равным

$$p_1 = p'_{\text{в}} + p_{\text{н}} ,$$

где $p'_{\text{в}}$ − парциальное давление воздуха, $p_1 = \rho g h + p_0$ − давление воды на глубине h. Для парциального давления воздуха справедливо уравнение

$$p'_{\text{в}} V_1 = p_{\text{в}} V_0 .$$

Объединяя записанные выражения, находим давление насыщенного водяного пара:

$$p = p_{\text{н}} = \frac{\rho g h V_1 - p_0 (V_0 - V_1)}{V_1 - V_0 f / 100\%} = 5 \text{ кПа} .$$

5. По определению, КПД тепловой машины равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}} ,$$

где A − работа, совершенная машиной за цикл, $Q_{\text{н}}$ − количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя, $Q_{\text{х}}$ − количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику. Для цикла Карно

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}} ,$$

где $T_{\text{н}}$ − температура нагревателя, а $T_{\text{х}}$ − температура холодильника. Поскольку цикл Карно обратим, его можно провести в обратном направлении. При этом рабочее тело будет проходить те же состояния, что и в тепловой машине, но в обратном порядке, и тепло будет передаваться не от нагревателя к холодильнику, а наоборот (за счет совершенной работы) − от холодильника к нагревателю. Поскольку $A = N\tau$, то для количества теплоты, полученного от холодильника, справедливо выражение

$$Q_{\text{х}} = \frac{N \tau T_{\text{х}}}{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}} .$$

При этом, в соответствии с условием задачи,

$$T_{\text{х}} = t + 273^\circ \text{ и } T_{\text{н}} = T .$$

По уравнению теплового баланса,

$$Q_{\text{х}} = \lambda M .$$

Решая записанную систему уравнений относительно искомой массы воды, получаем ответ:

$$M = \frac{N\tau (t + 273^\circ)}{(T - t - 273^\circ)\lambda} \approx 35 \text{ кг} .$$

6. Считая, что воздух и насыщенный водяной пар подчиняются уравнению Менделеева–Клапейрона, запишем уравнения начального состояния этих веществ:

$$pV_0 = \nu_{\text{в}} RT\ ,\ \ p_{\text{н}} V_0 = \nu_{\text{п}} RT\ ,$$

где p и $p_{\text{н}}$ – парциальные давления воздуха и насыщенного пара в смеси, R – универсальная газовая постоянная, T и V_0 – абсолютная температура и начальный объем смеси, $\nu_{\text{в}}$ – число молей воздуха, $\nu_{\text{п}}$ – число молей водяного пара в начальном состоянии, причем по условию $\nu_{\text{в}} = n\nu_{\text{п}}$. Отсюда находим

$$p = \frac{n\nu_{\text{п}} RT}{V_0}\ ,\ \ p_{\text{н}} = \frac{\nu_{\text{п}} RT}{V_0}\ .$$

По закону Дальтона начальное давление смеси воздуха и водяного пара в цилиндре равно сумме их парциальных давлений:

$$p_0 = p + p_{\text{н}} = \frac{(n+1)\nu_{\text{п}} RT}{V_0}\ .$$

Поскольку масса воды в цилиндре равна начальной массе пара, то, для того чтобы вся вода испарилась, объем смеси нужно увеличить в 2 раза. При этом давление воздуха в цилиндре станет равным $p/2$, а давление пара не изменится. Следовательно, конечное давление смеси в цилиндре будет

$$p_{\text{к}} = \frac{p}{2} + p_{\text{н}} = \frac{(n+2)\nu_{\text{п}} RT}{2V_0}\ .$$

Окончательный ответ:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_0} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{5}{8} = 0{,}625\ .$$

Электродинамика

1. На внутренней поверхности внешней сферы индуцируется заряд $-q$. Поскольку эта сфера заземлена, заряд на ее внешней поверхности равен нулю. Поэтому электростатическое поле существует только в пространстве между внутренней и внешней сферами. Примем потенциал заземленной внешней сферы за ноль. Тогда потенциал сферы радиусом R будет равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}\ .$$

Следовательно, начальная энергия электростатического поля равна

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 R}.$$

По прошествии достаточно большого времени после соединения внутренней и средней сфер весь заряд с внутренней сферы перейдет на среднюю сферу. Теперь электростатическое поле будет существовать только в пространстве между средней и внешней сферами. Потенциал средней сферы станет равным

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{q}{24\pi\varepsilon_0 R}.$$

