

нами a и $2a$ (рис.10). Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной перпендикулярно плоскости контура. Найдите заряд, который протечет через поперечное сечение провода при равномерном уменьшении индукции поля до нуля. Между пересекающимися на рисунке проводами электрический контакт отсутствует.

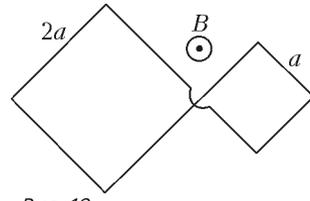


Рис. 10

Тур 2

Вариант 3

1. Из верхней точки окружности A одновременно начинают двигаться две одинаковые бусинки. Одна бусинка падает вдоль диаметра AD , другая скользит по абсолютно гладкой спице AB , вписанной в окружность и составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с вертикалью AD . Найдите отношение времени, за которое первая бусинка достигнет точки D , ко времени, за которое вторая бусинка достигнет точки B .

2. Однородный стержень длиной L и массой m шарнирно закреплен в точке O (рис.11). Середина стержня опирается на пружину. На стержне закреплены два маленьких груза массы $2m$ и m , положения которых показаны на рисунке. Найдите силу упругости, возникающую в пружине в положении равновесия стержня, если в этом положении стержень расположен горизонтально. Массой пружины и силами трения пренебречь.

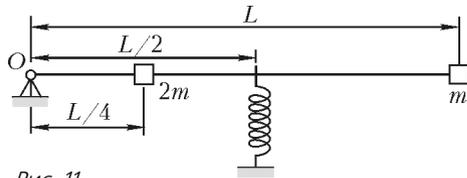


Рис. 11

3. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна $v_0 = 200$ м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два одинаковых осколка. Первый осколок упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в два раза больше начальной скорости снаряда. На какую максимальную высоту поднялся второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Вокруг горизонтальной оси O может свободно вращаться легкий рычаг, плечи которого равны $2L$ и L (рис.12). На концах

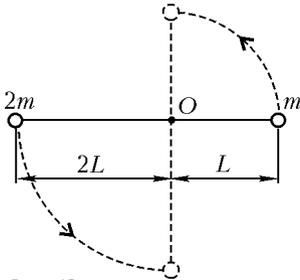


Рис. 12

рычага укреплены грузы, массы которых $2m$ и m . Первоначально рычаг удерживается в горизонтальном положении, как показано на рисунке. Затем рычаг отпускают без начальной скорости. Определите линейные скорости грузов в момент прохождения стержнем положения равновесия.

5. Теплоизолированный сосуд разделен пористой неподвижной перегородкой на две части. Атомы гелия могут свободно проникать через поры в перегородке, а атомы аргона – нет. В начальный момент в одной части сосуда находится $\nu_1 = 2$ моль гелия, а в другой – $\nu_2 = 1$ моль аргона. Температура гелия $T_1 = 300$ К, а температура аргона $T_2 = 600$ К. Считая аргон и гелий идеальными газами, определите температуру гелия после установления равновесия в системе.

6. Три положительных точечных заряда $+q$, $+q$ и $+2q$, связанных между собой нитями, расположены в вершинах правильного треугольника со стороной a . После разрыва одной из нитей заряды расположились вдоль одной прямой, как показано на рисунке 13. Найдите работу сил электрического поля, необходимую для такой перестройки системы расположения зарядов.

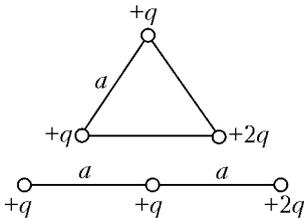


Рис. 13

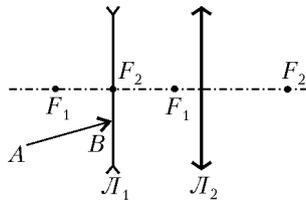


Рис. 14

7. Оптическая система состоит из рассеивающей линзы L_1 и собирающей линзы L_2 с общей главной оптической осью (рис.14). Главные фокусы рассеивающей линзы обозначены F_1 , а собирающей линзы – F_2 . Постройте дальнейший ход луча AB через оптическую систему.

8. Найдите максимальный заряд, который может накопиться на удаленном от других тел медном шарике радиусом $r = 3$ см при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны

$\lambda = 0,14$ мкм. Работа выхода для меди равна $A = 4,47$ эВ.

