

**В10.** Магнитный поток через каждый виток катушки, помещенной в магнитное поле, равен  $0,2 \text{ Вб}$ . Магнитное поле равномерно убывает до нуля за время  $0,4 \text{ с}$ , при этом в катушке индуцируется ЭДС  $15 \text{ В}$ . Сколько витков имеет катушка?

**В11.** Какова должна быть длина математического маятника на Луне, чтобы период его колебаний был таким же, как период колебаний математического маятника длиной  $66 \text{ см}$  на Земле? Ускорение силы тяжести на Луне в  $6$  раз меньше, чем на Земле.

**В12.** Энергия фотонов, которыми облучается металл, в  $5$  раз больше работы выхода электронов из этого металла. Какую долю (в процентах) от энергии фотонов составляет максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из металла?

**С1.** Велосипедист производит поворот радиусом  $30 \text{ м}$  на наклонном треке. Чему равна максимально допустимая скорость движения, если коэффициент трения равен  $0,5$ , а тангенс угла наклона трека к горизонту равен  $1/2$ ?

**С2.** Шар массой  $5 \text{ кг}$  и радиусом  $7 \text{ см}$  удерживается на наклонной плоскости с помощью горизонтальной нити, прикрепленной одним концом к верхней точке шара, а другим – к наклонной плоскости. Найдите силу натяжения нити, если ее длина  $25 \text{ см}$ .

**С3.** Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из них втрое увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряжение на другом конденсаторе?

**С4.** На собирающую линзу с фокусным расстоянием  $21 \text{ см}$  падает пучок света, параллельный ее главной оптической оси. На каком расстоянии от этой линзы нужно поставить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием  $0,09 \text{ м}$ , чтобы пучок, пройдя обе линзы, остался параллельным?

*Публикацию подготовил А.Черноуцан*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

МАТЕМАТИКА

*Письменный экзамен*

*Вариант 1*

*(физико-технический факультет)*

1. Упростите выражение  $\frac{a - 5\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} - 2} - \sqrt{a}$ .

2. Найдите количество натуральных двузначных чисел, которые делятся на 6 и не делятся на 12.

3. Найдите целое число – значение выражения  $\left(\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \sqrt{3}\right)^2$ .

4. Решите уравнение  $\sqrt{5x - 6} = |x|$ .

5. Решите неравенство  $3/(|x| + 1) \geq |x| - 1$ .

6. Найдите рациональное число – значение выражения  $\cos(\arctg(2\sqrt{2}))$ .

7. Решите уравнение  $3 \operatorname{tg} x = 2 \cos x$ .

8. Решите неравенство  $\arccos x - \arcsin x > \pi/6$ .

9. Найдите целое число – значение  $\log_3 5 \cdot \log_5 18 - \log_3 2$ .

10. Решите уравнение  $2^{x^2} = 3^x$ .

11. Решите неравенство  $\lg(x - 1)^2 \leq \lg(|x - 1|)$ .

12. Найдите функцию, график которой симметричен графику функции  $y = x^2$  относительно точки  $(1; 1)$ .

13. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(\lg(1 + x))/(1 - x)}.$$

14. Найдите множество значений функции  $y = x^2/(x^2 + 4)$ .

15. Найдите разность между суммой натуральных двузнач-

ных чисел, имеющих при делении на 11 остаток 3, и суммой таких же чисел, имеющих остаток 1.

**16.** Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы первых 5 ее элементов к сумме всех элементов равно  $31/32$ .

**17.** Найдите все значения  $a$ , при которых прямая  $y = -9x + a$  является касательной к гиперболе  $y = 1/x$ .

**18.** Найдите длину стороны треугольника, если опущенная на нее высота равна 6, а две другие стороны имеют длины 10 и  $15/2$ .

**19.** Найдите площадь боковой грани правильной треугольной пирамиды, если высота пирамиды равна 4, а радиус круга, вписанного в основание, равен 3.

**20.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых у системы

$$\begin{cases} ax^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + ay^2 = 1 \end{cases}$$

нет решений.

