были выполнены во всех слоях, в том числе и в верхнем.

Рассмотрим всевозможные пары соседних слоев. Так как число таких пар конечно, то в бесконечной башне встретятся две одинаковые пары слоев. Но если два этажа башни соответственно совпадают с двумя другими этажами, то этажи под ними тоже соответственно совпадут. Пусть k-й этаж совпадает с l-м, а $k + 1$-й с $l + 1$-м. Тогда совпадают $k - 1$-й этаж с $l - 1$-м, $k - 2$-й с $l - 2$-м, и т. д. Обозначим $|l - k|$ через n. Тогда, очевидно, $n + 2$-й этаж будет совпадать со 2-м, а $n + 1$-й с 1-м. Теперь заметим, что если по первым двум этажам по общему правилу соседства построить нулевой этаж, этот нулевой этаж будет совпадать с первым. Таким образом, $n + 1$-й и n-й этажи оба совпадают с первым этажом. Отсюда следует, что n-й этаж можно считать верхним, – если обрезать на нем башню, то все условия будут выполнены.

281. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – всевозможные простые множители данных чисел. Докажем, что можно выбрать такой отрезок в данном ряду чисел, в котором каждое из p_k встречается множителем четное число раз. Только в этом случае произведение всех чисел в этом отрезке будет полным квадратом.

Выпишем слева от ряда данных чисел столбиком числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и под каждой запятой, отделяющей одно из данных чисел от другого, будем против числа p_k писать 0, если оно встречается до этой запятой четное число раз в качестве множителя данных чисел, и 1, если оно встречается нечетное число раз. Напишем такой столбец также перед первым числом в нашем ряду (он будет состоять из одних нулей), а также в самом конце, после последнего числа. Например, полученная таблица из нулей и единиц может выглядеть так (см. табл. 4).

Таблица 4

	20 ,	14 ,	35 ,	5 ,	28 ,	70 ,	140 ,	7 ,	
$p_1 = 2$	0	0	1	1	1	1	0	0	0
$p_2 = 5$	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$p_3 = 7$	0	0	1	0	0	1	0	0	0

Всего существует 2^n различных столбцов из единиц и нулей, поэтому среди $2^n + 1$ столбца в нашей таблице встретятся два одинаковых. Очевидно, что в соответствующем отрезке ряда данных чисел каждое p_k встречается четное число раз.

282. Если разностей, равных единице, не больше трех, разностей, равных 2, не больше 3, и т. д., то

$$(a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1 \geq$$
$$\geq 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + 3 \cdot 6 + 7 + 1 = 71.$$

Принцип Дирихле здесь не нужен.

283. Пусть m – число цифр у наибольшего из чисел. К каждому из наших чисел, у которого $n < m$ цифр, допишем всеми возможными способами еще $m - n$ цифр: тогда вместо одного n-значного числа у нас будет 10^{n-m} m-значных чисел. Нетрудно видеть, что все полученные числа различны, откуда

$$10^{m-1}k_1 + 10^{m-2}k_2 + \ldots < 9 \cdot 10^{m-1}.$$

284. Вместе с каждым из k марсианских слов длины n рассмотрим все возможные слова, которые отличаются от него только одной буквой (в одном месте). Полученные k групп по n + 1 слову в каждой не пересекаются (т.е. каждое слово может содержаться только в одной группе), поэтому $k(n+1) < 2^n$.

285. 2^{n-2}. Докажите, что в результате может получиться любая дробь, у которой x_1 состоит в числителе, а x_2 – в знаменателе. Это можно доказать по индукции.

Если в некоторое выражение $(x_1 : \ldots : x_n)$ вместо x_n подставить $(x_n : x_{n+1})$ то в окончательном результате x_{n+1} будет стоять в числителе, если x_n стояло в знаменателе, и наоборот. Если в выражение $(x_1 : \ldots : (P : x_n))$, где P – некоторая скобка или просто буква x_{n-1} – подставить вместо $(P : x_n)$ скобку $((P : x_n) : x_{n+1})$, то x_{n+1} будет стоять там же, где x_n. Индукцию нужно начинать с $n = 3$.

