жен в точке опоры и потому силу тяжести, действующую на сами весы, в условии равновесия весов учитывать не нужно. Используем далее правило рычага. Если масса тела M, а длины плеч l_1 и l_2, то условия равновесия весов имеют вид

$$Ml_1 = ml_2,$$

$$Ml_2 = 1,44ml_1.$$

Перемножая эти уравнения и сокращая произведение $l_1 l_2$, находим

$$M = 1,2m.$$

3. Зависимость угла отклонения маятника от положения равновесия φ от времени t задается уравнением

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$ – циклическая частота колебаний. Дифференцирование зависимости $\varphi(t)$ по времени дает угловую скорость маятника, а чтобы найти его линейную скорость, нужно угловую скорость умножить на длину маятника:

$$v(t) = \varphi'(t)l = \varphi_0 \omega l \cos \omega t.$$

Из этой формулы следует, что максимальная скорость маятника равна $\varphi_0 \omega l$, а убывает скорость в два раза через время τ, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\varphi_0 \omega l}{2} = \varphi_0 \omega l \cos \omega\tau,$$

откуда находим

$$\tau = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

4. В равновесии сила тяжести, действующая на оболочку шара и гелий внутри, уравновешивается силой Архимеда, действующей на шар со стороны окружающего воздуха:

$$m + M = m\left(1 + \frac{M}{m}\right) = \rho V,$$

где m и M – массы гелия и оболочки шара, ρ – плотность воздуха. Величину M/m, которую нам нужно найти, далее обозначим буквой x. Выразим величины m и ρ с помощью уравнения Клапейрона–Менделеева. Для гелия внутри шара имеем

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}_{г}} RT, m = \frac{pV\mathrm{M}_{г}}{RT}.$$

Чтобы найти плотность воздуха, рассмотрим некоторый объем воздуха v. Учитывая, что давление воздуха равно давлению гелия внутри шара (оболочка по условию не обладает упругостью) и температуры газов равны, имеем

$$pv = \frac{m_1}{\mathrm{M_в}} RT, \ \rho = \frac{p\mathrm{M_в}}{RT},$$

где m_1 – масса воздуха в рассматриваемом объеме, $\rho = m_1/v$ – плотность воздуха. Теперь из условия равновесия получим

$$\frac{pV\mathrm{M_г}}{RT}(1+x) = \frac{pV\mathrm{M_в}}{RT},$$

откуда найдем

$$x = \frac{M}{m} = \frac{\mathrm{M_в} - \mathrm{M_г}}{\mathrm{M_г}} = 6,25.$$

5. Основная трудность задачи заключается в том, что тело движется не по прямой и поэтому направление силы трения непрерывно изменяется. Это означает, что, несмотря на постоянство величин действующих на тело сил (тяжести, реакции опоры и трения), его движение не является равноускоренным.

Рассмотрим промежуточное положение тела, когда вектор его скорости направлен под некоторым углом γ к направлению наибыстрейшего спуска с плоскости (рис.19). На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная противоположно скорости, и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно плоскости. Чтобы не загромождать рисунок, мы изобразили только силу трения и составляющую силы тяжести, параллельную плоскости, величина которой равна $mg\sin\alpha$. Второй закон Ньютона дает

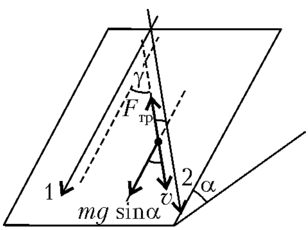

Рис. 19

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Спроецируем это уравнение на две оси: в направлении наибыстрейшего спуска с плоскости и параллельную скорости тела в рассматриваемый момент – эти оси на рисунке отмечены цифрами 1 и 2 соответственно. В результате получим

$$ma_1 = mg\sin\alpha - F_{тр}\cos\gamma,$$

$$ma_2 = mg\sin\alpha\cos\gamma - F_{тр},$$

где a_1 и a_2 – проекции вектора ускорения тела на рассматриваемые оси. Учтем теперь, что по условию $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$. В этом случае справедливо равенство

$$F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha .$$

Из трех последних уравнений получим

$$a_1 + a_2 = 0 .$$

Проекция ускорения тела на ось 1 определяет скорость изменения проекции скорости тела на направление наибыстрейшего спуска с плоскости, а проекция ускорения тела на ось 2 – скорость изменения величины скорости. Поэтому из равенства $a_1 + a_2 = 0$ следует, что сумма проекций скорости остается неизменной в любой момент времени. В частности, значение этой суммы в начальный момент времени равно ее значению в тот момент, когда вектор скорости наклонен под углом β к направлению наибыстрейшего спуска:

$$v_0 = v_1 + v_1\cos\beta .$$

Отсюда находим

$$v_1 = \frac{v_0}{1+\cos\beta} .$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\rho = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$, $R = \dfrac{\sqrt{265}}{32}$.

