

4. Найдите площадь треугольника ABC , если его сторона BC равна 4, а углы A и B равны соответственно $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{8}$.

5. Найдите рациональное число, равное выражению

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2} \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}.$$

6. На плоскости расположен отрезок AB длины 24 и две точки P, Q . Точка P равноудалена от A и B на расстояние 15, а точка Q также равноудалена от A и B , но на расстояние 20. Найдите длину отрезка PQ , если известно, что она меньше длины отрезка AB .

7. Из деревни Аниково в деревню Волково вышел пешеход. Через 20 минут ему вслед выехал велосипедист и приехал в Волково на 5 минут раньше пешехода. Какую долю пути прошел пешеход к моменту встречи с велосипедистом, если они все время двигались с постоянными скоростями?

8. Из точки, взятой на окружности, проведены две хорды, образующие угол в 45° . Длина отрезка, соединяющего середины этих хорд, равна 2. Найдите длину радиуса окружности.

9. Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 8x - 3y, \\ y^2 + 2xy = 3x - 2y. \end{cases}$$

11. Ребра куба равны 1. Найдите расстояние между серединами его скрещивающихся ребер.

12. Найдите все положительные числа x , удовлетворяющие неравенству

$$\log_3(x+1) \cdot \log_2(x^2 + 3x + 6) \leq 4.$$

ФИЗИКА

В 2010 году олимпиада «Ломоносов» и профильный экзамен по физике в МГУ впервые проводились в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику, 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа.

Ниже приводятся примеры заданий олимпиады и профильного экзамена, сгруппированные по разделам программы.

Механика

Задание 1

Вопрос. Дайте определение центра масс системы материальных точек. Запишите формулу для импульса системы материальных точек.

Задача. Вырезанную из однородного листа металла пластинку в форме равностороннего треугольника ABC (рис.1)

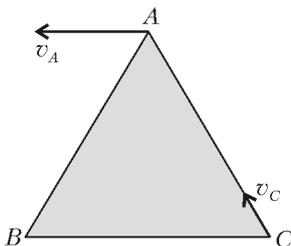


Рис. 1

положили на гладкую горизонтальную плоскость и толкнули. В момент времени $t = 0$ оказалась, что скорость \vec{v}_A вершины A этого треугольника перпендикулярна биссектрисе угла BAC , а скорость вершины C направлена вдоль стороны AC . Определите перемещение $\Delta \vec{r}$ центра треугольника за время τ после указанного момента.

Задание 2

Вопрос. Что такое трение покоя и трение скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

Задача. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтальной поверхностью угол α , покоится брусок. Его можно сдвинуть с места силой \vec{F}_0 , направленной вдоль наклонной плоскости вверх, либо силой \vec{F}_1 , направленной горизонтально перпендикулярно направлению силы \vec{F}_0 , причем $F_1 = kF_0$. Определите коэффициент трения бруска о наклонную плоскость μ , если $k = 0,2$, а $\alpha = \arctg 0,3$.

Задание 3

Вопрос. Дайте определение упругих деформаций. Сформулируйте закон Гука.

Задача. Колесо состоит из тонкого обода массой M и радиусом R и радиально расположенных спиц, соединяющих обод с втулкой, в которую вставлена ось (рис.2). На одну из спиц надета легкая пружина жесткостью k , один конец которой закреплен на втулке. К другому концу пружины прикреплен маленький шарик массой m , также надетый на спицу. В недеформированном состоянии длина пружины равна l ($l < R$). Колесо

располагают горизонтально и закрепляют ось вращения. Какую работу A нужно совершить, чтобы медленно раскрутить колесо до такой угловой скорости, при которой шарик коснется обода? Считайте, что спицы гладкие и невесомые. Трением в оси и диаметром втулки можно пренебречь.

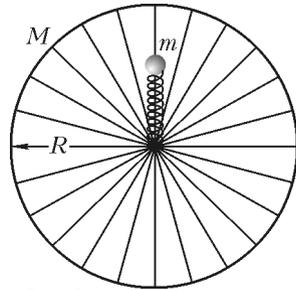


Рис. 2

Задание 4

Вопрос. Дайте определение равнопеременного прямолинейного движения. Приведите зависимости координаты и скорости тела от времени при равнопеременном движении.

