шить разницу между наибольшим и наименьшим из 35 чисел до нуля.

250. В первом кошельке было $A-\frac{A}{(n-1)^2}$ рублей, во втором – $A+\frac{A}{(n-1)^2}$ рублей, в остальных – по A рублей.

Во всех кошельках (кроме первого) после того, как из них берут $\frac{1}{n}$ оказавшейся там суммы, остается A рублей, следовательно, перекладываемая сумма во всех случаях (кроме сумм, перекладываемых из первого кошелька во второй) равна $\frac{A}{n-1}$. Таким образом, во всех кошельках, кроме первого и второго, сумма денег в результате перекладываний не может измениться. Определить первоначальные суммы денег в первом и во втором кошельке теперь нетрудно.

251. а) Назовем самый большой ящик ящиком ранга n, следующие по величине два ящика – ящиками ранга $n-1$, и т. д. до ящиков ранга 1, в которых лежат монеты. Разность числа орлов и решек в каком-нибудь ящике назовем дефектом этого ящика. Дефект самого большого ящика назовем общим дефектом и обозначим через d. Если мы докажем, что всегда найдется ящик, при переворачивании всех монет в котором общий дефект уменьшается по крайней мере вдвое, то задача будет решена, поскольку $|d| \le 2^n$ и d всегда четно. Предположим, что общий дефект положителен и при переворачивании монет в любом ящике уменьшается по модулю меньше чем вдвое. Тогда дефект d' каждого ящика удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{d-2d'}{d}\right| > \frac{1}{2}.$$

(Мы пользуемся тем, что общий дефект d при переворачивании всех монет в ящике с дефектом d' меняется на $2d'$.) Таким образом, или $d' < d/4$, или $d' > 3d/4$. С другой стороны, дефект каждого ящика ранга 1 не больше $3d/4$ ($\frac{3d}{4} > 1$, поскольку d четно), значит, $d' < d/4$. Отсюда следует, что дефект ящика ранга 2 не больше $d/2$, а значит, меньше $d/4$, отсюда, в свою очередь, получается, что дефект любого ящика ранга 3 меньше $d/4$, и т.д. Мы пришли к противоречию: с одной стороны, дефект ящика ранга n меньше $d/4$, с другой – он просто равен d, и $d > 0$.

б) $2^n - 1$.

252. Зафиксируем положение портрета отца. Из исходного положения портретов мы можем, совершая движение по часовой стрелке, «перегнать» любой портрет так, что портрет сына окажется рядом с портретом отца. После этого предписанными перестановками выстраиваем остальные портреты в любом наперед заданном порядке, а затем, двигаясь против часовой стрелки, ставим на нужное место портрет сына.

Замечание. В задачах, где речь идет о каких-то процессах или операциях, которые можно проделывать многими разными способами, как правило, не нужно следить за всеми мелочами. Так же как в физических задачах, где речь идет о движении сложной системы, обычно бывает достаточно следить за некоторыми основными параметрами: энергией, импульсом и т.д., так и в математических задачах о процессах очень часто нужно выбрать одну какую-нибудь величину в качестве «основной наблюдаемой» и следить за ее изменением. В задаче 248 такую роль играла сумма всех чисел таблицы; в задаче 249 – разность между наибольшим и наименьшим из данных чисел, в задаче 251, а) – общий дефект; в задаче 251, б) удобно следить за тем, как меняется число ящиков ранга 2 с дефектом 0 и т.д.

Помните, как доказывается, что нельзя поднять себя за волосы, как это делал барон Мюнхгаузен? В системе, на которую не действуют внешние силы, сохраняется импульс! Точно так же в математических задачах, где нужно доказать, что получить какой-то результат после ряда операций заведомо невозможно, часто можно найти такую величину или такие свойства системы, которые сохраняются при всех операциях, описываемых в условии задачи. Посмотрите, например, решение задачи 253.

253. Четность суммы выписанных на доске чисел при выполнении разрешенной операции не изменяется. Осталось заметить, что вначале эта сумма равна нечетному числу:

$$1+2+3+\ldots+1965=\frac{1965\cdot 1966}{2}=1965\cdot 983.$$

254. Только при $n=2^1,2^2,2^3,\ldots$

Эта задача эквивалентна следующей обратной задаче. В один из n стаканов налито A мл воды, остальные пустые. Из каждого стакана разрешается переливать половину имеющейся в нем воды в любой другой стакан. Требуется определить, при каких n можно разлить воду поровну по всем стаканам.

