выполняется при всех целых x Докажите, что оно верно и при всех действительных числах x.

61. Найдите наименьшее натуральное число a, для которого найдется квадратный трехчлен $a^2x + bx + c$ с целыми коэффициентами, имеющий два различных корня на интервале $(0;1)$.

62. Пусть $\overline{abc}$ – простое трехзначное число (a, b, c – цифры). Может ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ иметь рациональные корни?

63. Может ли уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ иметь рациональные корни, если числа a, b и c нечетны?

64. Действительные числа a, b, c таковы, что $\left|ax^2 + bx + c\right| \le 1$ при всех $-1 \le x \le 1$. Докажите, что при этих значениях x выполнено неравенство $\left|cx^2 + bx + a\right| \le 2$.

65. Рассматриваются всевозможные параболы $y = x^2 + px + q$, пересекающиеся с осями координат в трех различных точках. Докажите, что окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

Неравенства и оценки

66°. Какое из двух чисел больше:

а) $1997^{1998} \cdot 1998^{1999} \cdot 1999^{1997}$ или $1997^{1997} \cdot 1998^{1998} \cdot 1999^{1999}$; б) $1993^{1991} \cdot 1991^{1993}$ или 1992^{3984}?

67. Какое из двух чисел больше:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\ddots+\cfrac{1}{1995}}}}} \quad \text{или} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1995}}}}\ ?$$

68. Какое из чисел больше:

а) $3^{100} + 4^{100}$ или 5^{100};

б) $29^{200} \cdot 2^{151}$ или $5^{279} \cdot 3^{300}$?

69. Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{1990} + \sqrt{1992} \quad \text{или} \quad 2\sqrt{1991}\ ?$$

70. Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ или $\sqrt[3]{32}$?

71. Докажите, что

а) $\frac{13}{12} < \frac{1}{1993} + \ldots + \frac{1}{7968} < \frac{11}{6}$;

б) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} < 1$;

в) $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$.

72. Какое из чисел больше:

$$\frac{10^{1965}+1}{10^{1966}+1} \text{ или } \frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1}\,?$$

73. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{15} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$;

б*) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $(n > 1)$.

74. Больше или меньше единицы число

$$0{,}99999^{1{,}00001}\cdot 1{,}00001^{0{,}99999}\,?$$

75. m и n – натуральные числа, такие, что $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$. Докажите, что $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}n^2}$.

76. Докажите для каждого натурального n неравенство

а) $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{3}}}}}_{2n \text{ радикалов}} < 3$;

б) $\underbrace{\sqrt{a^2+\sqrt{a^2+\ldots+\sqrt{a^2}}}}_{n \text{ радикалов}} < |a|+1$;

в) $\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} > \dfrac{1}{4}$

(в числителе n радикалов, в знаменателе $n-1$ радикал).

77. Сумма нескольких положительных чисел равна сумме их квадратов. Что больше: сумма четвертых степеней этих чисел или сумма их кубов?

78. Докажите, что если при любом натуральном k из отрезков длины a^k, b^k, c^k $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$ можно составить треугольник, то среди чисел a, b, c есть два равных.

79. $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – квадраты различных целых чисел, отличных от единицы. Докажите, что

$$\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_n}\right) > \frac{1}{2}.$$

80. Какое из положительных чисел a или b больше, если $a(1-b) > \frac{1}{4}$?

81. Докажите, что если положительные числа a, b, k, n удовлетворяют неравенству $ab > ka + nb$, то

$$a+b > \left(\sqrt{k}+\sqrt{n}\right)^2.$$

82. При каких m из равенства $m(a-1) = a^2 + b$ следует, что $a > b$?

83. Положительные числа a, b и c таковы, что $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}ab$. Что больше: $a + c$ или b?

84. Найдите наименьшее значение суммы $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2}$, если числа x, y, z неотрицательны и $x + y + z = 1$.

85. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a-v)^2 + (b-u)^2$, если $a^2 + b^2 = 1$, а $v^2 + u^2 = 4$.

86. Найдите наименьшее значение функции

$$\sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-14x+58}.$$

87. Положительные числа x, y и z удовлетворяют неравенствам $xyz > 1$, $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Сколько среди них чисел, меньших единицы?

88. Пусть x и y – положительные числа, S – наименьшее из чисел x, $y + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. Найдите наибольшее возможное значение S. При каких x и y оно достигается?

89. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Пусть S – наибольшее из чисел $\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots$ $\ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}$. Найдите наименьшее возможное значение S. При каких значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оно достигается?