*Вариант 2*

*(физико-механический факультет)*

**1.** Упростите выражение  $\frac{a^2 - a - 2}{a - 2} - a$ .

**2.** Найдите количество четных натуральных двузначных чисел, которые делятся на 17.

**3.** Найдите целое число – значение выражения  $\frac{1}{\sqrt{3} + 2} + \sqrt{3}$ .

**4.** Решите уравнение  $\sqrt{8 - x^2} = x$ .

**5.** Решите неравенство  $\frac{4}{|x|} \leq x$ .

**6.** Найдите значение выражения  $\cos(\arcsin(1/2))$ .

**7.** Решите уравнение  $3 \sin x = 2 \cos^2 x$ .

**8.** Решите уравнение  $\arccos x + 3 \arcsin x = 5\pi/6$ .

**9.** Найдите целое число – значение выражения  $\log_5 2 \cdot \log_2 25$ .

**10.** Решите уравнение  $2^{x^2} = 32^x$ .

**11.** Решите неравенство  $\lg(x - 1)^3 \leq \lg(|x - 1|)$ .

**12.** Найдите функцию, график которой симметричен графику функции  $y = x^2$  относительно прямой  $y = 1$ .

**13.** Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x - 1)/(2 - x)}.$$

14. Найдите множество значений функции  $y = |x|/(|x| + 4)$ .
15. Найдите наибольшее значение суммы  $S_n$  первых  $n$  членов арифметической прогрессии  $\{a_n\}$ , если  $a_1 = 45$ , а  $d = -2$ .
16. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если отношение суммы первых 10 ее элементов к сумме первых 5 элементов равно 33.
17. Найдите все значения  $a$ , при которых прямая  $y = -x$  является касательной к гиперболе  $y = 1/(a + x)$ .
18. Найдите длину стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ , если  $AB = 15$ ,  $AC = 14$ ,  $\angle BAC$  острый, а высота  $BH$  равна 12.
19. Найдите апофему (высоту боковой грани) правильной треугольной пирамиды, если высота пирамиды равна 1, а сторона основания имеет длину 6.
20. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых у системы

$$\begin{cases} a|x| + y = 1, \\ |x| + ay = 1 \end{cases}$$

нет решений.

## ФИЗИКА

*Региональная олимпиада школьников Санкт-Петербурга  
для профессионально-ориентированной молодежи*

*Заключительный тур*

*Вариант 1*

1. Помощник машиниста вышел из кабины последнего вагона поезда метро и направился к выходу, расположенному у первого вагона, со скоростью  $v$ . В этот же момент поезд тронулся и начал двигаться с ускорением  $a$ . Чему равна длина поезда, если пока он ехал мимо помощника машиниста, тот прошел  $1/n$  часть пути?

2. Две бусинки массами  $m$  и  $2m$  надеты на гладкую горизонтальную нить и могут свободно скользить по ней. Бусинки соединены нерастянутой пружиной длиной  $L$  и жесткостью  $k$ . Бусинки раздвигают так, что длина пружины увеличивается в 1,5 раза, и отпускают. Найдите максимальные скорости бусинок.

3. Стержень массой  $m$  согнули посередине под прямым углом и подвесили на гвоздь. После того как на один из концов стержня прикрепили небольшой груз, стержень повернулся на  $15^\circ$ . Чему равна масса груза?

4. Пружинный маятник совершает свободные колебания с периодом  $0,6$  с. За  $0,05$  с груз прошел расстояние  $0,2$  см и достиг положения равновесия. Найдите амплитуду колебаний.

5. В начальном состоянии объем и абсолютная температура идеального газа равны  $V_0$  и  $T_0$  соответственно. Сначала газ подвергают изобарическому расширению до объема  $V_1$ , а затем – изохорическому нагреванию до давления  $p_1$ , в результате чего температура газа становится равной  $T_1$ . Найдите давление газа в начальном состоянии.

6. В трех вершинах квадрата со стороной  $a$  находятся три точечных заряда:  $+q$ ,  $+q$  и  $-q$ , причем оба положительных заряда лежат на одной стороне. Определите напряженность электрического поля в четвертой вершине квадрата.

7. В каком из резисторов в схеме, представленной на рисунке 1, выделяется наибольшая мощность, если  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $R_4 = 4$  Ом,  $R_5 = 5$  Ом,  $R_6 = 6$  Ом? Найдите эту мощность, если к схеме приложено напряжение  $12$  В.

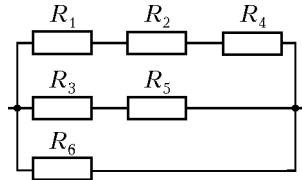


Рис. 1

8. Небольшой шарик массой  $m$ , подвешенный на нити длиной  $l$ , движется в горизонтальной плоскости по окружности с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите угол между нитью и вертикальной осью, если шарик имеет заряд  $q$ , а его движение происходит в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией  $B$ .

9. При включении однородного магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости витка радиусом  $R$  из изолированной проволоки, по витку протек заряд  $q$ . Затем виток при неизменном поле сложили в контур, состоящий из двух окружностей, как показано на рисунке 2. Какой заряд протечет по контуру при выключении поля? Радиус меньшей окружности равен  $R/4$ .

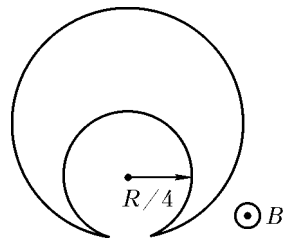


Рис. 2

10. Линза дает действительное изображение предмета, увеличивая его в 3 раза. Как изменится увеличение, если вдвое уменьшить оптическую силу линзы? Каким станет изображение? Расстояние между предметом и линзой остается неизменным.