Поэтому конечная энергия электростатического поля будет

$$W' = \frac{q\varphi'}{2} = \frac{q^2}{48\pi\varepsilon_0 R}.$$

При перемещении заряда по проводнику, соединяющему внутреннюю и среднюю сферы, выделится количество теплоты

$$\Delta Q = W - W' = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}.$$

2. Пусть пластинка выдвинута из конденсатора на x. Емкость конденсатора и заряд на нем при этом будут

$$C(x) = \frac{ax\varepsilon_0}{d} + \frac{a(a-x)\varepsilon_0\varepsilon}{d} = \frac{a\varepsilon_0}{d}\left(a\varepsilon - x(\varepsilon - 1)\right)$$

и $\quad q(x) = C(x)\mathcal{E}$,

где $a = \sqrt{S}$. За малое время Δt пластинка переместится на расстояние $\Delta x = v_0\Delta t$, и заряд конденсатора уменьшится на

$$\Delta q = \frac{a\varepsilon_0\mathcal{E}}{d}(\varepsilon - 1)v_0\Delta t.$$

Учитывая, что

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

получаем ответ:

$$I = \sqrt{S}\,\frac{\varepsilon_0\mathcal{E}}{d}(\varepsilon - 1)v_0 \approx 7{,}1\cdot 10^{-8}\ \text{А}.$$

Ток внутри источника направлен от его положительной клеммы к отрицательной.

3. Мощность, выделяемая в нагревательном элементе при подключении его к одному аккумулятору, равна

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2},$$

где R – сопротивление нагревателя, $\mathcal{E}$ – ЭДС аккумулятора, r – его внутреннее сопротивление. При подключении нагревателя к двум одинаковым аккумуляторам, соединенным последовательно, ЭДС и внутреннее сопротивление в цепи удваиваются, в результате чего мощность, выделяющаяся в нагревателе, будет

$$P_2 = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r+R)^2}.$$

Вводя величину $k = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}$, имеем $k = 2\frac{r+R}{2r+R}$. Отсюда

$$R = \frac{2r(k-1)}{2-k}.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{E}^2 = \frac{(r+R)^2}{R} P_1,$$

получаем ответ:

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{rP_2}{2\left(2-\sqrt{P_2/P_1}\right)\left(\sqrt{P_2/P_1}-1\right)}} = 12 \text{ В}.$$

4. Поскольку, по условию, поляризация электродов мала, то силу тока I в цепи можно считать постоянной. По закону Фарадея,

$$m = \frac{1}{F}\frac{\text{М}}{z} I\tau,$$

где $F = eN_\text{А} = 96{,}5$ кКл/моль – постоянная Фарадея, $z = 1$ – валентность, а $\text{М} = 1$ г/моль – атомарная масса водорода. Отсюда находим

$$I = \frac{mzF}{\text{М}\tau}.$$

С другой стороны, по закону Ома для полной цепи,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r},$$

где R – сопротивление электролита, а r – внутреннее сопротивление батареи. По закону Джоуля–Ленца мощность, выделяющаяся во внешней цепи, равна

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Элементарный анализ этого выражения показывает, что максимальная мощность во внешней цепи выделяется при $R = r$ и она равна

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}.$$

При этом

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2R}.$$

Поэтому максимальная мощность может быть записана в виде

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}I}{2} = \frac{\mathcal{E}mzeN_{\text{A}}}{2\text{M}\tau} \approx 24\ \text{Вт}.$$

5. Импульс силы Ампера за время τ равен $I_0BL\tau$. По второму закону Ньютона, $mv_0 = I_0BL\tau$, откуда скорость, которую приобретает стержень по окончании импульса тока, равна

$$v_0 = \frac{I_0BL\tau}{m}.$$

Уравнение движения стержня по окружности в верхней точке траектории имеет вид

$$\frac{mv^2}{l} = mg + T,$$

где T − суммарное натяжение нитей. Скорость стержня v в верхней точке минимальна, если $T = 0$. Следовательно,

$$v^2 = gl.$$

Из закона сохранения механической энергии вытекает равенство

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \frac{mv^2}{2} = \frac{5}{2}mgl, \text{ откуда } v_0 = \sqrt{5gl}.$$

Объединяя записанные выражения, находим ответ:

$$I_0 = \frac{m\sqrt{5gl}}{BL\tau} \approx 12\ \text{А}.$$

6. Уравнение движения частицы по окружности в однородном магнитном поле имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{R} = qv_0B,$$