Алгебраические уравнения

90*. Решите уравнения:

а) $x^3 + 3x - 2 = 0$;

б) $x^4 - 4x - 1 = 0$;

в) $x^4 + 8x - 7 = 0$;

г) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$;

д) $\left(2x^3 + x - 3\right)^3 = 3 - x^3$;

е) $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = 0$ (найдите положительные корни);

ж) $\left(x^{2k} + 1\right)\left(1 + x^2 + \ldots + x^{2k-2}\right) = 2kx^{2k-1}$.

91. Для каждого значения параметра a решите уравнение

а) $\left(x^2 - a\right)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$;

б) $x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0$,

где x − неизвестное, a − вещественный параметр.

92. Может ли уравнение

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$$

при некоторых вещественных a, b, c иметь бесконечное множество решений?

93°. Решите уравнения:

а) $2x^3 = \left(3x^2 - x - 1\right)\sqrt{1 + x}$;

б) $16x^3 = \left(11x^2 + x - 1\right)\sqrt{x^2 - x + 1}$.

94. Решите уравнение

$$2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1.$$

95. Решите уравнения:

а) $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{2 - z^2} + z\sqrt{3 - x^2} = 3$;

б) $x\sqrt{1 - y} + y\sqrt{1 - x} = xy$;

в) $\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2}$.

96. При каких значениях a уравнение $\sqrt[3]{1 + x} + \sqrt[3]{1 - x} = a$ имеет корни?

97. При каких значениях p число $\sqrt[3]{1 - p} + \sqrt[3]{1 + p}$ будет целым?

98. Решите уравнение

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}.$$

Системы уравнений

99. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} (x+y)^3 = z, \\ (y+z)^3 = x, \\ (z+x)^3 = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 + y^3 = z, \\ y^3 + z^3 = x, \\ z^3 + x^3 = y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$

100. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0, \\ y + z^2 + x^4 = 0, \\ z + x^2 + y^4 = 0\,? \end{cases}$$

101. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z, \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x. \end{cases}$$

102*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{x_2} = 1, \\ x_2 + \sqrt{x_3} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{24} + \sqrt{x_{25}} = 1, \\ x_{25} + \sqrt{x_1} = 1. \end{cases}$$

103. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1x_2 = x_1 + x_2 + 2, \\ 3x_2x_3 = x_2 + x_3 + 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 3x_{n-1}x_n = x_{n-1} + x_n + 2, \\ 3x_nx_1 = x_n + x_1 + 2. \end{cases}$$

104. На доске записаны 3 уравнения:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ \ (a \neq 0),$$

$$bx^3 + cx^2 + dx + a = 0,$$

$$cx^3 + dx^2 + ax + b = 0.$$

Докажите, что если первые два уравнения имеют общий корень, то и все три уравнения имеют общий корень.

Многочлены

105. Попарно различные числа x, y, и z таковы, что $x^3 - 3x = y^3 - 3y = z^3 - 3z$. Найдите $x^2 + y^2 + z^2$.

106. Многочлен $p(x)$ принимает целые значения только при целых x. Докажите, что $p(x) = \varepsilon x + b$, где b – целое число, а $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = \pm 1$.

107. Докажите, что ни один многочлен с целыми коэффициентами не может принимать в точке 7 значение 11, а в точке 11 – значение 13.

108. Докажите, что если для многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами $p(0)$ и $p(1)$ – нечетные числа, то уравнение $p(x) = 0$ не имеет целых корней.

109. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что все числа $p(0), p(1), \dots, p(k)$ являются простыми числами?

110. Найдите сумму коэффициентов многочлена

$$\left(x^4 - x + 1\right)^{1965} + \left(x^5 + x - 1\right)^{1965}$$

а) при четных; б) при нечетных степенях x.

111. Сумма коэффициентов многочлена равна 2, а сумма коэффициентов при нечетных степенях x равна сумме коэффициентов при четных степенях x. Найдите остаток от деления этого многочлена на $x^2 - 1$.

112. Докажите, что многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ при любом целом $n \geq 0$ делится на x^2+x+1.

113. Можно ли, пользуясь только операциями сложения, вычитания и умножения, составить из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выражение, равное x, если

а) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$;

б) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=2x$;

в) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2$?

114. На доске написано уравнение

$$x^3+\ldots+x^2+\ldots x+\ldots=0.$$

Двое играют в такую игру. Первый ставит на любое из пустых мест целое число, отличное от нуля. Затем второй ставит целое число на одно из оставшихся мест. Наконец, первый ставит целое число на последнее свободное место. Может ли первый играть так, чтобы независимо от хода второго все корни получившегося уравнения оказались целыми числами?

