ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

(заочный тур)

Задачи 1–6 предлагались для всех факультетов, а дополнительные задачи 7–10 были рассчитаны только на поступающих на механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. В волейбольном турнире каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу, причем 25% команд ни разу не выиграли. Сколько команд участвовало в турнире?

2. Решите уравнение

$$3\cos x + 4\sin x \sin y = \frac{5}{\cos 2010y}.$$

3. Найдите произведение двух трехзначных натуральных чисел, если оно втрое меньше шестизначного числа, получающегося приписыванием одного из этих двух чисел вслед за другим.

4. Решите уравнение

$$[n\lg 2] + [n\lg 5] = 2010$$

относительно натурального числа n (через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x).

5. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CH. Где на отрезке BH нужно поставить точку M, чтобы из отрезков AH, AM и CM можно было составить прямоугольный треугольник?

6. Найдите все значения $k > 2$, при каждом из которых существует непостоянная арифметическая прогрессия $x_1, \ldots, x_k$ и квадратный трехчлен $f(x)$, для которых $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ – геометрическая прогрессия.

7. Прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в точке A про углом $60°$ друг к другу. Заяц, начиная из точки A, совершает последовательные прыжки длиной 1 каждый: первый прыжок – в направлении прямой l_1, второй – в направлении l_2, третий – в направлении l_3, следующий – в направлении l_1 и т.д. (по циклу). В какой-то момент заяц остановился на одной из этих трех прямых на расстоянии 2010 от точки A. В каком направлении был совершен его последний прыжок?

8. Найдите наименьшее значение величины $2|x|-|y|$ при условии

$$\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1\,.$$

9. Существует ли тетраэдр, длины всех шести ребер которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt[3]{2}$?

10. Число P – произведение всех простых чисел, меньших 30. Из натуральных делителей числа P требуется составить множество M, в котором ни одно число не делится нацело на другое. Какое наибольшее количество чисел может содержать множество M?

Вариант 2

(очный тур: Москва)

1 (3 балла). У Пети есть два разных стакана цилиндрической формы. Он заметил, что банку сока можно так разлить по этим стаканам, что уровень сока в первом стакане составит 12 см, а во втором – 10 см, или так, что уровень сока в первом стакане составит 8 см, а во втором – 12 см. На каком уровне окажется сок в каждом из этих стаканов, если сок из банки разлить по стаканам поровну?

2 (3 балла). Сколько различных решений на отрезке $[0;\pi]$ имеет уравнение

$$6\sqrt{2}\sin x\,\mathrm{tg}x-2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x+3\sin x-1=0\ ?$$

Найдите эти решения.

3 (4 балла). Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 2 от этих чисел равна 15. Найдите эти числа, если

$$\log_2 b_1\cdot\log_2 b_5=-7\,.$$

4 (5 баллов). Окружность с центром в точке O, лежащей на стороне AB треугольника ABC, проходит через точку A, пересекает сторону AC в точке K, а сторону BC – в точках L и M. Известно, что $KC = CL = MB = 3$, $AK = 4$. Найдите отношение длин отрезков AO и OB.

5 (7 баллов). Найдите все значения параметра a, при которых для любого значения параметра b неравенство

$$(a+b)x^2+(3b-4a-7)x+4a-2b+6\geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

6 (8 баллов). Через точки M, N, K, L, лежащие соответственно на ребрах SA, SB, SC, SD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S – вершина), проведена плоскость. Известно, что $MK \perp NL$, $SN = 3SL$ и площадь треугольника SMK равна 12. Найдите площадь треугольника SLN.

Публикацию подготовили В.Алексеев, А.Бегунц, П.Бородин, О.Косухин, В.Панфёров, В.Ушаков, И.Шейпак

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ–2010»

МАТЕМАТИКА

1. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC взяты точки D и F соответственно так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 2 : 3$?

3. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил еще 1 млн р., его доля увеличилась еще на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить, чтобы увеличить свою долю еще на 0,04?

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}} \le 1+\frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

5. Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

6. Проекции некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости Oxz и Oyz удовлетворяют уравнениям $5x+\cos z=0$ и $z=\operatorname{arctg}\sqrt{y-3}$ соответственно. Найдите функцию $y=f(x)$, график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость Oxy.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x-13\cdot 5^x+a<0, \\ 12\sin^4 \pi x-\cos 4\pi x=11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

8. На ребре AS треугольной пирамиды $SABC$ отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NS$. Найдите площадь треугольника NBC, если площади треугольников ABC, MBC и SBC равны 1, 2 и $\sqrt{37}$ соответственно.

9. На доске написан квадратный трехчлен $x^2 + 9x + 47$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x, после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только у написанного на доске многочлена оказывается целый корень, Ваня получает оценку «пять». Может ли он обеспечить себе «пятерку» при любых действиях Тани, если: а) $m = 2$; б) $m = 3$?

10. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD – в точках A и D соответственно. Найдите $AK^2 + DL^2$.