Пусть E – проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC\cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\Delta ADC} = \dfrac{AC\cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\dfrac{BC}{DC} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}} = 4$. Следовательно, $DC = \dfrac{BC}{4}$ и $BD = \dfrac{3BC}{4}$. Имеем $BC = \dfrac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда $BD = \dfrac{3\sqrt{5}}{8}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \dfrac{3\sqrt{5}}{8}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ – расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из ΔADC получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC\cdot DC\cos\angle ACD = 1 + \frac{5}{64} - \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{53}{64} .$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{53}}{16}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{265}}{32}.$$

2. πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Так как

$$\sin 3x\cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x),$$

$$\sin 2x\cos 6x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 4x),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 4x - \sin 2x}{2\cos x} = \frac{\sin x\cos 3x}{\cos x} = 0.$$

Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то получаем

$$\sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = \sin x(2\cos 2x - 1) = 0$$

при условии $\cos x \neq 0$. Тогда либо $\sin x = 0$ и $x = \pi n$ − решения, либо $\cos 2x = \frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ − решения.

3. $x\in(-2;18]$.

ОДЗ: $x\in(-2;18]$. Если $x\in(0;18]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая − отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x\in(-2;0]$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 > x^3 + 2x^2 + x - 18 = (x-2)\left(x^2+4x+9\right).$$

Так как $x^2+4x+9>0$ при всех x, то получаем $0 > x - 2$ − верно при всех $x\in(-2;0]$, т.е. это решения.

4. $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

С учетом ОДЗ ($x>0$, $y>1$, $x\neq 1$, $y\neq 2$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv = 2,\\ u+v=3,\end{cases}$$

где $u=\log_x(y+1)$, $v=\log_{y-1}(x+2)$. Отсюда либо $u=1$, $v=2$, либо $u=2$, $v=1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} y+1=x, \\ x+2=(y-1)^2. \end{cases}$$

Далее, $y^2-3y-2=0$, откуда $y=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учетом ОДЗ получаем $x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ – в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} y+1=x^2, \\ x+2=y-1. \end{cases}$$

Далее $x^2-x-4=0$, откуда $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{2}$. С учетом ОДЗ получаем $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$ – в ответ.

5. $a=2+\sqrt{2}$.

Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ |x|, & |x|>1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $x^2+(y-a)^2=(a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(0;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(0;1)$ и касается прямой $y=1$. Если $a<1$, то окружность лежит ниже прямой $y=1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(0;1)$. При $a=1$ окружность вырождается в точку A, т.е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(0;1)$. Если же $a>1$, то окружность расположена выше прямой $y=1$, и система кроме решения $(0;1)$ будет иметь еще два решения (симметричных относительно прямой $x=0$) в том случае, когда окружность касается прямых $y=x$ и $y=-x$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y=x, \\ x^2+(y-a)^2=(a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т.е. уравнение $x^2+(x-a)^2=(a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так: $2x^2-2ax+2a-1=0$, откуда $D=4a^2-8(2a-1)=$

$= 4\left(a^2 - 4a + 2\right) = 0$, т.е. $a = 2 \pm \sqrt{2}$. Так как $a > 1$, то получаем $a = 2 + \sqrt{2}$.

6. $AA_1 = 6$, $\rho = \dfrac{18}{5}$, $R = \dfrac{4\sqrt{39}}{5}$.

Обозначим $AB = 2b = 8$, $SC = h = 15$. Пусть E и K − проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE = x$, $OA_1 = OB_1 = OC_1 = R$ − радиус сферы. Так как OE − перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1 \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах получаем $B_1E \perp AB$. Аналогично $C_1E \perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E = C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B = \angle C = \dfrac{\pi}{3}$) получаем, что $BE = CE = b = 4$. Тогда $B_1B = \dfrac{b}{2} = C_1C$, $C_1A = B_1A = \dfrac{3}{2}b$, $B_1E = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведенных к сфере из точки A, следует, что $AA_1 = AB_1 = \dfrac{3}{2}b = 6$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK = CE = b$ и $SK = h - x$, то

$$SO^2 = (h - x)^2 + b^2 = OA_1^2 + SA_1^2,$$

где

$$OA_1^2 = R^2 = OE^2 + B_1E^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2,$$

$$SA_1 = SA - AA_1 = \sqrt{h^2 + 4b^2} - \frac{3}{2}b.$$

Следовательно,

$$(h - x)^2 + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + \left(\sqrt{h^2 + 4b^2} - \frac{3}{2}b\right)^2,$$