115. Дан многочлен $p(x)$ с а) натуральными; б) целыми коэффициентами. Для каждого натурального числа n обозначим через a_n сумму цифр в десятичной записи числа $p(n)$. Докажите, что найдется число, встречающееся в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ бесконечное количество раз.

Тригонометрические подстановки

116. Решите уравнения:

а°) $x^3-3x+1=0$;

б) $x^3-3x+\sqrt{3}=0$.

117*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2-1=y, \\ 2y^2-1=z, \\ 2z^2-1=x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{2x}{1-x^2}=y, \\ \dfrac{2y}{1-y^2}=z, \\ \dfrac{2z}{1-z^2}=x; \end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{2}\,(x-y)(1+4xy)=\sqrt{3},\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

118. Докажите, что если $x+y+z=xyz$, то

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}\ .$$

119. Докажите, что из любых четырех положительных чисел можно выбрать два числа x и y так, чтобы выполнялись неравенства

$$0\le\frac{x-y}{1+x+y+2xy}<2-\sqrt{3}\ .$$

120. Последовательность x_n задается условием: $x_1=2$, $x_{n+1}=\dfrac{2+x_n}{1-2x_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Докажите, что

а) $x_n\ne 0$ (при всех n);

б) эта последовательность непериодическая.

ГЛАВА 2

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Делимость и делители

121. Докажите, что если p – простое число ($p \geq 5$), то $p^2 - 1$ делится на 24.

122°. Найдите все такие простые числа p, для которых $14p^2 + 1$ – тоже простое.

123°. Докажите, что для любого натурального n ($n \geq 3$) произведение всех простых чисел, не превосходящих n, больше n.

124°. Пусть $d(n)$ – число делителей натурального числа n. Докажите, что $d(n) < 2\sqrt{n}$.

125. Известно, что число n имеет ровно k делителей. Чему равно произведение всех делителей числа n?

126. Докажите, что среднее арифметическое всех делителей натурального числа n заключено между $\sqrt{n}$ и $\dfrac{1+n}{2}$.

127. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i – простые числа, причем $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Докажите, что число делителей n равно $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$.

128*. Даны два натуральных числа m и n. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – все различные делители числа m, а $b_1, b_2, \ldots, b_t$ – все различные делители числа n. Докажите, что если

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_s = b_1 + b_2 + \ldots + b_t$$

и

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_s} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_t},$$

то $m = n$.

129*. Докажите, что число

$$\underbrace{111\ldots111}_{2^n \text{ единиц}}$$

имеет не меньше 2^n различных делителей.

130. Найдите все натуральные числа n делящиеся, на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{n}$.

131*. Докажите, что существует лишь конечный набор натуральных чисел n, которые делятся на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt[k]{n}$ ($k \geq 3$ – натуральное число).

132. Найдите все натуральные числа n, для которых $n = pd(n)$, где p – некоторое простое число, а $d(n)$ – число делителей числа n.

133. Найдите все натуральные числа n такие, что все натуральные числа, меньшие n и взаимно простые с n, образуют арифметическую прогрессию.

Сравнения по модулю и арифметика остатков

134. Какой остаток дает число 2^{1000} при делении а) на 7; б) на 9?

135. Найдите две последние цифры числа

$$\left.4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}}\right\}1973 \text{ четверки}.$$

136. Докажите, что

а) если $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ делится на 5, то каждое из чисел a, b, c, d делится на 5;

б) если $a^2 + b^2$ делится на 7, то a и b делятся на 7;

в) если $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 7, то и abc делится на 7.

137. Докажите, что произведение двух последних цифр квадрата целого числа четно.

138. Может ли квадрат целого числа оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами, отличными от нуля?

139. Число является квадратом целого числа и оканчивается цифрой 5. Докажите, что его третья справа цифра четная.

140. Предпоследняя цифра квадрата целого числа нечетная. Найдите его последнюю цифру.

141. Докажите, что число $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

142. При каких натуральных n число $2^{2n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n$ делится на 23?

143. Докажите, что число $n^5 - 5n^3 + 4n$ при любом натуральном n делится на 120.

144. При каких простых p число $p^4 - 5p^2 + 4$ не делится на 120?

145. Докажите, что число $11^{19} + 11^8 + 1$ делится на 133.

146. Докажите, что $m^2 + 1$ ни при каких целых m не делится на 19.