МЕХАНИКА

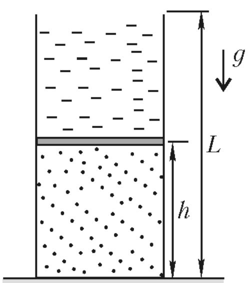
1. Два мотоциклиста движутся по прямолинейным трассам (каждый по своей) с постоянными скоростями. В 17:00 расстояние между ними было 40 км, в 17:40 – 30 км, в 18:10 – 30 км. а) Определите момент времени, в который мотоциклисты будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга. б) Определите величину скорости одного мотоциклиста относительно другого.

2. Спускаемые аппараты A и $Б$ движутся вертикально вниз с постоянными скоростями под действием силы тяжести, силы сопротивления воздуха и силы тяги тормозного двигателя. Спускаемый аппарат $Б$, втрое большего диаметра, чем аппарат A, будет двигаться с той же установившейся скоростью, что и аппарат A, если сила тяги его тормозного двигателя будет в 33 раза больше. Найдите отношение силы тяжести к силе тяги тормозного двигателя аппарата A, считая, что аппараты – однородные шары одной и той же плотности, изменение масс которых в процессе спуска пренебрежимо мало, и что сила сопротивления создается абсолютно упругими ударами молекул воздуха о корпус аппарата.

3. На расстоянии 200 м от прямолинейной дороги находится колодец с живой водой, к которому стремится раненый богатырь. В начальный момент времени богатырь находится на дороге и расстояние между ним и колодцем равно 1400 м. а) Через какое минимальное время богатырь может добраться до колодца, если он передвигается по дороге со скоростью 8 км/ч, а по бездорожью – в два раза медленней? б) Успеет ли он добраться до колодца, если ресурс его жизненных сил всего 13 мин?

4. Мама Лягушка массой $M_1 = 10$ г и ее маленький сын Лягушонок массой $M_2 = 5$ г сидели на плавающей дощечке массой m = 15 г, когда к ним на лодке приблизился рыболов. Лягушки, испугавшись, прыгнули с дощечки в воду, и рыболов увидел, как дощечка, получив импульс, начала двигаться по инерции. Как должны прыгать лягушки (по очереди или одновременно и в каком направлении), чтобы дощечка приобрела максимально возможную скорость? Найдите эту скорость. Считается, что лягушки, оттолкнувшись, приобретают одну и ту же скорость v = 2,4 м/с относительно дощечки. Сопротивлением воды пренебречь.

5. В процессе работы ученому потребовалось сравнить две величины $f(x_1)$ и $f(x_2)$, где $f(x) = 21x^5 + 32x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 4x + 3 + \sin x$, а числа x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) – соответственно меньший и больший корень квадратного уравнения $7x^2 + 6x + 1 = 0$. Электронных вычислительных средств под рукой не оказалось, но ученый, подумав, быстро справился с задачей. Попробуйте сделать необходимое сравнение и вы. Ответ обоснуйте.



6. Химический реактор (см. рисунок) представляет собой цилиндрическую емкость высотой L = 17,5 м, разделенную подвижным поршнем на две камеры. Первоначально поршень находился в самом верхнем положении. Сверху на поршень налили воду так, что поршень опустился до высоты h = 10 м над дном реактора, и в нижней камере реактора давление стало $p = 1{,}75 \cdot 10^5$ Па, а температура стала $T_0 = 63$ °C. До какой минимальной температуры необходимо нагреть нижнюю камеру реактора, чтобы вся вода вылилась, если атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3 и ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2?

Публикацию подготовили В.Алексеев, А.Бегунц, П.Бородин, А.Зеленский, О.Косухин, В.Панфёров, В.Ушаков, И.Шейпак, М.Юмашев

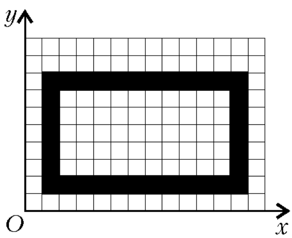
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

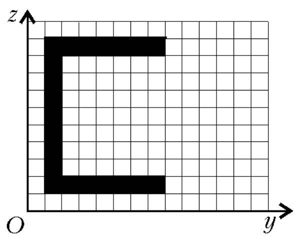
Межрегиональная многопрофильная олимпиада

МАТЕМАТИКА

I этап

1. На рисунке приведены проекции детали на координатные плоскости XOY и YOZ. Сторона клеточки равна 1. Каким может быть наибольший возможный объем детали?





2. В классе мальчиков больше, чем девочек. Среди каждых 10 учеников найдется по крайней мере одна девочка. Каково максимальное возможное число учеников в классе?

3. Каков наибольший радиус окружности, которую можно поместить внутрь трапеции с основаниями 5 и 17 и боковыми сторонами 10? (Такая окружность может касаться некоторых сторон трапеции.)