Задача. К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью $k = 10 \text{ Н/м}$ подвешена гиря массой $m = 1 \text{ кг}$. В некоторый момент времени лифт начинает движение вверх с постоянным ускорением $a = 1 \text{ м/с}^2$. Какой путь s пройдет кабина относительно шахты лифта к тому моменту, когда длина пружины в первый раз станет максимальной?

Задание 5

Вопрос. Дайте определение гармонических колебаний. Что такое амплитуда и фаза гармонических колебаний?

Задача. Математический маятник отклонили от положения равновесия на малый угол $\alpha_0 = 1 \text{ рад}$ и отпустили без начальной скорости, после чего маятник стал совершать гармонические колебания. Найдите максимальное значение $v_{y \max}$ модуля вертикальной составляющей скорости маятника. Длина маятника $l = 0,4 \text{ м}$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Задание 6

Вопрос. Дайте определение периода колебаний. Запишите формулу для периода колебаний груза на пружине.

Задача. В U-образную трубку постоянного сечения, колена которой расположены вертикально, налили жидкость массой $m = 50 \text{ г}$. Определите период T колебаний жидкости в трубке, возбуждаемых небольшим смещением уровней от положения равновесия. Площадь поперечного сечения трубки $S = 1 \text{ см}^2$, плотность жидкости $\rho = 1 \text{ г/см}^3$. Сжимаемостью жидкости и ее трением о стенки трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Молекулярная физика и термодинамика

Задание 1

Вопрос. Дайте определение идеального газа. Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Задача. На металлическую пластинку напыляют серебряное покрытие, используя пучок атомов серебра, направленный перпендикулярно пластинке. С какой скоростью v_0 растет толщина покрытия, если атомы серебра оказывают на пластинку давление $p = 0,1$ Па? Кинетическая энергия одного атома серебра в пучке $E = 10^{-17}$ Дж, молярная масса серебра $M = 108$ г/моль, его плотность $\rho = 10,5$ г/см³. Постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

Задание 2

Вопрос. Дайте определение внутренней энергии термодинамической системы. Какими способами можно изменить внутреннюю энергию?

Задача. В двух одинаковых сосудах, соединенных между собой короткой тонкой трубкой с краном, находится гелий. Средняя квадратичная скорость теплового движения атомов гелия в первом сосуде v_1 , а во втором v_2 . Пренебрегая теплообменом гелия с окружающими телами, найдите отношение давления p_k , которое установится в сосудах после открывания крана, к начальному давлению p_1 в первом сосуде, если масса гелия во втором сосуде была в n раз больше, чем в первом.

Задание 3

Вопрос. Дайте определение количества теплоты. Сформулируйте первый закон термодинамики.

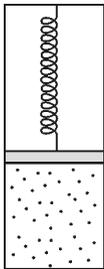


Рис. 3

Задача. В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым тонким поршнем находится идеальный одноатомный газ (рис.3). В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра. Пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 0,2$ м. Найдите количество теплоты ΔQ , которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда

удвоилось. Теплоемкостью сосуда, теплообменом с окружающей средой и трением можно пренебречь.

Задание 4

Вопрос. Что такое насыщенный водяной пар? Дайте определение влажности и относительной влажности воздуха.

Задача. Стакан объемом $V_0 = 290 \text{ см}^3$ перевернули вверх дном и медленно погрузили в воду на глубину $h = 5 \text{ м}$. При этом объем воздуха в стакане оказался равным $V_1 = 194 \text{ см}^3$. Найдите парциальное давление p водяного пара, находящегося в стакане, считая его насыщенным. Относительная влажность атмосферного воздуха $f = 60\%$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, плотность воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Температуру воздуха в стакане считайте постоянной. Размерами стакана по сравнению с глубиной его погружения можно пренебречь.

Задание 5

Вопрос. Дайте определение коэффициента полезного действия (КПД) теплового двигателя. Чему равно максимальное значение КПД?

Задача. Определите массу M воды с начальной температурой $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, которая превратится в лед при той же температуре за $\tau = 2 \text{ ч}$ работы холодильной машины, если температура радиатора холодильной машины $T = 373 \text{ К}$. Холодильная машина работает по циклу Карно, мощность ее двигателя $N = 0,6 \text{ кВт}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334 \text{ Дж/г}$.

Задание 6

Вопрос. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

Задача. В цилиндре под поршнем находятся воздух, водяной пар и вода. Число молей воздуха в $n = 3$ раза превышает число молей водяного пара, а масса воды равна массе водяного пара. Объем смеси изотермически увеличивают до тех пор, пока вся вода не испарится. Определите отношение давлений в цилиндре в конечном и начальном состояниях.

