

*Вариант 2*

*(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)*

1. Первый член арифметической прогрессии равен  $\frac{1}{5}$ , разность прогрессии равна  $-\frac{1}{3}$ . Без помощи калькулятора найдите член прогрессии, ближайший к числу  $-\frac{38}{3}$ . Найдите номер этого члена в прогрессии.

2. Решите уравнение

$$3x + 7 = \sqrt{x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 42x + 49}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{2-x} \left( x^3 - 3x^2 - \frac{13}{8}x + \frac{31}{8} \right) + 2\log_{(2-x)^2} (x + 3) = 1.$$

4. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  углы при вершинах  $C$  и  $F$  прямые, а остальные углы равны между собой. Найдите площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен  $14 + 4\sqrt{2}$ ,  $AF = 3$ ,  $CD = 1$ ,  $EF = 4$ .

5. Решите уравнение

$$5 \sin 3x + 2\sqrt{6} \cos 3x = 7 \sin 7x.$$

6. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$2 \log_a x + 3 \log_{ax^2} a + 5 = 0$$

имеет ровно два различных корня, расстояние между которыми меньше  $6/25$ ?

*Вариант 3*

*(факультеты специальной техники и информационной безопасности)*

1. В 6 часов утра из  $M$  в  $N$  выехал велосипедист. Спустя полчаса из  $N$  в  $M$  выехал мотоциклист. Определите время их встречи, если известно, что в пункт назначения мотоциклист прибыл на 2 минуты позже велосипедиста и что скорость велосипедиста в три раза меньше скорости мотоциклиста.

2. Решите уравнение

$$\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{x+6}^2(x+5) = \log_{8-x}^2(x+5).$$

4. Площадь трапеции  $ABCD$  равна  $S$ , а основание  $AB$  в три раза больше основания  $CD$ . На боковой стороне  $AD$  выбрана точка  $K$  так, что площади треугольников  $ABK$  и  $BCK$  равны. Найдите площадь треугольника  $CDK$ .

5. Решите неравенство

$$2 + x < 5\sqrt{|x-4|}.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{x-y} \frac{xy}{2} = 2, \\ x + y = xy + 1. \end{cases}$$

*Вариант 4*

*(факультеты специальной техники  
и информационной безопасности)*

1. В 12 часов дня из  $A$  в  $B$  выехал мотоциклист. Спустя 24 минуты из  $B$  в  $A$  выехал автомобиль. Определите время их встречи, если известно, что в пункт назначения автомобиль прибыл на 6 минут раньше мотоциклиста и что скорость автомобиля в два раза больше скорости мотоциклиста.

2. Решите уравнение

$$\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{1-x}^2(x+3) = \log_{8-x+7}^2(x+3).$$

4. Площадь трапеции  $ABCD$  равна  $S$ , а основание  $BC$  в два раза меньше основания  $AD$ . На боковой стороне  $AB$  выбрана точка  $M$  так, что площади треугольников  $ADM$  и  $BCM$  равны. Найдите площадь треугольника  $CDM$ .

5. Решите уравнение

$$4 - x < 5\sqrt{|2+x|}.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{x+y} \left( \frac{3xy}{2} + 1 \right) = 2, \\ x - y = xy - 1. \end{cases}$$

*Задачи ежегодной олимпиады*

*(все факультеты)*

**1** (3 балла). К Андрею на дачу должен приехать друг, чтобы помочь ему выкопать картошку. Чтобы встретить друга, Андрей выехал с дачи на машине так, чтобы приехать на станцию к электричке, прибывающей в 13.00. По пути он встретил друга, идущего к даче пешком, поскольку он приехал на электричке, прибывшей на час раньше, и решил сам идти к даче. В результате друзья приехали на дачу на 30 мин раньше. Определите время встречи Андрея с другом.

**2** (3 балла). Найдите все решения неравенства  $\cos \frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$ , лежащие в интервале  $\left(-\frac{83}{20}; 0\right)$ .

**3** (4 балла). В параллелограмме со сторонами 3 и 5 проведены биссектрисы четырех внутренних углов. Найдите отношение площади четырехугольника, образовавшегося при пересечении биссектрис, к площади параллелограмма.