Докажите, что после любого числа переливаний количество воды в любом стакане имеет вид $\frac{k}{2^l}A$ мл, где k и l – некоторые натуральные числа. Поскольку при n, не являющемся степенью двойки, $\frac{1}{n} \neq \frac{k}{2^l}$, то при этих n разлить воду поровну по всем стаканам нельзя.

255. Запишем вместо плюсов плюс единицы, а вместо минусов – минус единицы. Описанная процедура теперь выглядит так: стираются два рядом стоящие числа и вместо них вписывается их произведение.

а) Достаточно заметить, что за два шага числа, стоящие на нечетных (соответственно, четных) местах, преобразуются как предписано правилами, т.е. на соответствующих местах оказываются вписанными их произведения. Дальше применим индукцию по k.

б) Перед тем, как все числа стали единицами, должны на всех местах стоять минус единицы, а перед этим минус и плюс единицы должны чередоваться. Но это при нечетном n невозможно.

в) $n = 2^k(2l+1)$, причем расстановка плюсов и минусов должна быть «периодической», т.е. состоять из следующих друг за другом $2l + 1$ одинаковых групп по 2^k плюс и минус единиц. Для доказательства нужно доказать индукцией по k, что через каждые 2^k шагов числа, попарно отстоящие друг от друга на 2^k (т.е. первое, (2^k+1)-е, $(2 \cdot 2^k + 1)$-е, и т.д.), преобразуются так же, как набор из $2l + 1$ единиц и минус единиц.

256. Прежде всего заметим, что если четные числа заменить на +1, а нечетные на −1, то указанное в задаче преобразование над знаками чисел в точности соответствует преобразованию строки +1 и −1 из предыдущей задачи. Значит, через несколько шагов все полученные нами числа будут четными: это соответствует тому, что строка будет состоять из одних 1. С другой стороны, самое большое из чисел при операции, указанной в задаче, не может расти. Этих указаний достаточно для решения задачи. Полное доказательство можно записать, например, так: для ряда из одних нулей утверждение очевидно; предположим, что для всех рядов, составленных из чисел, меньших 2^{m-1}, утверждение доказано, и докажем его для произвольного ряда чисел, меньших 2^m ($m \geq 1$). Мы знаем, что через несколько шагов этот ряд превратится в ряд из четных чисел: $2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_{2^n}$, где каждое число меньше 2^m, т.е. каждое b_k меньше 2^{m-1}. Но мы предположили по индукции, что ряд $b_1, b_2, \ldots, b_{2^n}$, где все числа меньше 2^{m-1}, через несколько шагов станет нулевым. Ясно, что то же самое произойдет и с рядом $2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_{2^n}$.

257. Если $a + kd \leq 10^n < a + (k+1)d$, причем $d < 10^n$, где $k < n$, то $a + (k+1)d < 2 \cdot 10^n$.

258. Вот один из способов. Разобьем ряд натуральных чисел на такие куски:

$$\overbrace{1};\quad \overbrace{2,3};\quad \overbrace{4,5,6};\quad \overbrace{7,8,9,10};\quad \overbrace{11,12,13,14,15};\quad \ldots$$

и будем по очереди относить эти куски то к одному множеству, то к другому. Количество чисел в n-м куске равно n, поэтому если разность бесконечной арифметической прогрессии равна d, то начиная с d-го куска ни один кусок не втиснется между двумя соседними членами прогрессии.

259. Отметьте красным карандашом те члены последовательности, для которых все начинающиеся с них последовательности конечной длины принадлежат первому классу, и синим карандашом – те члены последовательности, для которых все начинающиеся с них последовательности принадлежат второму классу; остальные оставим неотмеченными. Рассмотрите три случая (хотя бы один из которых имеет место):

1) красных отметок бесконечное количество;

2) синих отметок бесконечное количество;

3) начиная с некоторого места, никаких отметок нет.

260. В любом разряде одиннадцати бесконечных десятичных дробей стоит набор из одиннадцати цифр, среди которых наверняка есть две одинаковых цифры. Разрядов бесконечное количество. Значит, какой-то набор повторяется бесконечно много раз. Соответствующие совпадающим цифрам дроби удовлетворяют условию.