Электродинамика

Задание 1

Вопрос. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей. Чему равна напряженность электростатического поля равномерно заряженной проводящей сферы?

Задача. Три концентрические проводящие сферы, имеющие радиусы R , $2R$ и $3R$, находятся в вакууме. Внутренняя сфера несет заряд q , средняя сфера не заряжена, а внешняя заземлена. Какое количество теплоты ΔQ выделится после соединения внутренней сферы со средней сферой проводником, имеющим достаточно большое сопротивление?

Задание 2

Вопрос. Дайте определение емкости. Запишите формулу для емкости плоского конденсатора.

Задача. Плоский конденсатор, подключенный к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В, состоит из двух квадратных обкладок площадью $S = 1 \text{ м}^2$ каждая, расположенных на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга. Между обкладками находится диэлектрическая пластинка с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 5$, заполняющая весь объем конденсатора. Пластинку начинают выдвигать вдоль одной из сторон конденсатора с постоянной скоростью $v_0 = 2$ см/с. Какой по величине и направлению электрический ток I будет течь в цепи источника при этом? Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Задание 3

Вопрос. Как определяются работа и мощность электрического тока? Сформулируйте закон Джоуля–Ленца.

Задача. При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 0,16$ Ом в нагревательном элементе выделяется мощность $P_1 = 200$ Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила $P_2 = 288$ Вт. Найдите ЭДС \mathcal{E} аккумулятора.

Задание 4

Вопрос. Какими носителями заряда создается электрический ток в электролитах? Сформулируйте законы электролиза.

Задача. Электроды, подключенные к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В, погружены в водный раствор серной кислоты. Изменяя расстояния между электродами, их установили так, что батарея стала отдавать во внешнюю цепь максимальную мощность. Определите эту мощность P , если за время $\tau = 50$ мин при электролизе выделяется $m = 0,3$ г водорода. Поляризацией электродов при электролизе можно пренебречь. Элементарный заряд $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Авогадро $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$.

Задание 5

Вопрос. Как определяются модуль и направление вектора магнитной индукции? Сформулируйте закон Ампера.

Задача. Металлический стержень массой $m = 7,5$ г и длиной $L = 30$ см подвешен горизонтально на двух невесомых гибких проводниках длиной $l = 15$ см каждый. Стержень находится в однородном магнитном поле, индукция которого направлена вертикально и равна $B = 57$ мТл. По стержню пропускают кратковременный прямоугольный импульс постоянного тока силой I_0 и длительностью $\tau = 0,1$ с. При каком минимальном значении I_0 стержень совершит полный оборот, двигаясь по окружности вокруг оси, проходящей через точки подвеса гибких проводников? Считайте, что смещение стержня за время τ ничтожно мало. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Задание 6

Вопрос. Дайте определение напряженности электрического поля. Что такое силовые линии электрического поля?

Задача. Свободная заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл по окружности радиусом $R = 4$ м. В некоторый момент времени включают однородное электрическое поле, напряженность которого направлена параллельно вектору магнитной индукции и равна $E = 10$ В/м. Через какое время Δt после включения электрического поля кинетическая энергия частицы увеличится в $n = 2$ раза? Силу тяжести не учитывайте.

Оптика

Задание 1

Вопрос. Дайте определение светового луча. Сформулируйте законы преломления света.

Задача. Рыбак стоит на гладком прозрачном льду и смотрит вертикально вниз. Кажущееся рыбаку расстояние от верхней поверхности льда до дна озера равно L . Определите действительную глубину озера H (от верхней поверхности льда до дна), если толщина льда h , показатель преломления льда $n_{\text{л}}$, показатель преломления воды $n_{\text{в}}$.

Задание 2

Вопрос. Запишите формулу тонкой линзы. Чему равно увеличение, даваемое такой линзой?

Задача. В фокальной плоскости тонкой собирающей линзы расположен экран. На главной оптической оси линзы, перпендикулярной экрану, находится точечный источник света. На экране при этом наблюдается кольцевая неосвещенная область. На каком расстоянии d от линзы находится точечный источник, если площадь неосвещенной области в n раз больше площади линзы, а фокусное расстояние линзы равно F ?

Задание 3

Вопрос. Дайте определение фокусного расстояния и оптической силы линзы. Запишите формулу тонкой линзы.