9. В схеме, показанной на рисунке 15, перед замыканием ключа K батарея, состоящая из двух одинаковых конденсаторов емкостью C каждый, не была заряжена. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсаторы заряжаются до напряжения U . Определите, какое количество теплоты выделится за это время на резисторе сопротивлением R_1 . ЭДС источника тока равна \mathcal{E} , его внутренним сопротивлением пренебречь.

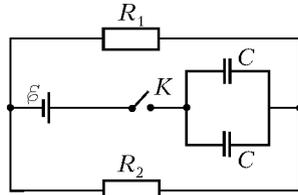


Рис. 15

10. Горизонтальный контур образован двумя замкнутыми на катушку индуктивностью L параллельными проводниками, находящимися на расстоянии h друг от друга (рис. 16). По проводникам без трения может скользить перемычка. Контур помещен в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B . В начальный момент времени неподвижной перемычке сообщают скорость v_0 . Определите массу перемычки и время τ , за которое скорость перемычки уменьшится в два раза, если известно расстояние s , которое пройдет перемычка до первой остановки. Сопротивлением всех элементов контура пренебречь.

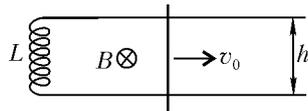


Рис. 16

Вариант 4

1. Северный полюс магнита удаляется с некоторой скоростью от металлического кольца, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно плоскости кольца (рис. 17). Каково направление индукционного тока в кольце? Ответ поясните.

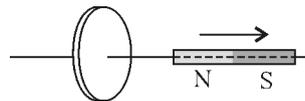


Рис. 17

2. На столе лежат стопкой 10 одинаковых книг. В каком случае нужно приложить меньшую силу: чтобы сдвинуть семь верхних книг или вытянуть из стопки шестую книгу сверху? Ответ обоснуйте.

3. Открытый бак, состоящий из двух соосных цилиндров диаметрами d и $2d$, заполнен жидкостью плотностью ρ , как показано на рисунке 18. Бак стоит на полу лифта, который опускается вниз с ускорением $a = 0,25g$. Определите силу

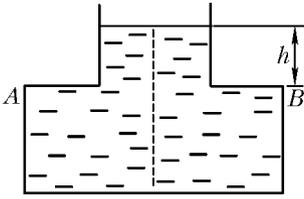


Рис. 18

(рис.19). В начальный момент груз удерживается так, что пружина находится в ненапряженном состоянии, затем его отпускают без начальной скорости. Найдите минимальное значение

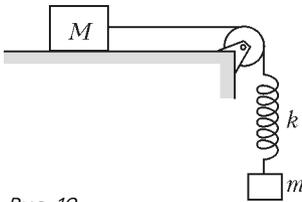


Рис. 19

коэффициента трения между брусом и горизонтальной плоскостью, при котором он еще будет оставаться неподвижным. Массой пружины, нити, блока и трением в нем пренебречь.

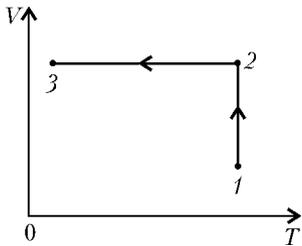


Рис. 20

5. Один моль идеального одноатомного газа сначала изотермически расширился при температуре $T_1 = 300$ К (рис.20). Затем газ охладили при постоянном объеме, понизив давление в 3 раза по сравнению с давлением в точке 2. Найдите количество теплоты, которое газ отдал на участке 2–3.

6. По кольцу радиусом R равномерно распределен заряд q . Определите потенциал в точке, находящейся на оси, перпендикулярной плоскости кольца, и отстоящей от центра кольца на $h = 2R$.

7. Предмет AB располагается перед собирающей линзой, как показано на рисунке 21,а. Линзу разрезали по оси OO_1 . Верхнюю половину линзы удалили, а нижнюю половину сдвинули вниз по отношению к предмету, как показано на рисунке 21,б. Постройте изображение предмета в оставшейся нижней половине линзы.

8. Найдите максимальный потенциал, до которого может зарядиться удаленный от других тел серебряный шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 0,12$ мкм. Работа выхода для серебра равна $A = 4,28$ эВ.

давления жидкости на горизонтальную поверхность AB , соединяющую оба цилиндра. Атмосферное давление равно p_0 .

4. Груз массой m подвешен через пружину жесткостью k на нити, перекинутой через блок и соединенной с брусом массой $M = 4m$, лежащим на горизонтальной плоскости

5. Один моль идеального одноатомного газа сначала изотермически расширился при температуре

6. По кольцу радиусом R равномерно распределен заряд q . Определите потенциал в точке, находящейся на оси, перпендикулярной плоскости кольца, и отстоящей от центра кольца на $h = 2R$.