где m − масса, q − заряд, v_0 − скорость частицы. Отсюда

$$v_0 = \frac{qBR}{m}.$$

Таким образом, кинетическая энергия частицы до включения электрического поля была

$$W_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m}.$$

После включения электрического поля частица за время Δt приобретет в направлении поля скорость $v_1 = \frac{qE}{m}\Delta t$, и кинетическая энергия частицы станет равной

$$W_1 = \frac{m\left(v_0^2 + v_1^2\right)}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} + \frac{(qE\Delta t)^2}{2m}.$$

По условию,

$$W_1 = nW_0.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$\Delta t = \sqrt{n-1}\,\frac{BR}{E} = 0{,}16 \text{ с}.$$

Оптика

1. Рассмотрим ход лучей *1* и *2*, идущих от точки O, расположенной на дне озера (рис.14). Будем считать, что оба луча попадают в глаз рыбака и создают в нем изображение точки O.

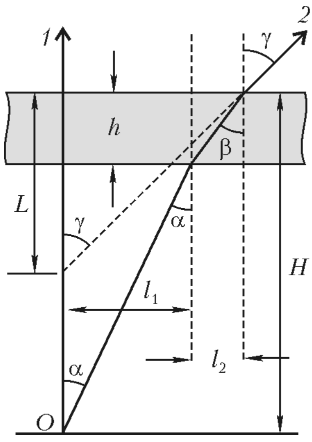

Рис. 14

Луч *1* падает нормально на нижнюю границу льда и не испытывает преломления. Луч *2* преломляется дважды, и поэтому кажущаяся глубина L озера отлична от реальной глубины H. Диаметр зрачка достаточно мал, поэтому и углы между лучами, попадающими в глаз рыбака, также малы. Следовательно, синусы и тангенсы углов падения и преломления равны величинам этих углов (в радианах). Используя закон преломления и обозначения, приведенные на рисунке, получаем

$$l_1 + l_2 = L\gamma, \quad l_1 = (H-h)\alpha, \quad l_2 = h\beta,$$

$$\gamma = n_л\beta = n_л\frac{n_в}{n_л}\alpha = n_в\alpha.$$

Отсюда находим

$$H = Ln_в - h\left(\frac{n_в}{n_л} - 1\right).$$

2. Часть световых лучей, испущенных источником, пройдет мимо линзы и сразу попадет на экран, образуя первую освещенную область. Другая часть лучей попадет вначале на линзу и после преломления в ней будет образовывать на экране вторую освещенную область. Между этими областями на экране будет наблюдаться темное кольцо с центром, расположенным на оси линзы (рис.15). Обозначим радиус линзы R, внутренний радиус темного кольца r_1, а внешний r_2. Из рисунка видно, что

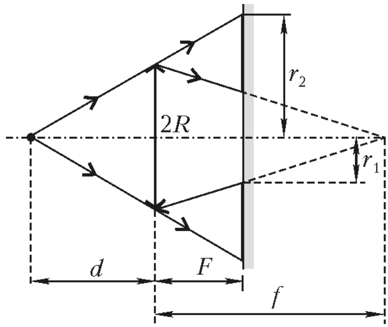

Рис. 15

$$\frac{r_1}{R} = \frac{f - F}{f} \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{R} = \frac{d + F}{d}.$$

Учитывая, что, в соответствии с формулой тонкой линзы, $f = \dfrac{Fd}{d - F}$, находим

$$r_1 = \frac{RF}{d} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{R(d + F)}{d}.$$

Площадь темного кольца равна

$$S = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) = \pi R^2\left(1 + \frac{2F}{d}\right).$$

Поскольку по условию задачи $S = n\pi R^2$, то искомое расстояние равно

$$d = \frac{2F}{n - 1}.$$

3. На рисунке 16 изображено прохождение луча через плоскопараллельную пластинку, здесь α – угол падения, β – угол преломления, d – толщина пластинки. Видно, что при прохождении пластинки луч смещается параллельно самому себе на расстояние a, которое можно найти из равенств

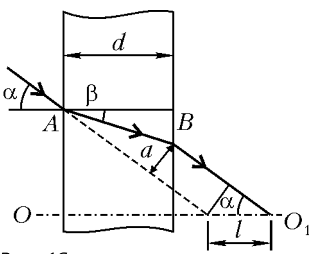

Рис. 16

$$AB = \frac{d}{\cos\beta} \quad \text{и} \quad AB = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Отсюда

$$a = d\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}.$$

В результате такого смещения точка пересечения луча с главной оптической осью линзы OO_1 сдвигается от линзы на расстояние

$$l = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

По закону преломления,

$$\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha.$$

С учетом малости углов α и β приближенно имеем

$$\sin\alpha = \alpha,\ \sin\beta = \frac{\alpha}{n},\ \sin(\alpha - \beta) = \alpha\left(1 - \frac{1}{n}\right),\ \cos\beta = 1.$$