286. Существует $2^{k+1} - 2$ различные последовательности точек и тире длины не более чем k. Если $k \leq \log_2 n - 1$, то $2^{k+1} - 2 \leq n - 2 < n$.

287. а) Четырьмя взвешиваниями. Доказательство того, что нельзя выделить фальшивую монету меньшим числом взвешиваний, основано на следующем соображении: пусть после какого-то взвешивания осталось m подозрительных монет. Следующее взвешивание может дать один из трех результатов: правая чашка тяжелее, левая чашка тяжелее, равновесие; пусть количество монет, остающихся подозрительными после каждого из этих результатов, равно соответственно m_1, m_2, m_3. Поскольку $m_1 + m_2 + m_3 \geq m$, одно из чисел m_1, m_2, m_3 не менее $\frac{m}{3}$. Таким образом, за k взвешиваний число подозрительных монет может уменьшиться не более чем в 3^k раз.

Взвешивание монет можно производить так: сравнить две группы по 27 – тогда число подозрительных монет уменьшится до 27 (или до 26), затем сравнить две группы по 9 из числа подозрительных, и т.д.

б) Наименьшее целое число, большее или равное $\log_3 n$.

288. Составляя план взвешиваний, полезно помнить, что k взвешиваниями можно выбрать один вариант не более чем из 2^k вариантов. Один из возможных порядков взвешивания: возьмем две какие-либо пары грузиков: (1, 2) и (3, 4). Пусть $1 < 2$, $3 < 4$ и $1 < 3$ (знак $<$ означает, что левый груз легче). Если теперь выписать 15 вариантов расположения гирь 1, 2, 3, 4, 5, удовлетворяющих этим условиям: например,

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5$$

$$1 < 3 < 2 < 4 < 5$$

$$1 < 2 < 5 < 3 < 4 \text{ и т. д.,}$$

то нетрудно проверить, что разбить эти варианты на две группы из 7 и 8 вариантов можно только сравнив гири 3 и 5. Дальше нужно разбивать варианты на группы аналогичным образом.

289. Например, набор гирь с массами 26, 25, 24, 22, 19 и 11 удовлетворяет условию. Докажем, что из любого набора, состоящего из 7 гирь, можно выбрать две группы гирь, имеющие равные массы. Если набор содержит гири 26, 25, 24 и 23, то все ясно (26 + 23 = 24 + 25). Если четверки максимальных гирь в данном наборе нет, то суммарная масса любых четырех (и любого меньшего количества) гирь в этом наборе *меньше* 98. Но всего существует 98 наборов, содержащих одну, две, три и 4 гири ($C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 = 98$). Поэтому массы по крайне мере двух из таких наборов будут совпадать.

Замечание. Решениям следующих двух задач предпошлем несколько замечаний. Прежде всего, если из 2^n шаров радиоактивен один, то выделить его можно за n испытаний, причем меньшего числа испытаний может не хватить. В самом деле, разбиваем 2^n шаров на 2 группы по 2^{n-1} шаров и определяем, в какой из групп находится активный шар, затем группу из 2^{n-1} шаров разбиваем на две подгруппы по 2^{n-2} шара и т.д. При n-м испытании мы обнаружим искомый шар. При этом за меньшее, чем n, число испытаний активный шар, вообще говоря, не выделяется, ибо, если мы будем обозначать знаком «+» положительный результат (в группе есть активный шар), а знаком «−» обозначать отрицательный результат, то «протокол» цепочки из $m < n$ испытаний образует цепочку из m плюсов и минусов. Всего таких «протоколов» будет 2^m, т.е. всевозможных результатов испытаний оказывается *меньше* общего числа шаров.

Если активных шаров два, а всего шаров m, то имеется $\frac{m(m-1)}{2}$ различных вариантов. Если общее количество испытаний n, и $\frac{m(m-1)}{2} > 2^n$, то выделить пару активных шаров за n испытаний, вообще говоря, нельзя («протоколов» окажется меньше общего числа пар).