4. Известно, что замкнутая ломаная линия состоит из 29 звеньев, причем никакие два звена не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число точек самопересечения возможно для такой линии? (Вершины ломаной не считаются точками самопересечения.)

5. По прямой на некотором расстоянии друг от друга (не вплотную) катятся с равными скоростями 5 абсолютно упругих шариков. Еще 7 таких же шариков катятся с той же скоростью им навстречу. Сколько всего произойдет столкновений? (При абсолютно упругом столкновении двух шариков, движущихся навстречу друг другу с равными скоростями, шарики после соударения разлетаются в противоположные стороны с теми же скоростями.)

6. Натуральные числа a, b, c имеют соответственно 6, 9, 14 различных натуральных делителей (включая единицу и само число). $\text{НОД}(a,b,c)=6$. Найдите $\text{НОД}(a,b)\times\text{НОД}(b,c)$.

7. Найдите предпоследнюю цифру числа 29^{2010}.

8. Найдите наибольшее целое решение уравнения

$$3^{x^2-22x+120}+6^{2x^2-20x-23}=2^{x^2-22x+120}.$$

9. В треугольной пирамиде все высоты боковых граней, проведенные из вершины, равны 13, периметр основания равен 75, объем равен 750. Найдите высоту пирамиды.

10. Окружность с центром в точке $(4;1)$ касается параболы $y=\frac{1}{2}x^2$. Найдите абсциссу точки касания.

II этап

1. Можно ли расположить на плоскости 2010 лучей таким образом, чтобы ни через какую точку плоскости не проходило более двух лучей, каждый луч пересекался ровно с двумя другими и любые две точки на любых двух лучах можно было соединить ломаной, целиком содержащейся в объединении этих лучей?

2. Среди всех четверок натуральных чисел (k,l,m,n), $k>l>m>n$, найдите такую, что сумма $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ меньше единицы и ближе всего к ней.

3. С натуральным числом производится следующая операция: отбрасывается самая правая цифра его десятичной записи, после чего к полученному после ее отбрасывания числу прибавляется удвоенная отброшенная цифра. Например: $157\mapsto 15+2\times7=29$, $5\mapsto 0+2\times5=10$. Натуральное число называется хорошим, если после многократного применения этой операции получаемое число перестает меняться. Найдите наименьшее 100-значное хорошее число.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AA_1. H – точка пересечения высот треугольника ABC. Известно, что $AH=3$, $A_1H=2$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4. Найдите расстояние от центра этой окружности до H.

5. Пусть x – такое число из интервала $(\pi/2; \pi)$, что

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)=1 .$$

Докажите, что число

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4\left(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\right)$$

целое, и найдите его.

6. Через центр сферы радиуса $\sqrt{2}$ проведены 6 прямых, параллельных ребрам некоторого правильного тетраэдра. Точки пересечения этих прямых со сферой являются вершинами выпуклого многогранника. Вычислите объем и площадь поверхности этого многогранника.

Устный вступительный экзамен по математике на факультет математики

1. Найдите площадь фигуры на плоскости, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y > x^3, \\ x^2 + y^2 < 1, \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 > 0. \end{cases}$$

2. Восьми вершинам кубика поставлены в соответствие восемь чисел, среди которых есть 0 и 1. Каждое из восьми чисел заменили средним арифметическим трех чисел, поставленных в соответствие трем соседним вершинам. После десяти повторений этой операции в каждой вершине оказалось то же число, что и вначале. Найдите эти восемь чисел.

3. Найдите все решения уравнения $2^{\cos x} + 2^{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Длины всех высот треугольника – целые числа. Радиус вписанной окружности равен 1. Докажите, что треугольник правильный.

5. Докажите, что число, десятичная запись которого состоит из $k + 1$ единицы, k пятерок и 1 шестерки (в указанном порядке слева направо), является квадратом целого числа.

6. Отрезки AB и CD лежат на скрещивающихся прямых в пространстве. Найдите геометрическое место середин отрезков, один конец которых лежит на AB, а другой – на CD.

Публикацию подготовил Г.Рыбников

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Первый член арифметической прогрессии равен $-\frac{7}{3}$, разность прогрессии равна $\frac{1}{4}$. Без помощи калькулятора найдите член прогрессии, ближайший к числу $\frac{35}{6}$. Найдите номер этого члена в прогрессии.

2. Решите уравнение

$$2x+5=\sqrt{x^4-6x^3-22x^2+20x+25}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3-3x^2-\frac{37}{8}x+\frac{55}{8}\right)+2\log_{(8-7x)^2}(x+3)=1.$$

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах B и E прямые, а остальные углы равны между собой. Найдите площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14+8\sqrt{2}$, $AB=2$, $BC=5$, $DE=4$.

5. Решите уравнение

$$5\sin 11x+4\cos 3x+3\sin 3x=0.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_5 x+4\left(1-a^2\right)\log_{25x}5-2=0$$

имеет ровно два различных корня, расстояние между которыми больше $\frac{24}{5}$?