МАТЕМАТИКА

1. Найдите целое число – значение выражения  $(\sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{5})^2$ .

2. Найдите целое число – сумму общих корней уравнений  $|x| = \sqrt{3-x}$  и  $x^3 = 4x - 3$ .

3. Найдите все упорядоченные пары  $(m; n)$  целых чисел – решения уравнения  $8m^3 = n^3 + 61$ .

4. Решите неравенство  $\sqrt{1-x^2} \leq 1-x$ .

5. Найдите наименьший из положительных корней уравнения  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ .

6. Решите уравнение  $\arccos x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \pi$ .

7. Решите неравенство  $\frac{2^{x^2} - 2^{5x-6}}{\log_2(x-1)} \leq 0$ .

8. Найдите все значения параметра  $a$ , для которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2x^2 + y, \\ y = ax^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

ФИЗИКА

1. Два камня брошены одновременно из одной точки с одинаковыми по модулю скоростями: один вертикально вверх, другой вертикально вниз. Они упали на землю с интервалом времени 2 с. С какой скоростью были брошены камни?

2. Ракета массой  $m$ , стартовавшая с поверхности Земли, летит с работающим двигателем с постоянной по модулю скоростью  $v$  по дуге окружности радиусом  $R$ , лежащей в вертикальной плоскости. Найдите силу тяги двигателя в тот момент, когда скорость ракеты направлена под углом  $\alpha$  к горизонту. Изменением массы ракеты и сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Однородный цилиндр массой  $m$  и высотой  $H$  стоит на дне цилиндрического стакана. В стакан наливают столько жидкости, что ее уровень совпадает с верхним основанием цилиндра. Плотность жидкости в  $n$  раз меньше плотности материала цилиндра, радиус стакана в  $k$  раз больше радиуса цилиндра. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить цилиндр из жидкости?

4. Найдите плотность газовой смеси водорода и кислорода, если масса кислорода больше массы водорода в  $N = 8$  раз. Давление смеси  $p = 100$  кПа, температура  $T = 300$  К.

5. На концах горизонтального непроводящего стержня длиной  $2L$  закреплены два маленьких шарика, каждый из которых имеет заряд  $Q$ . По стержню без трения может скользить маленькая бусинка массой  $m$ . Заряд бусинки равен  $q$ , причем заряды бусинки и шариков имеют одинаковые знаки. Найдите период малых колебаний бусинки.

6. Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для материала катода фотоэлемента, равна  $\lambda_{\text{кр}} = 10^{-6}$  м. Зеленый свет с длиной волны  $\lambda = 500$  нм падает на катод. При какой величине тормозящей разности потенциалов анода и катода прекращается ток через фотоэлемент?

#### ИНФОРМАТИКА

1. Заданы три числа:

в шестнадцатеричной системе счисления  $\mathbf{a} = 4D5$ ,

в двоичной системе счисления  $\mathbf{b} = 111010$ ,

в восьмеричной системе счисления  $\mathbf{c} = 65$ .

Найдите значение выражения  $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ . Результат представьте в десятичной системе счисления.

2. Числа  $(x, y)$  - координаты точки на плоскости. Изобразите область, в которой логическое выражение принимает значение «истина»:

$(|x| \leq 1) \text{ and } (|y| \leq 1) \text{ or } (y > 1) \text{ and } (y \leq 2 - |x|)$ .

3. Значения двумерного массива размером  $7 \times 7$  задаются следующим алгоритмом:

**нц для n от 1 до 7**

**нц для k от 1 до 7**

$a[n, k] := n - k + 1$

**кц**

**кц**

Сколько элементов массива будут иметь положительные значения?

4. Напишите фрагмент программы, который в заданном одномерном массиве из  $n$  элементов переставляет нулевые элементы в конец этого же массива (известно, что не все элементы массива нулевые).

5. Опишите словесно, что вычисляет следующий алгоритм:

**нц для i от 1 до 10**

$s[i] := 0$ ;  $k := 0$ ;

$j1 := 100 * (i - 1) + 1$ ;  $j2 := j1 + 99$ ;

```

нц для j от j1 до j2
  если a[j]>0 то s[i]:=s[i]+a[j]; k:=k+1; все
кц
s[i]:=s[i]/k;

```

кц

6. Задано натуральное число  $n$  и вещественное число  $x$ .  
Найдите значение цепной дроби

$$y = \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot x}{2 + x + \frac{x^2}{6 + \frac{x^2}{10 + \frac{x^2}{14 + \ddots + \frac{x^2}{2 \cdot (2 \cdot n + 1)}}}}}}$$

*Публикацию подготовили Т. Андреева, А. Басов, Г. Измайлов,  
М. Коробков, В. Родионов*