Пусть первому испытанию мы подвергаем k шаров, тогда возможны следующие исходы:

1) Если результат «−», то всего есть C_{m-k}^2 вариантов k, если осталось l испытаний, необходимо, чтобы $C_{m-k}^2 \le 2^l$.

2) Если результат «+», то либо оба активных шара в первой группе, либо один в первой группе, а другой − во второй. Здесь всего $C_m^2 - C_{m-k}^2$ возможных исходов и должно выполняться неравенство $C_m^2 - C_{m-k}^2 \le 2^l$.

290. Берем для первой проверки 5 шаров. Если результат «+», из оставшихся 14 шаров берем 8 для второй проверки. Если результат снова «+», то один из шаров в первой пятерке, а другой − в восьмерке. Из пятерки выделяем активный шар за 3 проверки, а из восьмерки − тоже за 3 проверки. Если же результат второй проверки «−», то из оставшихся еще не проверенных шаров берем 4. Если результат «+», осталось выделить за 3 проверки один шар из пяти и за 2 − один шар из 4. Если же «−», нужно за оставшиеся 5 проверок выделить активные шары из первой группы в 5 шаров и оставшихся двух шаров. Если же результат самой первой проверки «−», остается выделить 2 активных шара из 14 за 7 проверок. Возьмите на проверку 4 шара и рассуждайте аналогично предыдущим случаям.

291. Если для первой проверки взять два шара и получить при этом результат «−», останется из 9 шаров выделить 2 шара, но это невозможно сделать за пять проверок, так как $2^5 < C_9^2 = 36$. Если для первой проверки взять четыре шара и получится результат «+», то число оставшихся вариантов $C_{11}^2 - C_7^2 = 34 > 2^5$. Итак, для первой проверки нужно взять 3 шара. Если результат проверки «−», то из 8 оставшихся шаров нужно за 5 проверок выделить 2 шара. Как и раньше, получим, что на вторую проверку нужно взять 2 шара. Если опять получится «−», останется из 6 шаров выделить 2 за 4 проверки. Убедитесь, что это невозможно. Таким образом, из 11 шаров выделить 2 шара за 6 проверок можно, только если повезет.

292. Приведем одно из решений. На левую чашку весов положим одну монету из первого мешка, две из второго, и т.д., пять − из пятого. На правую − одну из шестого мешка, две из седьмого, ..., пять из десятого. Проверьте, что по отклонению стрелки весов сразу можно сказать, в каком мешке фальшивые монеты.

293. Два взвешивания. Первое взвешивание: возьмем из 1-го, 2-го, ..., 10-го мешка по одной монете и положим 5 из них на одну чашку весов, а 5 на другую. Если весы остались в равновесии, то фальшивые монеты в 11-м мешке. Если стрелка весов отклонилась, то мы узнали разность весов фальшивой и настоящей монет (на самом деле мы узнали абсолютную величину этой разности). Обозначим ее через x. Кроме того, мы узнали, что в 11-м мешке монеты настоящие.

Сделаем второе взвешивание: на правую чашку весов положим одну монету из первого мешка, две монеты из второго, ..., 10 монет из 10-го мешка, а на левую чашку положим 55 монет из 11 мешка. Обозначим разность весов через y. Тогда число $\left|\frac{y}{x}\right|$ равно номеру мешка с фальшивыми монетами. Доказательство того, что за одно взвешивание определить нужный мешок невозможно, не представляет трудности.

294. 2^{81}. Таблица 9×9 заполняется произвольно, а последний столбец и последняя строка данной таблицы заполняются после этого единственным образом.

295. Восемью способами, отличающимися друг от друга поворотами таблицы. Нетрудно доказать, что 1 должна стоять в углу, 2 – рядом с ней, а другую соседнюю с 1 клетку может занимать только 11. Остальное восстанавливается однозначно.

296. Начнем заполнять таблицу с левого верхнего угла.