**4** (4 балла). Определите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $x + \sqrt{x(a-x)} = 1$  имеет хотя бы одно решение.

**5** (5 баллов). Известно, что натуральные числа  $a, b$  удовлетворяют двум условиям:

- сумма  $a$  и  $b$  равна 555,
- наименьшее общее кратное  $a$  и  $b$  в 26 раз больше, чем их наибольший общий делитель.

Найдите  $a$  и  $b$ .

**6** (5 баллов). На числовой прямой отложены точки с координатами  $a_k = k\sqrt{2}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Вправо от точки 0 откладывается отрезок, длина которого меняется, причем каждый следующий раз отрезок откладывается от конца предыдущего отрезка. Начальная длина отрезка равна 1. Если отрезок, отложенный в очередной раз, закрывает менее 5 точек  $a_k$ , то длина отрезка увеличивается на 1, если более 5 точек – уменьшается на 1, если же отрезок закрывает ровно 5 точек  $a_k$ , то его длина остается прежней. Верно ли, что начиная с некоторого момента времени длина откладываемого отрезка будет постоянной? Ответ обоснуйте.

ФИЗИКА

Задачи ежегодной олимпиады

(все факультеты)

**1** (3 балла). Скорость света в неподвижном веществе равна  $u = c/n$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $n$  – абсолютный показатель преломления вещества. Найдите скорость света  $u_1$  в веществе, движущемся равномерно со скоростью  $v$  относительно источника света так, что вещество удаляется от источника.

**2** (3 балла). Два шкива соединены ременной передачей, передающей вращение от одного шкива к другому (рис.1).

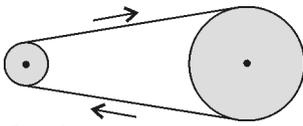


Рис. 1

Ведущий шкив вращается с частотой  $\nu_1 = 3000$  об/мин, ведомый шкив – с частотой  $\nu_2 = 600$  об/мин. Ведомый шкив имеет диаметр  $D_2 = 500$  мм. Какой диаметр  $D_1$  имеет ведущий шкив?

**3** (3 балла). С лодки массой  $M = 200$  кг, движущейся со скоростью  $v = 1$  м/с, ныряет мальчик массой  $m = 50$  кг, первоначально двигаясь в горизонтальном направлении. Какой станет скорость лодки  $v_2$  после прыжка мальчика, если он прыгает с кормы со скоростью  $v_1 = 4$  м/с в направлении, противоположном направлению движения лодки?

**4** (3 балла). При каждом ходе поршневой насос захватывает  $V_0 = 20$  л воздуха при нормальных условиях ( $p_0 = 1$  атм,  $T_0 = 273$  К) и нагнетает его в резервуар объемом  $V = 2$  м<sup>3</sup>. Температура воздуха в резервуаре поддерживается равной  $T = 300$  К. Сколько ходов  $n$  должен сделать поршень насоса, чтобы повысить давление в резервуаре от  $p_0 = 1$  атм до  $p = 8$  атм?

**5** (4 балла). К точкам 1 и 2 электрической цепи, состоящей из источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и пренебрежимо малым внутренним

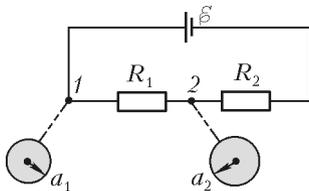


Рис. 2

сопротивлением и резисторов с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , длинными тонкими проводниками подсоединили первоначально незаряженные металлические шары с радиусами  $a_1$  и  $a_2$  соответственно (рис.2). Найдите заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ , установившиеся на каждом из шаров. Расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и соединительных проводниках пренебрежимо мал.

**6** (3 балла). Под каким углом  $\alpha$  должен падать световой луч из воздуха на поверхность стекла, чтобы угол преломления был в два раза меньше угла падения? Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным 1, абсолютный показатель преломления стекла  $n = 1,6$ .