откуда получаем

$$x^2 + h^2 - 2xh + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + h^2 + 4b^2 + \frac{9}{4}b^2 - 3b\sqrt{h^2 + 4b^2},$$

т.е.

$$x = \frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2 + 4b^2} - 2b\right) = \frac{12}{30}\left(\sqrt{15 \cdot 15 + 64} - 8\right) = \frac{2}{5}(17 - 8) = \frac{18}{5}.$$

Тогда

$$R = \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}b^2} = \sqrt{\frac{18 \cdot 18}{25} + \frac{3}{4} \cdot 16} = \frac{4\sqrt{39}}{5}.$$

Вариант 2

1. $(-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

ОДЗ: $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$. Если $x \in (-2; -1)$, то $x + 2 < 1$, а $\sqrt{x+3} + 1 > 1$. Следовательно, получаем $\log_{x+2}\left(\sqrt{x+3}+1\right) <$, $< 0 < 1$ и поэтому $x \in (-2; -1)$ − решения. Если же $x > -1$, то $x + 2 > 1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+3} \le x+1$, которое имеет решение $x \in [1; +\infty)$.

2. $(3; 4)$, $(3; -4)$, $\left(-1; 2\sqrt[4]{6}\right)$, $\left(-1; -2\sqrt[4]{6}\right)$.

Перемножив уравнения системы, получим $y^2 - x^2 = y^2 -$ $- 2x^2 + 2x + 3$, т.е. $x^2 - 2x - 3 = 0$, откуда $x = 3$ или $x = -1$.

При $x = 3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25 - y^2} = 3$, откуда $y = \pm 4$. Подставляя $x = 3$ и $y = \pm 4$ во второе уравнение системы, получаем $4 + 3 = 7 = 16 - 18 + 6 + 3$ − тождество. Таким образом, обе пары $(3; -4)$ и $(3; 4)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $x = -1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25 - y^2} = 2\sqrt{6} - 1$, откуда $y^2 = 4\sqrt{6}$ и $y = \pm 2\sqrt[4]{6}$. Подставляя $x = -1$ и $y = \pm 2\sqrt[4]{6}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6} + \sqrt{25 - 4\sqrt{6}} = 4\sqrt{6} - 4 + 3$, т.е. $\sqrt{25 - 4\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} - 1$, что равносильно $25 - 4\sqrt{6} = 24 - 4\sqrt{6} + 1$ − тождество. Таким образом, обе пары $\left(-1; 2\sqrt[4]{6}\right)$ и $\left(-1; -2\sqrt[4]{6}\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. $x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим случай $t = \sin x \ge 0$. Исходное уравнение примет вид $\sin 3x + 3\sin x = -2\sin 3x \sin x$. Так как $\sin 3x = 3\sin x -$ $- 4\sin^3 x$, то получаем $\left(3t - 4t^3\right)(1 + 2t) + 3t = 0$. Отсюда находим

$$t\left(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3\right) = t(t-1)\left(4t^2 + 6t + 3\right) = 0.$$

Уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, либо $t = \sin x = 0$ и $x = \pi n$, либо $t = \sin x = 1$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t = \sin x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2\left(4t^2 + 2t - 3\right) = 0$. Уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$

имеет корни $t_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{4} < -1$ и $t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{4} > 0$, т.е. в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. Площадь: $\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние: $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, угол: $\arcsin\dfrac{4}{5}$.

Имеем $AO = 1$, $AS = \sqrt{5}$. Пусть $2\alpha = \angle ASC$, $2\beta = \angle ASD$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin 2\alpha = \frac{4}{5},\ \cos 2\alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin 2\beta = \frac{3}{5},\ \cos 2\beta = \frac{4}{5},\ \operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4}.$$

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми AS, CS и DS в точках M, N и P соответственно. В плоскости ASC из прямоугольного ΔKSM имеем $SM = SK\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного ΔNMS имеем

$$SN = \frac{SM}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3},\ MN = SN\sin 2\alpha = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