Таблица 5

a	ap	ap^2	ap^3
aq	$apqr$	ap^2qr^2	ap^3qr^3
aq^2	apq^2r^2	$ap^2q^2r^4$	$ap^3q^2r^6$
aq^3	apq^3r^3	$ap^2q^3r^6$	$ap^3q^3r^9$

Пусть p и q – знаменатели прогрессий, стоящих в первой стороне и первом столбце таблицы соответственно. Введем еще одно неизвестное r так, как показано в таблице 5. Тогда остальные элементы таблицы восстанавливаются однозначно. Осталось записать и решить систему уравнений $a = 9$, $ap^3qr^3 = 4$, $ap^2q^2r^4 = 16$, $apq^3r^3 = 18$, решая которую, находим, что $p = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$, $q = \dfrac{3}{2\sqrt[4]{8}}$, $r = \dfrac{8}{3\sqrt[4]{8}}$.

297. Докажите сначала, что каждая строка таблицы получается из какой-то другой прибавлением ко всем числам одного и того же числа c. (Для этого достаточно рассмотреть кресты, образованные этими двумя строками и произвольными столбцами.) Затем нетрудно показать, что $c = 0$. Поскольку то же самое имеет место и для столбцов, все числа в таблице равны. Остальное ясно.

298. 14. Переставляя строки таблицы, «загоним» одну из отмеченных клеток первого столбца таблицы в левый нижний угол, а вторую отмеченную клетку сделаем соседней с ней по

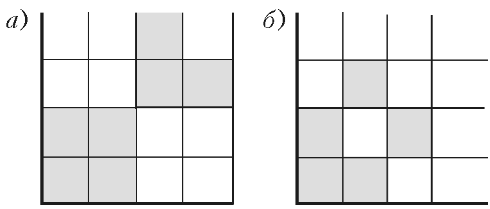

Рис. 39

вертикали. Затем вторую отмеченную клетку нижней строки сделаем соседней с угловой клеткой, так что в левом нижнем углу возникает «уголок» из трех отмеченных клеток. При этом есть две возможности:

1) Четвертая клетка квадрата 2×2 окажется заполненной (рис. 39,*а*). Тогда к квадрату 2×2 примыкает по вершине квадрат 9×9, удовлетворяющий условию задачи, с которым мы повторим уже отписанные манипуляции – отмеченную клетку – в угол и т.д.

2) Четвертая клетка квадрата 2×2 пуста (рис.39,*б*). Тогда перестановкой строк подгоняем вторую из отмеченных клеток столбца в положение, показанное на рис.39,*б*, а перестановкой столбцов – вторую отмеченную клетку второй строки в положение, также показанное на рис.39,*б*. Далее продолжаем описанную деятельность. В конце концов возникнет квадрат $k\times k$

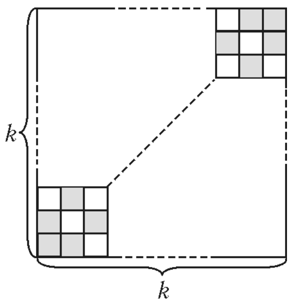

Рис. 40

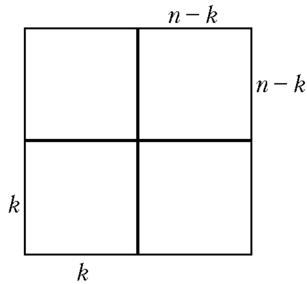

Рис. 41

($k\le 11$), в котором отмечены угловые клетки диагонали. Остальные клетки диагонали – пустые, а прочие отмеченные клетки с двух сторон примыкают к пустым клеткам диагонали (рис. 40). После возникновения такого квадрата при некотором $k<11$ рассматриваем примыкающий к нему по диагонали квадрат $(n-k)\times$ $\times(n-k)$ (рис.41) и над ним проделываем перестановки строк и столбцов. В конце концов из каждого расположения отмеченных клеток приходим к такой картине: вдоль диагонали данного квадрата расположены квадраты со сторонами $k_1, k_2, \ldots, k_l$, устроенные описанным выше образом (рис.42).