**7** (3 балла). Под колоколом воздушного насоса находится вода, масса которой  $m_1 = 40$  г, а температура  $0^\circ\text{C}$ . Воздух из-под колокола быстро откачивают. Благодаря интенсивному испарению части жидкости вся оставшаяся вода замерзает. Определите массу  $m$  образовавшегося льда, если его температура также  $0^\circ\text{C}$ . Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330$  кДж/кг, удельная теплота испарения воды  $r = 2300$  кДж/кг.

### *Письменный экзамен*

#### *Вариант 1*

*(факультеты специальной техники и информационной безопасности)*

**1.** Колонна автомашин длиной  $L = 2$  км движется со скоростью  $v_1 = 36$  км/ч. Из начала колонны выезжает мотоциклист, который, достигнув ее конца, возвращается обратно. Скорость мотоциклиста постоянна и равна  $v_2 = 54$  км/ч. Какой путь  $s$  пройдет мотоциклист, пока он нагонит начало колонны?

**2.** Для увеличения скорости тела, движущегося по гладкому горизонтальному столу, от значения  $v$  до значения  $2v$  требуется совершить работу  $A = 3$  Дж. Какую дополнительную работу  $A'$  надо совершить для увеличения скорости этого тела от значения  $2v$  до значения  $3v$ ? Тело движется не отрываясь от поверхности стола.

**3.** Определите суммарную кинетическую энергию  $E_{\text{сум}}$  теплового поступательного движения молекул идеального газа в баллоне емкостью  $V = 10$  л, находящегося под давлением  $p = 4 \cdot 10^5$  Па.

**4.** Линии индукции однородного магнитного поля перпендикулярны плоскости кольца диаметром  $D = 20$  см, изготовленного из медной проволоки диаметром  $d = 2$  мм. С какой скоростью  $\Phi = \Delta B / \Delta t$  должна изменяться во времени магнитная индукция  $B$ , чтобы сила индукционного тока в кольце равнялась  $I = 10$  А? Удельное сопротивление меди  $\rho = 1,75 \cdot 10^{-8}$  Ом  $\cdot$  м.

**5.** На какой угол  $\delta$  отклонится луч света от первоначального направления, упав под углом  $\alpha = 45^\circ$  из воздуха на поверх-

ность стекла? Абсолютный показатель преломления стекла  $n = 1,60$ . Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным 1. Здесь  $\alpha$  – угол между падающим лучом и нормалью к поверхности стекла, проведенной в точке падения.

### Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Пассажир поезда заметил, что две идущие навстречу поезду электрички промчались мимо него с интервалом  $t_1 = 6$  мин. С каким интервалом  $t_2$  прошли эти электрички мимо станции, если поезд, в котором находился пассажир, шел со скоростью  $v_1 = 100$  км/ч, а скорость каждой из электричек  $v_2 = 60$  км/ч?

2. Для увеличения деформации легкой пружины от нуля до величины  $l$  требуется совершить работу  $A = 1$  Дж. Какую дополнительную работу  $A'$  надо совершить для увеличения деформации этой пружины от  $l$  до  $2l$ ?

3. Чему равна средняя кинетическая энергия  $E_{\text{ср}}$  теплового движения атомов аргона, если этот газ массой  $m = 2$  кг, находясь в сосуде объемом  $V = 2$  м<sup>3</sup>, создает давление  $p = 3 \cdot 10^5$  Па? Молярная масса аргона  $M = 0,040$  кг/моль, число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

4. Квадратная рамка со стороной  $a = 6,8$  мм, сделанная из медной проволоки площадью поперечного сечения  $S = 1$  мм<sup>2</sup>, помещена в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Индукция магнитного поля равномерно изменяется на величину  $\Delta B = 2$  Тл за время  $\Delta t = 0,1$  с. Чему равна при этом сила тока  $I$  в рамке? Удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом · м.

5. Луч света падает из воздуха на поверхность воды под углом  $\alpha = 40^\circ$ . Под каким углом  $\delta$  должен упасть луч из воздуха на поверхность стекла, чтобы угол преломления оказался таким же, как для воды? Абсолютный показатель преломления воды  $n_1 = 1,33$ , стекла  $n_2 = 1,60$ . Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным 1. Здесь  $\alpha$  и  $\delta$  – углы между падающим лучом и нормалью к соответствующей поверхности, проведенной в точке падения.