261. а) Выберем одного из этих шести человек, назовем его A. Если A знаком по крайней мере с тремя, то либо эти трое не знакомы между собой, либо найдется тройка попарно знакомых (A и еще двое). Если A знаком не более чем с двумя, то либо остальные трое знакомы между собой, либо найдется тройка попарно незнакомых (A и еще двое из тех, с кем он не знаком).

б) Для каждого математика найдутся шесть математиков, с которыми он переписывается на одном языке, скажем, на английском. Если из этих шести какие-то двое переписываются по-английски, то все доказано. Если все шестеро переписываются между собой только по-французски или по-русски, то дело сводится к предыдущей задаче.

262. Если кто-то из мушкетеров должен драться не более чем с двумя, т.е. у него не менее шести друзей, то можно воспользоваться результатом задачи 261,а). Если кто-то должен драться с четырьмя или более, то тоже все ясно. Случай, когда каждый должен драться ровно с тремя, невозможен, потому что число дуэлей $\frac{9 \cdot 3}{2}$ получается при этом не целым.

263. Рассмотрим того участника, который сыграл наибольшее количество партий. Тогда каждый из k шахматистов, с которыми он встречался, сыграл не более $10 - k + 1 = 11 - k$ партий (из этих k шахматистов никакие двое не играли между собой). Каждый из остальных $10 - k$ шахматистов сыграл не более k партий. Поэтому общее число сыгранных партий не превосходит

$$\frac{1}{2}\left(k + k(11-k) + (10-k)k\right) = k(11-k).$$

При целых $k \geq 0$ это число не больше 30.

264. Докажите последовательно следующие утверждения:

1) Город A, в который ведет наибольшее число путей из других городов, легко доступен.

2) Выделим города, в которые можно попасть из B, и среди них выберем город A, в который ведет наибольшее число путей из выделенных городов. Тогда B легко доступен.

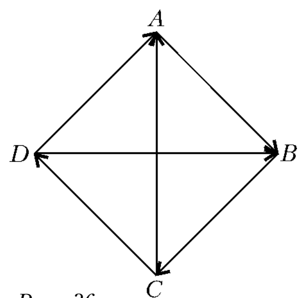

Рис. 36

3) Выделим города, в которые можно попасть из B (почему они есть?), и среди них выберем город C, в который ведет наибольшее число путей из выделенных городов. Тогда C легко доступен. Уже для 4-х городов можно так устроить сообщение, что четырех легко доступных городов не будет. Так, на рисунке 36 город D таковым не является.

265. Рассадим рыцарей как-то за круглым столом. Покажем, что если где-то рядом сидят два врага A и B (A

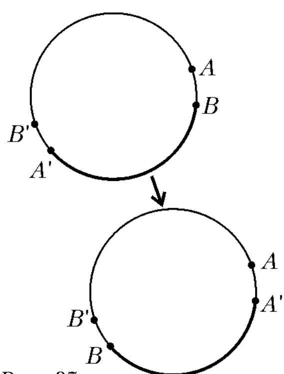

Рис. 37

сидит после B по часовой стрелке), то можно пересадить рыцарей так, что число пар сидящих рядом врагов уменьшится. Для этого найдем место, где после A' (друга A) сидит B' (друг B) (докажите, что такое место обязательно найдется!), и пересадим всю цепочку от B до A' в обратном порядке (рис.37).

Замечание. Предыдущие шесть задач относятся к разделу математики, который называется *теория графов. Граф* (рис.38) – это система точек (*вершин графа*), некоторые из которых соединены линиями (они называются *ребрами графа*). Конечно, задачи 260 – 265 нетрудно сформулировать в терминах теории графов, только формулировки получились бы более однообразные и скучные. Но во всяком случае, при решении этих задач очень полезно рисовать соответствующие графы.

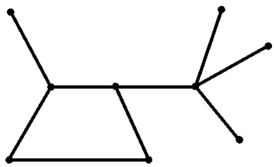

Рис. 38

Хотя теория графов, как самостоятельная ветвь математики, возникла сравнительно недавно, в ней уже накопилось много различных понятий и теорем, она быстро развивается и находит разнообразные применения в экономике (теория транспортных сетей, сетевые графики в планировании и пр.), теории электрических цепей и внутри математики.

266. Выберем одного из дружинников. Если бы описанное в задаче распределение дежурств было возможно, то остальные 99 дружинников могли бы разбиться на пары, которые дежурили вместе с выбранным дружинником, но 99 – нечетное число.

