БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ
ВЫПУСК
100

Приложение к журналу
«Квант» №2/2007

**Н.Б.Васильев,
А.П.Савин,
А.А.Егоров**

ИЗБРАННЫЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

математика

Бюро Квантум

Москва
2007

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
В19

Серия
«Библиотечка «Квант»
основана в 1980 г.

В19 **Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А.**
Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М.: Бюро Квантум, 2007. — 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 100. Приложение к журналу «Квант» № 2/2007.)

ISBN 5-85843-065-1

Книга представляет собой сборник задач различных олимпиад по математике, проводившихся в разные годы. Основой для нее послужила книга Н.Б.Васильева и А.П.Савина «Избранные задачи математических олимпиад», вышедшая в 1968 году. По сравнению с первым изданием книга существенно расширена и переработана. Все задачи снабжены ответами и указаниями, многие – подробными решениями.

Книга предназначена старшеклассникам, учителям, руководителям математических кружков и всем любителям поломать голову над математическими задачами.

ББК 22.1я721

ISBN 5–85843–065–1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1968 году издательством МГУ была выпущена книга Н.Б.Васильева и А.П.Савина «Избранные задачи математических олимпиад». Книга состояла из двух частей по 120 задач в каждой и предназначалась для учащихся Всесоюзной заочной математической школы при МГУ. В ней не было алгебраических и арифметических задач, так как предполагалось, что им будут посвящены другие книги. По разным причинам такие книжки так и не появились.

В предисловии к своей книге Н.Б.Васильев и А.П.Савин писали:

«Авторы старались выбрать из множества задач, предлагавшихся в последние годы на разных математических олимпиадах, те, которые казались им необычными и наиболее красивыми. Поэтому неудивительно, что в этот сборник попали, за очень небольшим исключением, трудные задачи... Здесь встречаются задачи, на решение которых можно потратить не только несколько часов, но и несколько недель. Почти все задачи снабжены указаниями или ответами. Некоторые из этих задач решены подробно, но в большинстве случаев указания написаны настолько коротко, что требуется еще большая самостоятельная работа, чтобы получить их решение».

Николай Борисович Васильев (1940–1998) и Анатолий Павлович Савин (1932–1998) были выдающимися деятелями математического просвещения. Еще студентами они участвовали в работе школьных математических кружков и проведении московских и других математических олимпиад. Придуманные ими задачи до сих пор составляют заметную часть «математического фольклора».

В 1970 году начал выходить журнал «Квант», активными членами редколлегии которого до последних своих дней были Н.Б.Васильев и А.П.Савин, во многом определившие стиль и уровень математического содержания журнала. В частности, Н.Б.Васильев бессменно руководил «Задачником «Кванта», а А.П.Савин вел раздел «Квант» для младших школьников».

При подготовке настоящего издания мною были написаны несколько более подробные указания и решения всех задач и добавлены две главы, посвященные алгебре и арифметике.

Кроме того, несколько задач были заменены на близкие по содержанию поучительные задачи, появившиеся уже после 1968 года (в частности, из «Задачника «Кванта»).

Таким образом, предлагаемая вам книга состоит из «фундамента» – книги Н.Б.Васильева и А.П.Савина (главы «Разные задачи» и «Геометрические задачи») и еще двух глав («Алгебраические задачи» и «Делимость целых чисел»).

В книгу вошли задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах разных уровней, а также некоторые задачи из других источников (сборники задач, фольклор и т.д.). Близкие по тематике и идеям решения задачи объединены в группы, отделяемые друг от друга подзаголовками или отточиями вида ***. Наиболее трудные задачи снабжены значками * и **. Задачи, узловые для соответствующих разделов, помечены значком °. Сборник отнюдь не претендует на абсолютную полноту (это в принципе невозможно). Так, например, в алгебраической части отсутствуют классические задачи на доказательство неравенств.

Бытует мнение, что к математической олимпиаде, в отличие от экзамена по математике, подготовиться нельзя. В общем, это действительно так. Тем не менее, готовить себя к участию в олимпиаде нужно. Для этого необходимо решать нестандартные задачи, чтобы войти в круг идей и понятий, научиться видеть ту ниточку, потянув за которую можно «вытянуть» решение.

Не следует думать, что эта книга предназначена для профессионалов-«олимпиадников». Она может быть полезна и учителям, ведущим кружки и внеклассные занятия, и вообще всем любителям поломать голову над математическими задачами.

Мне довелось подготовить к публикации расширенное издание книги двух людей, которые в течение почти сорока лет были моими близкими друзьями. Насколько книга удалась, судить читателям.

Я благодарю И.В.Ященко, директора Московского центра непрерывного математического образования, ставшего одним из инициаторов настоящего издания, и М.Ю.Панова, оказавшего существенную помощь при подготовке рукописи книги.