### Вариант 3

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Пригородный поезд отправляется строго по расписанию ровно в 12 часов дня по точным часам и движется с постоянным ускорением. Пассажир, часы которого отстают, выбегает на платформу ровно в 12 часов по своим часам и видит уже движущийся поезд, причем за время  $t = 6$  с мимо него проходит один вагон, а за следующие  $t = 6$  с – уже 2 вагона. На какой временной интервал  $\tau$  отстают часы пассажира?

2. На гладком столе находится тело, прикрепленное к концу горизонтально расположенной пружины жесткостью  $k = 0,05$  Н/м. Второй конец пружины закреплен неподвижно. Тело совершает малые гармонические колебания с амплитудой  $A = 10$  см. В тот момент, когда скорость тела равна  $v = 4$  см/с, смещение тела от положения равновесия равно  $x = 6$  см. Найдите массу тела  $m$ .

3. Идеальному одноатомному газу в количестве  $\nu = 2$  моль сообщили количество теплоты  $Q = 9,5$  кДж. При этом температура газа уменьшилась на  $|\Delta T| = 200$  К. Найдите работу газа  $A$  в этом процессе. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К).

4. При разомкнутом и замкнутом ключе  $K$  на участке  $ab$  цепи (рис.3) выделяется одна и та же мощность. Найдите величину сопротивления  $R_x$ , если  $R_0 = 28,2$  Ом, а напряжение на зажимах источника постоянно.

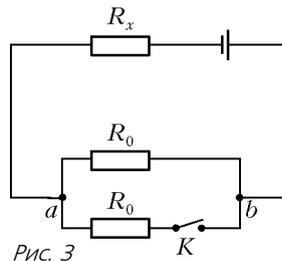


Рис. 3

5. Предельный угол полного внутреннего отражения при переходе светового луча из жидкости в воздух равен  $\theta_{\text{пр}} = 30^\circ$ . Длина световой волны в воздухе  $\lambda_{\text{в}} = 600$  нм. Найдите длину световой волны в жидкости  $\lambda_{\text{ж}}$ . Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным 1.

### Вариант 4

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Первый вагон поезда прошел мимо наблюдателя, стоящего на платформе, за время  $t_1 = 1$  с, а второй – за время  $t_2 = 1,5$  с. Длина вагона  $l = 12$  м. Найдите ускорение поезда  $a$ . Движение поезда считать равнопеременным.

2. На гладком столе находится тело массой  $m = 0,6$  кг, прикрепленное к концу горизонтально расположенной пружины жесткостью  $k = 0,15$  Н/м. Второй конец пружины закреплен неподвижно. Тело совершает малые гармонические колебания, при этом максимальное значение скорости тела равно  $v_m = 5$  см/с. Найдите смещение  $x$  тела от положения равновесия в тот момент, когда скорость движения тела равна  $v = 4$  см/с.

3. Идеальному одноатомному газу в количестве  $\nu = 2$  моль сообщили количество теплоты  $Q = 8400$  Дж. В этом процессе газ совершил работу  $A = 4600$  Дж. На какую величину  $\Delta T$  изменилась при этом температура газа? Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль  $\cdot$  К).

4. Два сопротивления по  $R = 100$  Ом подключаются к источнику ЭДС сначала последовательно, а затем параллельно. В обоих случаях тепловая мощность, выделяемая на каждом сопротивлении, оказалась одной и той же. Найдите ЭДС источника  $\mathcal{E}$ , если ток, протекающий в цепи при последовательном включении сопротивлений, равен  $I = 1$  А.

5. Луч света падает на плоскую поверхность раздела двух сред 1 и 2, при этом угол падения  $\alpha = 30^\circ$ , а угол преломления  $\beta = 60^\circ$ . Длина световой волны в первой среде  $\lambda_1 = 350$  нм. Найдите длину волны  $\lambda_2$  во второй среде.

*Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур*

## МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

### ФИЗИКА

#### *Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»*

Московский государственный институт электронной техники (МИЭТ) (технический университет) на протяжении многих лет проводит для учащихся одиннадцатых классов олимпиады по математике и физике, которые пользуются большой популярностью среди школьников Москвы и Московской области. Чтобы расширить круг участников, весной 2010 года МИЭТ провел олимпиаду по физике для учащихся 10–11 классов в заочной форме, используя интернет-технологии.

Олимпиада не содержала сверхсложных задач, которые могут решать только специально подготовленные школьники. Почти все задачи олимпиады допускают простые решения без громоздкой математики на основе знаний обычной школьной программы. Однако наряду с вполне стандартными задачами в заданиях олимпиады можно найти и новые, решения которых сразу не очевидны.

Олимпиада проходила в два тура. В олимпиаде приняли участие около 300 школьников из 49 различных населенных пунктов России и зарубежья.

Приглашаем всех желающих принять участие в олимпиаде «Поверь в себя!» весной 2011 года (<http://www.abiturient.ru/>, (499) 734-02-42, (499) 720-89-58).

#### *Задачи первого тура олимпиады 2010 года*

##### *10 класс*

1. Камень, брошенный с поверхности земли под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту со скоростью  $v = 20$  м/с, упал на крышу дома через время  $t = 2$  с. Определите высоту дома  $h$ . Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ответ округлите до целого.

2. Для определения величины силы магнитного взаимодей-

ствия намагниченной шайбы и железной плиты шайбу запускали с одной и той же начальной скоростью сначала по верхней поверхности горизонтально расположенной плиты, а затем по

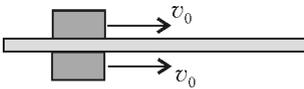


Рис. 1

нижней поверхности (рис.1). Во сколько раз магнитная сила больше силы тяжести, если смещение шайбы при скольжении во втором случае в  $n = 2$  раза больше, чем в первом?

**3.** Две шайбы в результате столкновения на гладком горизонтальном столе разлетелись в противоположных направлениях, как показано на рисунке 2.

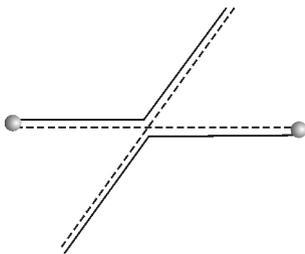


Рис. 2

Найдите величину отношения скоростей шайб перед столкновением  $v_1/v_2$ , если их массы равны  $m_1 = 100$  г и  $m_2 = 200$  г.

**4.** В одном из двух баллонов содержится углекислый газ, а в другом – водород. Объемы, температуры и давления газов одинаковы. Во сколько раз изменится масса газа в баллоне, где первоначально был водород, если баллоны соединить тонкой трубкой? Молярная масса углекислого газа  $44$  г/моль, молярная масса водорода  $2$  г/моль.

**5.** В длинном цилиндрическом теплоизолированном сосуде (рис.3) находится 1 моль одноатомного идеального газа, удерживаемый поршнем массой  $m = 0,83$  кг. На какую максимальную величину  $\Delta T$  увеличится температура газа, если поршню сообщить начальную скорость  $v = 3$  м/с? Теплоемкостью поршня и сосуда пренебречь. Процесс считать квазистатическим. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль · К).

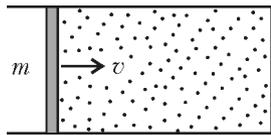


Рис. 3

**6.** Точечный заряд  $Q$  расположен посередине между зарядами  $2q$  и  $-q$  на одной с ними прямой. Определите отношение  $Q/q$ , при котором электрические силы, действующие на заряды  $2q$  и  $-q$  в этой системе, равны по величине.

**7.** На тонкое непроводящее кольцо радиусом  $R = 0,2$  м надета бусинка массой  $m = 1$  г и зарядом  $q = 1$  мкКл. Кольцо помещено в однородное электрическое поле величиной  $E = 10^4$  В/м, вектор напряженности которого  $\vec{E}$  лежит в плоскости кольца