В плоскости ASD из прямоугольного ΔPMS имеем $MP = SM\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP = \dfrac{SM}{\cos 2\beta} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярна плоскости Π, то углом между прямой SD и плоскостью Π является $\angle SPM = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin\dfrac{4}{5}$. Так как $DP = SD - SP = \sqrt{5} - \dfrac{\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки D до плоскости Π равно $DP\sin\angle SPM = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости CDS из ΔPNS по теореме косинусов находим $PN^2 = \dfrac{5}{16} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{29}{9\cdot 16}$. Рассмотрим ΔMPN. Пусть $\angle PMN = \varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\dfrac{29}{9\cdot 16} = \dfrac{9}{16\cdot 5} + \dfrac{16}{9\cdot 5} - \dfrac{2}{5}\cos\varphi$, откуда $\dfrac{145}{9\cdot 16} = \dfrac{9\cdot 9 + 16\cdot 16}{9\cdot 16} - 2\cos\varphi$, и $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$. Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь сечения равна $MP\cdot MN\cdot\sin\varphi = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$.

Сложив уравнения системы, получим

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ и $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ и $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, т.е. это решения.

6. $R = \frac{\sqrt{14}}{3}$, $AC = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$, $BD = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$.

Пусть M, K, N, E – точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами AB, BC, CD и AD соответственно. Пусть P – середина AB, Q – середина CD, так что PQ – средняя линия трапеции. Пусть F и T – проекции точек B и C на AD. Пусть R – радиус вписанной в трапецию окружности, h – высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $BM = BK = x$, $CN = CK = y$. Тогда $AM = AE = 3 - x$, $DN = DE = 5 - y$, $BC = x + y$, $AD = AE + DE = 8 - (x + y)$, $PQ = \frac{BC + AD}{2} = 4$, $AF = AE - FE = 3 - 2x$, $DT = DE - TE = 5 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 – площади трапеций $PBCQ$ и $APQD$. Тогда

$$S_1 = \frac{R}{2}(BC + PQ) = \frac{R}{2}(4 + x + y),$$

$$S_2 = \frac{R}{2}(PQ + AD) = \frac{R}{2}(12 - x - y).$$

По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{4 + x + y}{12 - (x + y)}$, откуда $x + y = 1$. Так как

$$BF^2 = h^2 = AB^2 - AF^2 = 9 - (3 - 2x)^2 = 4\left(3x - x^2\right)$$

и

$$CT^2 = h^2 = CD^2 - DT^2 = 25 - (5 - 2y)^2 = 4\left(5y - y^2\right),$$

то $3x - x^2 = 5y - y^2$. Поскольку $x = 1 - y$, то $3(1 - y) - (1 - y)^2 = 5y - y^2$, откуда $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $R = \sqrt{5y - y^2} = \frac{\sqrt{14}}{3}$,

$$AT = 3 - x + y = \frac{8}{3}, \quad DF = 5 - y + x = \frac{16}{3},$$

$$AC = \sqrt{CT^2 + AT^2} = \sqrt{\frac{56}{9} + \frac{64}{9}} = 2\sqrt{\frac{10}{3}},$$

$$BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{\frac{56}{9} + \frac{256}{9}} = 2\sqrt{\frac{26}{3}}.$$

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Силы тяги на горизонтальном участке, на спуске и на подъеме равны, соответственно,

$$F_{\text{гор}} = \frac{N}{v}, \quad F_{\text{сп}} = \frac{N}{3v/2},$$

$$F_{\text{под}} = \frac{2N}{v/2}.$$

Пусть k – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью, β – угол наклона поверхности дороги к горизонту на подъеме. Так как ускорение на всех участках равно нулю, то

$$F_{\text{гор}} - kv = 0,$$

$$F_{\text{сп}} + mg\sin\alpha - k\frac{3v}{2} = 0,$$

$$F_{\text{под}} - mg\sin\beta - k\frac{v}{2} = 0.$$

Из записанных уравнений (с учетом значения $\sin\alpha = 1/30$) находим

$$\sin\beta = \frac{7}{50}.$$

2. Пусть V и ρ – объем и плотность стержня соответственно, T – начальная сила натяжения нити. Условия равновесия стержня до и после его перемещения имеют вид

$$\rho V g - \rho_0 \cdot 0{,}7 V g = T,$$

$$\rho V g - \rho_0 \cdot 0{,}3 V g = 1{,}2T.$$

Отсюда находим

$$\rho = 2{,}7\rho_0 = 2{,}7 \text{ г/см}^3.$$

3. Обозначим через V_2, p_2, T_2 и V_3, p_3, T_3 объем, давление и температуру в точках *2* и *3* соответственно. Работа газа в