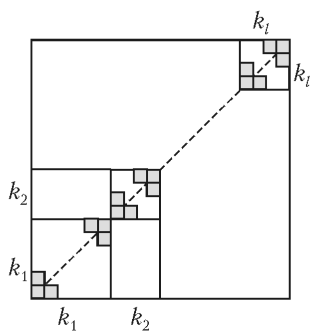

Рис. 42

Итак, каждой расстановке отмеченных клеток отвечает набор натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_l$, не меньших двух. Ясно, что если двум расстановкам соответствуют наборы, отличающиеся лишь порядком чисел, то такие расстановки эквивалентны. Если же расстановки неэквивалентны, то соответствующие им наборы чисел будут различны. Итак, число классов попарно эквивалентных расстановок равно числу представлений числа 11 в виде суммы нескольких натуральных чисел, не меньших двух. Таких представлений имеется всего 14: 11 = 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 7 + + 2 + 2 = 6 + 5 = 6 + 3 + 2 = 5 + 4 + 2 = 5 + 3 + 3 = 5 + 2 + 2 + + 2 = 4 + 4 + 3 = 4 + 3 + 2 + 2 = 3 + 3 + 3 + 2 = 3 + 2 + 2 + 2 + + 2. Некоторые расположения квадратов показаны на рис.43.

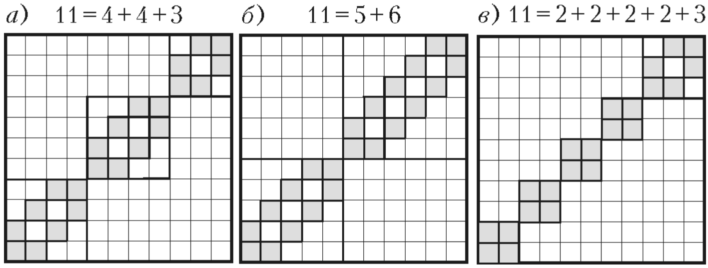

Рис. 43

299. Найдем сумму чисел в каждом столбце и в каждой строке таблицы. Выберем из этих чисел наименьшее и обозначим его через a. Можно, например, считать, что минимальная сумма чисел получается в первой строке.

Значит, в ней найдется по крайней мере $n - a$ нулей. Рассмотрим столбцы, проходящие через какие-нибудь $n - a$ из этих нулей. В каждом из этих столбцов, по условию, сумма чисел не меньше $n - a$ (иначе сумма чисел в этом столбце и в первой строке была бы меньше n). Следовательно, в этих $n - a$ столбцах сумма чисел не меньше, чем $(n-a)^2$. Кроме того, остается еще a столбцов, в каждом из которых сумма не меньше a (не меньше минимума). В этих столбцах сумма не меньше, чем a^2. Поэтому сумма чисел во всей таблице не меньше

$$(n-a)^2 + a^2 = \frac{n^2}{2} + 2\left(\frac{n}{2} - a\right)^2 \geq \frac{n^2}{2}.$$

300. а) Докажите, что полученная таблица будет симметрична относительно каждой высоты треугольника. Это проще всего сделать по индукции, начав от вершины и переходя от одного ряда треугольников, расположенных параллельно основанию, к следующему.

б) $2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ (квадратная скобка означает целую часть числа). Докажите, что любое симметричное относительно высот расположение единиц и минус единиц в треугольниках, примыкающих к сторонам данного треугольника, можно и притом единственным образом дополнить до требуемой таблицы; нужно заполнять треугольник постепенно, двигаясь к центру (индукция от n к $n + 3$). При нечетном n появляется дополнительное условие: в треугольниках, примыкающих к серединам сторон большого треугольника, должны стоять единицы.

301. Результат игры зависит, очевидно, только от того, какие числа стоят в клетках 1, 2, 3, 4, выделенных на рис.44. Первый проигрывает, если сумма чисел в клетках 1 и 4 меньше, чем в клетках 2 и 3. Укажем, как должен играть первый, чтобы помешать второму выиграть.