Выражаю также глубокую признательность А.В.Жукову, Ж.М.Рабботу и А.В.Спиваку за ценные советы, обсуждения и помощь в отборе задач.

О всех замеченных опечатках, неточностях и других недостатках книги просим сообщить в редакцию журнала «Квант».

А.А.Егоров

ГЛАВА 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Алгебраические преобразования

1°. Докажите, что а) если число N есть сумма квадратов двух целых чисел, то каждое из чисел $2N$ и N^2 тоже есть сумма квадратов двух целых чисел; б) если числа N_1 и N_2 представлены в виде суммы двух квадратов целых чисел, то и N_1N_2 также представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел.

2. Если сумма (разность) двух целых чисел есть точный квадрат, то удвоенная сумма (разность) кубов этих чисел есть сумма трех квадратов.

3. а) Можно ли число $3a^4+1$ (где a – целое) представить в виде суммы трех квадратов целых чисел?

б*) Конечно или бесконечно количество решений в целых числах уравнения

$$x^2+y^2+z^2=3t^4+1\,?$$

4*. Выясните, конечно или бесконечно число решений в натуральных числах уравнения

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=3\,.$$

5. Можно ли число $1^2+2^2+\dots+2001^2$ представить в виде суммы а) 2000; б) 1999 различных квадратов целых чисел?

6°. Известно, что для действительных чисел a, b, c выполняются равенства $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Найдите $a^4+b^4+c^4$.

7. Докажите, что если

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\,,$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0\,,$$

то $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ (x, y, z, a, b, c отличны от 0).

8. а°) Докажите, что если $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$, то

$$(a+b+c)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$$

для каждого натурального n.

б) Докажите, что если $\dfrac{1}{a+b+c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, то

$$\frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}}$$

для каждого натурального n.

9. Докажите, что если $a + b = c + d$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, то

$$a^n + b^n = c^n + d^n$$

для каждого натурального n.

10. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

если $xyz = 1$.

11. Числа x, y и z попарно различны и удовлетворяют соотношениям

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$

Чему может равняться xyz?

12. Докажите, что, если $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, то либо $x + y + z = 0$, либо $x = y = z$.

13. Докажите, что если $ad - bc = 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \neq 1.$$

14. Докажите, что если числа a, b, c попарно различны, то

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \neq 0.$$

Преобразования числовых выражений

15. Вычислите а) $\sqrt{2003^2 + 2003^2 \cdot 2004^2 + 2004^2}$;

б) $\sqrt{1993 \cdot 1995 \cdot 1997 \cdot 1999 + 16}$.

16. Запишите число

$$\sqrt{2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}},$$

использовав знак $\sqrt{\ }$ только один раз.

17. Запишите число

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$$

без «двухэтажных радикалов».

18. Какое из двух чисел больше:

$$3\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} \text{ или } \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}\,?$$

19°. Пусть α – корень уравнения $\alpha^3-\alpha-1=0$. Вычислите

а) $\sqrt[3]{3\alpha^2-4\alpha}+\sqrt[3]{3\alpha^2+4\alpha+2}$;

б) $\sqrt[3]{3\alpha^2-4\alpha}+\alpha\sqrt[4]{2\alpha^2+3\alpha+2}$.

20. Сравните числа

$$\sqrt{12\sqrt[3]{2}-15}+2\sqrt{3\sqrt[3]{4}-3} \text{ и } 3.$$

21*. Что больше:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \text{ или } 1?$$

22*. Найдите n-й знак после запятой в десятичном разложении числа $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$, если а) $n = 1000$; б) $n = 1001$.

23*. Пусть α – наибольший корень уравнения $x^3-3x^2+1=0$. Найдите первые 300 знаков после запятой в десятичном разложении числа α^{2000}.

24.** Пусть α – корень уравнения $x^3-x-3=0$. Что больше: α или $\sqrt[5]{13}$?

25. При каких целых неотрицательных m и n справедливо равенство

$$\left(3+5\sqrt{2}\right)^m=\left(5+3\sqrt{2}\right)^n\,?$$

26. Имеет ли уравнение $\left(x+y\sqrt{2}\right)^4+\left(z+w\sqrt{2}\right)^4=5+4\sqrt{2}$ решения в рациональных числах x, y, z, w?

27. Докажите, что $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{1967}$ можно представить в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, где a и b – целые числа, причем $3a^2-2b^2=1$.

28. Докажите, что для любого натурального числа n число $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ можно представить в виде разности $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, где m – целое.

29. Числа a, b, c – корни уравнения x^3-3x+1, причем $a < b < c$. Докажите, что $b^2-a=c^2-b=a^2-c=2$.