Задача. На выпуклую поверхность тонкой плосковыпуклой линзы падает узкий пучок световых лучей, параллельный ее главной оптической оси (рис.4). На небольшом расстоянии от плоской поверхности линзы помещают параллельно ей плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 9,8$ мм с показателем преломления $n = 1,4$. На какое расстояние l сместится вдоль главной оптической оси линзы точка, в которой фокусируется пучок? Углы падения и преломления света считайте малыми.

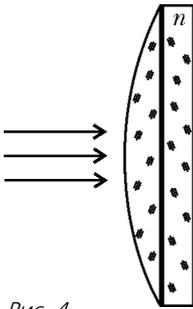


Рис. 4

Задание 4

Вопрос. Укажите, в каких физических явлениях проявляются волновые свойства света, а в каких – корпускулярные.

Задача. Плоская монохроматическая световая волна частично проходит через прямоугольную стеклянную призму Π с

малым углом α при вершине, а частично – мимо призмы (рис.5). Лучи света падают на призму перпендикулярно грани, прилегающей к углу α . Показатель преломления стекла равен n . Волны, прошедшие через призму и мимо нее, интерферируют на экране \mathcal{E} , который расположен перпендикулярно падающим на призму лучам. Определите расстояние Δx между соседними максимумами в интерференционной картине, если длина волны света равна λ .

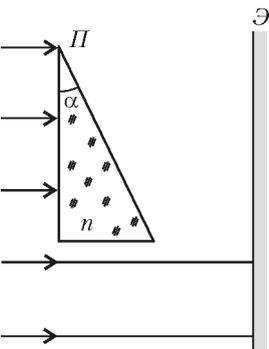


Рис. 5

Задание 5

Вопрос. Сформулируйте условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Задача. Интерференционная картина «кольца Ньютона» наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой, причем плоская поверхность линзы и пластинка параллельны друг другу (рис.6). Найдите радиус первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы $R = 10$ м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола, равный $n = 1,5$. Свет падает по нормали к пластинке.

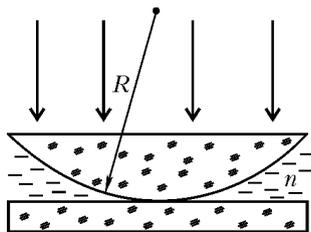


Рис. 6

Задание 6

Вопрос. Какое явление называется фотоэффектом? Сформулируйте законы фотоэффекта.

Задача. Шар радиусом R из вольфрама, покрытый тонким слоем цезия, помещен в вакуум. Шар освещают лазером, дающим излучение с длиной волны λ_1 . Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для цезия на вольфраме, равна λ_2 . Определите максимальный заряд q_{\max} , который может приобрести шар. Постоянная Планка h , элементарный заряд e , скорость света c , электрическая постоянная ϵ_0 .

Материалы по математике взяты из книги «Задачи вступительных испытаний по математике в МГУ имени М.В.Ломоносова в 2010 году (с решениями): Учебное пособие» (М.: Издательство Московского университета, 2010)

Публикацию материалов по физике подготовили В.Русаков, С.Чесноков

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В течение ряда лет Московский инженерно-физический институт – ныне Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» – проводит Всероссийскую отраслевую физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада проходит в несколько туров – с декабря по апрель. В 2009/10 учебном году олимпиада «Росатом» входила в перечень олимпиад школьников, утвержденный Министерством образования и науки России.

Ниже приводятся варианты заданий одного из туров олимпиады «Росатом» по математике и физике 2009/10 учебного года.

Олимпиада «Росатом»

МАТЕМАТИКА

1. Решите системы:

$$а) \begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 3y = 14; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2|x - 2| - 3y = -3, \\ x - 3|y - 4| = 2. \end{cases}$$

2. Решите уравнения:

$$а) \sqrt{2x^2 - 5} = 5 - 2x^2;$$

$$б) 2x^2 + \sqrt{3}\sqrt{2x^2 - 5} - 11 + \sqrt{-x} = \sqrt{-x}.$$

3. Решите уравнения:

$$а) \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0;$$

$$б) 2\sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 2 \cos x - 1 = 0.$$

4. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{7x - x^2} - 6 \left((8a - 15) \sin \frac{\pi x}{6} - 6 \cos \frac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9 \right) = 0$$

имеет ровно 5 решений. Решите уравнение при $a = 0$.