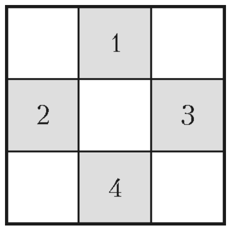

Рис. 44

Расположим данные числа в порядке возрастания: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_8 \le a_9$. Первый должен выбирать разную стратегию в зависимости от того, что больше: $a_1 + a_9$ или $a_2 + a_8$.

Пусть $a_1 + a_9 > a_2 + a_8$. Тогда первый ставит своим первым ходом число a_9 в клетку 1 и своим вторым ходом, независимо от ответа второго, – число a_2 (или число a_1, если оно не использовано вторым) – в одну из клеток 2 или 3. При этом сумма чисел в клетках 1 и 4 будет не меньше $a_1 + a_9$, а в клетках 2 и 3 – не больше $a_2 + a_8$.

Пусть $a_1 + a_9 < a_2 + a_8$. Тогда первый ставит своим первым ходом число a_1 в клетку 2 и своим вторым ходом – число a_8 (или a_9) в одну из клеток 1 или 4. При этом сумма чисел в клетках 1 и 4 не меньше $a_2 + a_8$, а в клетках 2 и 3 – не больше $a_1 + a_9$. Если $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$, то первый может применять любую из этих стратегий; при правильной игре второго они приводят к ничьей.

302. Ясно, что тот, кто назовет одно из чисел 99, 98, 97, … …, 90, проигрывает, поэтому тот, кто назовет число 89, сможет выиграть. Точно так же, «выигрывающими» числами являются 78, 67, 56, …, 12, 1.

Замечание. Точно так же – начиная «с конца» – можно разобраться в любой подобной игре, где число позиций не слишком велико, и поэтому можно перебрать их все и разделить на «выигрышные» и «проигрышные» (и «ничейные», если по условиям игры возможна ничья). Следующие две игры относятся как раз к такому типу.

303. Удобно изучать эту игру, заполняя таблицу, каждая клетка которой, стоящая на пересечении i-го столбца и j-й строки, соответствует позиции, когда в первой кучке i, а во второй – j спичек. «+» означает, что начинающий в этой позиции выигрывает, «–» – что начинающий проигрывает. Убедитесь, что проигрышными будут только позиции $(2k, 2k-1)$ и $(2k-1, 2k)$. Поэтому в данной игре начинающему обеспечен выигрыш только при четном n.

304. Противник.

Попробуйте продолжить следующую таблицу (табл. 6):

Таблица 6

Число оставшихся в коробке спичек	1	2	3	4
Количество спичек у того, кто делает ход:				
четно	–	+		…
нечетно	+	+		…

Здесь «+» означает, что тот, кто делает ход, может обеспечить себе выигрыш, «–» – что выиграет другой. Разберитесь, как по имеющимся клеткам узнавать, что стоит в следующей за ними, и тогда вы легко продолжите таблицу как угодно далеко. Для контроля укажем, что период этой таблицы равен 8.

305. 30. Опишем стратегию второго игрока, обеспечивающую ему такую сумму. Разобьем все числа на пары $(1, 2)$, $(3, 4)$, … …, $(19, 20)$. Каждый раз, когда первый ставит какой-нибудь знак перед одним из чисел, кроме чисел последней пары, второй ставит противоположный знак перед числом той же пары. Как только первый ставит какой-нибудь знак перед одним из чисел 19 или 20, второй ставит тот же знак перед другим числом той же пары. В итоге модуль суммы будет не меньше, чем

$$19 + 20 - \underbrace{1 - 1 - \ldots - 1}_{9 \text{ раз}} = 30 .$$

Докажем, что первый может не позволить второму набрать больше 30. Для этого при каждом своем ходе он должен ставить перед наибольшим из оставшихся чисел знак, противоположный знаку имеющейся к этому моменту суммы (если сумма равна 0, ставится плюс).