Цифры и числа

30°. Запишите в виде несократимой дроби число:

а) $\dfrac{1010111110101}{1100111110011}$; б) $\dfrac{1010\underbrace{11\ldots1}_{2n+1}1010}{1100\underbrace{11\ldots1}_{2n+1}10011}$.

31. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ девяток}}{}^3$.

32. Найдите сумму цифр всех натуральных чисел: а) от 1 до 2000; б) от 1 до 10^n.

33. Найдите а) количество; б) сумму цифр в десятичной записи числа $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99\ldots9}_{2^{2002}}$ (количество цифр в каждом числе в 2 раза больше, чем в предыдущем).

34*. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна а) 1994; б) 1993?

35. Наборщик рассыпал некоторое число, являющееся шестой степенью натурального числа a. Найдите a, если цифры рассыпанного числа 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9.

36. Докажите, что число

а) $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96$;

б) 16016003;

в) 1280000401;

г) $2^{10} + 5^{12}$;

д**) $\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$

является составным.

37. Делится ли число $2^{202}+1$ на $2^{101}+2^{51}+1$?

Последовательности и прогрессии

38. На доске записаны дроби $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{12}$.

а) Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученная сумма оказалась равна 0?

б) Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть, чтобы после некоторой расстановки знаков получилась сумма, равная 0?

39. Пусть S_k − сумма первых k членов арифметической прогрессии, a_m − ее m-й член. Найдите:

а) a_{p+q}, если $a_p = q$, $a_p = q$ ($p \neq q$);

б) S_{p+q}, если $S_p = q$, $S_q = p$ ($p \neq q$);

в) S_{p+q}, если $S_p = S_q$ ($p \neq q$).

40. Можно ли из последовательности $1, 1/2, 1/3, \ldots$ $\ldots, 1/n, \ldots$ выделить:

а) арифметическую прогрессию с 2000 членов;

б) бесконечную арифметическую прогрессию?

41. Найдите произведение первых n членов геометрической прогрессии, если их сумма равна S, а сумма их обратных величин равна T.

42. Найдите сумму:

а) $1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n}$;

б) $x+2x^2+\ldots+nx^n$.

43. Докажите, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

44. Для данного натурального числа n вычислите

$$\left(1+\frac{1}{1\cdot3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right).$$

45. Вычислите

$$\frac{3}{2^{2^2}}+\frac{3\cdot5}{2^{2^3}}+\frac{3\cdot5\cdot17}{2^{2^4}}+\ldots+\frac{\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\ldots\left(2^{2^{99}}+1\right)}{2^{2^{101}}}.$$

46. Найдите сумму:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{n}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{n}}}}.$$

47. Найдите суммы:

а) $\sin x+\sin 2x+\ldots\sin nx$;

б) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$;

в) $\dfrac{1}{\cos x\cos 2x}+\dfrac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\ldots+\dfrac{1}{\cos nx\cos(n+1)x}$.

48. Если число $\dfrac{2^n-2}{n}$ целое (n – натуральное число), то и число $\dfrac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ – тоже целое. Докажите это.

49. Существует ли арифметическая прогрессия, состояния из а) трех; б) четырех; в*) n; г**) бесконечного количества чисел, каждое из которых является целой положительной степенью натурального числа?

50. Может ли сумма 1993-х последовательных нечетных чисел быть 1993-й степенью некоторого числа?

51. Можно ли между числами $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ расставить знаки «плюс» или «минус» так, чтобы полученная сумма оказалась равной 0, если: а) $n = 1999$; б) $n = 2000$; в) $n = 2001$?

52. Можно ли между числами $1^3, 2^3, \ldots, n^3$ расставить знаки «плюс» или «минус» так, чтобы полученная алгебраическая сумма стала равна 0, если:

а) $n = 1999$; б) $n = 2000$; в) $n = 2001$?

Квадратный трехчлен

53. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$\left(x^2 + 2x\right)^2 - 1993\left(x^2 + 2x\right) + 1995 = 0.$$

54. В квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q независимо пробегают все значения из отрезка $[-1; 1]$. Найдите множество значений, пробегаемых действительными корнями этого уравнения.

55. Докажите, что если уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x_2 + p_2x + q_2 = 0$ с целыми коэффициентами имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.

56. Пусть α – корень уравнения $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 0$), а β – корень уравнения $x^2 - px - q = 0$. Докажите, что между числами α и β найдется корень уравнения $x^2 - 2px - 2q = 0$.

57. a, b, c – попарно различные числа. Докажите, что если уравнения $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2 + bx + ca = 0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2 + cx + ab = 0$.

58. а) Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0,$$

то квадратные уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

59. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Может ли иметь корни уравнение $f(f(x)) = x$?

60. Неравенство $x^2 + px + q > 0$ (p и q – целые числа)