267. В отряде должно быть семь человек; каждый должен дежурить по три раза; одно из возможных расписаний в табл.1.

Таблица 1

Дни	1	2	3	4	5	6	7
Дежурят	1	3	3	5	5	7	7
	2	2	4	4	6	6	1
	4	5	6	7	1	2	3

Сначала докажите, что каждый должен дежурить по три раза. Интересно, что любые два расписания отличаются только порядком дней и нумерацией дружинников. Попробуйте это доказать!

268. Из присутствовавших на каждом заседании можно выбрать $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ пар человек. Каждая пара членов комиссии могла встретиться не более чем на одном заседании. Всего заседаний было 40, следовательно, всего пар членов комиссий существует менее $45 \cdot 40 = 1800$. Но из 60 человек можно составить только $\frac{60 \cdot 59}{2} < 1800$ пар.

269. Нет. Трое шахматистов могут набрать максимум 24 очка (3 в партиях между собой и 21 – в партиях с остальными), а остальные семеро сыграли между собой $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ партию, т.е. набрали вместе не менее 21 очка.

270. Пять партий; шесть различных расписаний. Если указать, с кем играет пара – назовем ее командой – $(A;B)$ и (A; тот, кто не участвует в игре против пары $(A;B)$), то остальные партии составляются однозначно.

Например, если первые две пары команд $(A;B)$ и $(C;D)$, а вторые $(A;E)$ и $(B;C)$, то следующие 3 пары команд с точностью до порядка их перечисления – это $(E;D)$ и $(A;C)$; $(B;D)$ и $(C;E)$; $(A;D)$ и $(B;E)$.

Для подсчета количества расписаний заметим, что начальную пару команд с игроком A можно выбрать из четверки A, B, C, D тремя способами, а вторую пару, которой предстоит играть с командой $(A;E)$, – еще двумя. Остальные пары определяются однозначно. Итого имеется $3 \times 2 = 6$ расписаний.

271. Б – 4; Г – 3; В – 2,5; Е и А – по 2; Д – 1. Постарайтесь последовательно ответить на следующие вопросы. Кто был первым, сколько очков он набрал? Какое наименьшее число очков, исходя из условия задачи, могли набрать Д, Е и А? Сколько очков набрали Г и Д?

272. В таблице 2 на пересечении i-й строки и j-го столбца стоят количества очков, полученные в игре команды A_i с командой A_j. Не забывайте пользоваться тем, что все участники набрали разное количество очков. Сначала разберитесь, как сыграли свои партии первые двое.

Таблица 2

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	–	0	2	2	2
A_2	2	–	1	1	1
A_3	0	1	–	1	2
A_4	0	1	1	–	1
A_5	0	1	0	1	–

Замечание. Конечно, количество задач про различные турниры можно было бы значительно увеличить, но все они решаются примерно одинаково. Чтобы окончательно расправиться с этими задачами, советуем вам решить такой общий вопрос: каким условиям должна удовлетворять последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, чтобы можно было придумать турнир n шахматистов, в результате которого первый набрал a_1 очков, второй – a_2 очков, ..., n-й – a_n очков (здесь предполагается, что $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$, и $2a_k$ – целое число для всех k). Оказывается, необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$, можно записать так:

1) $a_n + a_{n-1} \geq 1$,

2) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \geq 3$,

. . . .

k) $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} \geq \dfrac{k(k+1)}{2}$

. . . .

$n-2$) $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 \geq \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$,

$n-1$) $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 = \dfrac{(n-2)n}{2}$.

273. Если к данному моменту времени в играх принимали участие $m+1$ команд, то каждая из них сыграла не более m матчей. Таким образом, все эти команды можно разбить на m групп: первая группа – команды, сыгравшие по одной игре, вторая группа – команды, сыгравшие по две игры, и т.д. В некоторых группах может не быть ни одной команды, но поскольку команд всего $m+1$, а групп – m, то обязательно найдется группа, в которую входят по крайней мере две команды.

Замечание. Мы специально так подробно разобрали решение этой задачи, чтобы выделить то простое рассуждение, которое лежит в основе доказательства. В других терминах его можно сформулировать так: «если в m ящиках лежат $m+1$ предметов, то найдется ящик, в котором лежат по крайней мере два предмета». Такое рассуждение используется и в нескольких следующих задачах. С его помощью доказывается целый ряд красивых теорем, и оно имеет специальное название *принцип Дирихле*. Вот один характерный пример применения принципа Дирихле:

Теорема. Если целые числа a и b взаимно просты, то найдется такое натуральное число k, для которого $a^k - 1$ делится на b.