7. Предмет AB располагается перед собирающей линзой, как показано на рисунке 21,а. Линзу разрезали по оси OO_1 . Верхнюю половину линзы удалили, а нижнюю половину сдвинули вниз по отношению к предмету, как показано на рисунке 21,б. Постройте изображение предмета в оставшейся нижней половине линзы.

8. Найдите максимальный потенциал, до которого может зарядиться удаленный от других тел серебряный шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 0,12$ мкм. Работа выхода для серебра равна $A = 4,28$ эВ.

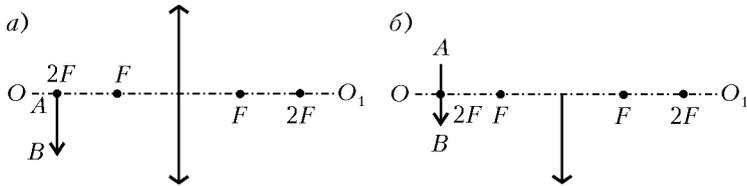


Рис. 21

9. В электрической цепи, представленной на рисунке 22, ключ K в начальный момент замкнут и по цепи идет постоянный ток. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R_2 после размыкания ключа? Параметры элементов цепи таковы: индуктивность катушки L , сопротивления $R_1 = 2R$, $R_2 = R$, $R_3 = R/3$, ЭДС источника тока \mathcal{E} . Активным сопротивлением катушки и сопротивлением источника тока пренебречь.

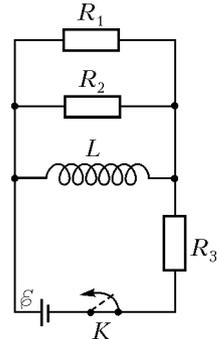


Рис. 22

10. На гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты покоится клин массой M . На грань, составляющую с горизонтом угол α , вертикально падает шарик массой m и ударяется о клин со скоростью v_0 . В результате клин начинает двигаться по плите. Определите скорость клина после удара. Время удара мало, удар считать абсолютно упругим.

Публикацию подготовил Ю.Струков

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА**

МАТЕМАТИКА

Дополнительное вступительное испытание

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^y = 4^x + 8, \\ y = \frac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

3. Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$\frac{4}{3 \cos^2 x + 2 \sin x - 1}.$$

4. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $\angle ABC = \frac{\pi}{12}$, $BC = 5$, $2AC > AB$, а медиана CD образует со стороной AC угол величиной $\frac{5\pi}{12}$.

5. Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк

все время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

6. В основании параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = 4$, боковые ребра параллелепипеда AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны основанию и равны 1. Сфера касается прямой DC_1 в точке C_1 , прямой DB_1 в точке, лежащей внутри отрезка DB_1 , и проходит через точку D_1 . Найдите радиус сферы.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. В арифметической прогрессии первый член отрицательный и равен -405 , разность равна 18. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5661. Найдите n .

2. Решите неравенство

$$\frac{1 + \log_{x-2}(-x^2 + 7x - 10)}{2 - \log_{5-x}(x^2 - 4x + 4)} \leq 2.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2(5x + \sin^2 y) + \left| \frac{5x + \cos 2y}{3} + \frac{3}{5x + \cos 2y} \right| = 4 \cos^2 \frac{7\pi}{4}.$$

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC длины 9 является биссектрисой острого угла BAD и делит четырехугольник на 2 треугольника с площадями $6\sqrt{2}$ и $12\sqrt{2}$. Этот четырехугольник вписан в окружность. Найдите ее радиус.

5. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 64 \cdot 25^{-\sqrt{y}} + (8 - 40a) \cdot 5^{-\sqrt{y}} - 5a \leq 0, \\ 40 \cdot 5^{-\sqrt{y}} = 80 \cdot 2^x + 5a + a \cdot 2^{-x} \end{cases}$$

имеет решение.

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $AD = 3$. Высота пирамиды длиной $\frac{12}{\sqrt{23}}$ падает в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Плоскость проходит через точку A , параллельна прямой BD , касается шара радиуса 1 с центром в точке S и пересекает ребро SC . В каком отношении она делит это ребро?

Вариант 3

(факультеты: наук о материалах, биоинформатики и биоинженерии, экономический (отделение экономики))

1. Решите уравнение

$$|-4^x + 2^{x+5} - 150| = 150.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x - y)\sqrt{y + 1} = 0, \\ \sqrt{x^2 + 6x + y + 10} = -y^2 - 8y + x + 2. \end{cases}$$

3. а) Решите уравнение

$$\frac{9(\sin x + \cos x)^2}{\cos 2x} + \frac{32(1 + 7\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x + 7\operatorname{tg} 4x} + 7 = 0.$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 120\pi]$, и выясните, что больше: эта сумма или число 23040.

4. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении $2 : 3$. Найдите тангенсы всех углов четырехугольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около четырехугольника, если наибольшая сторона его имеет длину 24.

5. Решите неравенство

$$4 + \cos x \log_3 x \log_4 81 + \sin^2 x \log_2 x^8 \leq 2 \cos x - 4 \cos 2x + \log_{\sqrt{2}} x^4.$$

6. Найдите все значения x , при которых наименьшее из чисел $(x + 1)^3$ и $x^2 - 3x - 2$ меньше наименьшего из чисел $x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ и $x^2 + 5x + 4$.

Вариант 4

(геологический факультет, Высшая школа государственного аудита, Высшая школа бизнеса, Высшая школа современных социальных наук, Московская школа экономики, социологический факультет, факультет государственного управления, экономический факультет (отделение менеджмента и вечернее отделение))

1. Докажите, что при

$$a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

число $6a - a^3$ — целое, и найдите это число.

2. Спортсмены Иванов и Петров участвовали в марафоне. Первую половину пути Иванов бежал в два раза быстрее Петрова. Потом он подвернул ногу и оставшуюся половину пути бежал в два раза медленнее Петрова. Петров же все время бежал с постоянной скоростью и пробежал всю дистанцию за 4 часа. Сколько времени понадобилось Иванову, чтобы добраться до финиша?

3. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, а $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) < 0$.

4. Решите неравенство

$$4^{\log_9(x^2+4x-5)} \leq 2^{\log_3(1+8x-x^2)}.$$

5. В трапеции $ABCD$ основание AD в полтора раза длиннее основания BC , а длины боковых сторон AB и CD равны. На стороне BC взята такая точка K , что $BK = 2KC$. Прямые AK и CD пересекаются в точке E , а прямые DK и AB – в точке F . Найдите величину отношения $BF : CE$.

6. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x^3+1} = 2$$

имеет хотя бы одно решение.

Вступительное испытание (вместо ЕГЭ)

Вариант 1

1. Представьте число

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{29} - 0,125$$

в виде несократимой обыкновенной дроби.

2. Решите неравенство

$$\frac{x+7}{x+1} \leq x+3.$$

3. Между пунктами A и B , расположенными на берегу озера, курсирует катер. На сколько процентов увеличится время в пути из пункта A в пункт B , если скорость катера уменьшится на 20%?

4. Решите уравнение

$$3 \log_8(x+1) = \log_2 \sqrt{2x+5}.$$

5. Стороны треугольника равны 3, 5, 7. Найдите величину большего из углов треугольника.

6. Решите неравенство

$$2 \cdot 3^x + 3^{1-x} \leq 7.$$

7. Параллелограмм, одна из сторон которого равна 3, описан вокруг окружности радиуса 1. Найдите площадь параллелограмма.

8. Решите уравнение

$$2 \sin^4 x + 7 \cos^3 x = 2.$$

9. Даны две окружности радиусов 2 и 3. Прямая касается обеих окружностей и пересекает отрезок, соединяющий их центры. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние между центрами равно 7.

10. Студент Василий добирался от железнодорожной станции до деревни Бабушкино. Он доехал на автобусе до поселка Дедушкино, где встретил знакомого, который за 10 минут подвез его до деревни на своей машине. Машина ехала в полтора раза быстрее автобуса. Когда пришло время уезжать, Василий за час доехал на велосипеде до поселка Дедушкино, а оттуда на такси доехал до станции. Такси ехало в 6 раз быстрее велосипеда, и в итоге Василий на обратную дорогу от деревни до станции потратил ровно столько же времени, сколько потребовалось, чтобы добраться от станции до деревни. Сколько времени ушло у Василия на дорогу в один конец?

11. В основании правильной пирамиды $ABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Через середины ребер AD , BC и CS проведена плоскость. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если длины боковых ребер пирамиды равны 7.

12. Найдите все целые положительные числа x и y , удовлетворяющие уравнению

$$y^3 = x^3 + 9x^2 + 17.$$

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{2}{x-2} \leq \frac{3}{x+1}.$$

2. Вчера лекарство в аптеке подорожало на 12%. Сколько стоило это лекарство до подорожания, если сегодня, после снижения цены на 5%, оно стоит 133 рубля?

3. Решите уравнение

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3-x}.$$