Доказательство. Рассмотрим числа $1, a, a^2, \ldots, a^k$ и выпишем их остатки при делении на b. Так как этих чисел $b + 1$, а различных остатков при делении на b существует только b (а именно 0, 1, …, $b - 1$), то среди этих чисел найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на b. Пусть эти числа a^{n_1} и a^{n_2} ($n_1 < n_2$). Тогда их разность $\left(a^{n_2 - n_1} - 1\right) a^n$ делится на b, а поскольку a и b взаимно просты, то и $a^{n_2 - n_1} - 1$ делится на b.

274. Какие-то два из данных чисел дают при делении на n одинаковые остатки. Их разность и делится на n.

275. Если n не делится ни на 2, ни на 5, среди чисел 1, 11, 111, 1111, …, $\underbrace{111\ldots1}_{n}$, … найдутся два, дающие при делении на n одинаковые остатки. Их разность имеет вид $\underbrace{11\ldots1}_{m}\underbrace{00\ldots0}_{l}$. Число $\underbrace{111\ldots1}_{m}$ делится на n.

Если $n = 2^k \cdot 5^l \cdot n'$, где n' не делится ни на 2, ни на 5, следует к числу из одних единиц, делящемуся на n', приписать нужное количество нулей.

276. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ – данные числа. Выделим в a_i степени двойки, т.е. запишем a_i в виде $a_i = 2^{k_i} a_i'$, где $k_i \geq 0$, а a_i' – нечетное число (i = 1, 2, …, n + 1). Среди чисел a_i' не больше n различных (почему?), но тогда какие-то два из них совпадают. Если $a_i' = a_j'$, то отношение a_j к a_i – степень двойки.

277. а) 67. Запишем все числа от 1 до 100 в таблицу (см. табл. 3), в каждой строке которой отношение любых двух чисел – степень двойки.

Посмотрим, какое наибольшее количество чисел, удовлетворяющих условию, можно взять из каждой строки: из первой – 4, из второй и третьей – по 3 и т.д. Если же взять 68 чисел, то по крайней мере в одной из строк таблицы окажется больше максимально допустимого количества чисел, при этом одно из них окажется вдвое больше другого.

б) $2^{17} = 131072$. Из первой и третьей строк нужные числа выбираются однозначно, из второй – двумя способами, из

Таблица 3

№ строки							
1	1	2	4	8	16	32	64
2	3	6	12	24	48	96	
3	5	10	20	40	80		
4	7	14	28	56			
5	9	18	36	72			
6	11	22	44	88			
7	13	26	52				
8	15	30	60				
…	…	…	…				
12	23	46	92				
13	25	50	100				
14	27	54					
…	…	…					
25	49	98					
26	51						
…	…						
50	99						

четвертой, пятой и шестой − тоже двумя способами, от 7-й до 13-й − однозначно, от 14-й до 25-й − двумя способами.

Наконец, из всех оставшихся строк, состоящих из одного числа, − также однозначно. Итого количество возможных выборок равно 2^{17}, поскольку в точности из 17 строк выбор чисел можно осуществить двумя способами.

278. а) Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ − данные числа. Выпишем последовательно две группы чисел $\underbrace{a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}}_{n \text{ чисел}}$, $\underbrace{a_{n+1} - a_1, a_n - a_1, \ldots, a_2 - a_1}_{n \text{ чисел}}$. Всего выписано $2n$ чисел, не превосходящих $2n-1$. Значит, среди них есть 2 совпадающих числа. Но тогда при некоторых k и l будет $a_k - a_1 = a_l$, т.е. $a_k = a_l + a_1$. (Мы доказали даже несколько более сильное утверждение.)

б) Рассмотрите ряд из $2k-1$ чисел: $a_2, a_3, \ldots a_k, a_{k+1} - a_1, a_k - a_1, a_k - a_1, \ldots, a_2 - a_1$.

279. Пусть x_1 − сумма первого числа и его номера, x_2 − сумма второго числа и его номера, и т.д. Рассмотрим остатки от деления чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $2n$, и докажем, что какие-то два из них равны. Предположим, что все остатки различны. Тогда их сумма равна

$$0 + 1 + 2 + \ldots + (2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2}.$$