Объединяя записанные выражения, находим

$$l = d\frac{n-1}{n} = 2{,}8\ \text{мм}.$$

4. Лучи, падающие на призму, преломляются на ее задней грани и отклоняются от своего первоначального направления на угол δ (рис.17). Так как угол при вершине призмы $\alpha \ll 1$, то, согласно обозначениям, приведенным на рисунке, и закону преломления, $\delta = \beta - \alpha = (n-1)\alpha$. Пусть на экране *Э* в точках *A* и *O* наблюдаются соседние интерференционные максимумы, т.е. $AO = \Delta x$. Поскольку $\delta \ll 1$, разность хода OB лучей *1* и *2*, выходящих из призмы после преломления, приближенно равна $OB = \Delta x\delta$. Согласно условию образования максимумов в интерференционной картине, $OB = \lambda$. Из записанных выражений следует ответ:

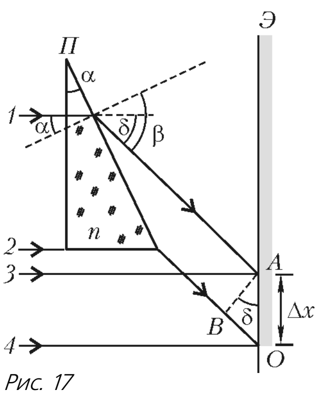

Рис. 17

$$\Delta x = \frac{\lambda}{(n-1)\alpha}.$$

5. Обозначим через Δ геометрическую разность хода двух лучей, идущих на расстоянии *r* от главной оптической оси линзы: луча *1′*, отраженного от верхней поверхности стеклянной пластинки, и луча *1″*, отраженного от нижней поверхности линзы (рис.18). По теореме Пифагора имеем

$$R^2 = r^2 + \left(R - \frac{\Delta}{2}\right)^2.$$

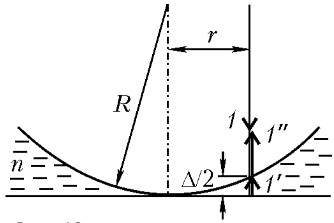

Рис. 18

Отсюда

$$R\Delta = r^2 + \frac{\Delta^2}{4}.$$

Учитывая, что $\Delta^2/4 \ll r^2$, приближенно получаем

$$\Delta = \frac{r^2}{R}.$$

Поскольку волны, соответствующие лучам *1* и *1′*, частично распространяются в бензоле, заполняющем зазор между линзой и пластинкой, оптическая разность хода между лучами *1′* и *1″* равна

$$\Delta_{\text{опт}} = n\Delta = \frac{nr^2}{R}.$$

Дополнительный фазовый набег, равный π, волна, соответствующая лучу *1′*, приобретает при отражении от оптически более плотной среды. Таким образом, условие первого интерференционного минимума имеет вид

$$\Delta_{\text{опт}} + \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2}\lambda.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$r = \sqrt{\frac{\lambda R}{n}} \approx 2 \text{ мм}.$$

6. Покидающие облучаемый шар электроны уносят с него отрицательный заряд, в результате чего шар заряжается положительно. Пусть при облучении шара светом с длиной волны λ_1 шар приобрел заряд q. Изменение потенциальной энергии электрона при перемещении его с поверхности шара в бесконечно удаленную точку равно

$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Зарядка шара прекращается, когда все электроны, покинувшие шар, возвращаются на него, т.е. когда их кинетическая энергия удовлетворяет условию

$$\frac{mv^2}{2} \le \Delta E_{\text{п}}.$$

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda_1} - A .$$

Здесь A – работа выхода, которая связана с длиной волны λ_2, соответствующей красной границе фотоэффекта для цезия на вольфраме:

$$A = \frac{hc}{\lambda_2} .$$

Объединяя записанные выражения, получаем, что шар может приобрести максимальный заряд

$$q_{\max} = \frac{4\pi\varepsilon_0 Rhc}{e}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right).$$

Этот ответ имеет смысл при выполнении условия $\lambda_1 < \lambda_2$. Если же $\lambda_2 < \lambda_1$, то фотоэффект не возникает и $q_{\max} = 0$.

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Олимпиада «Росатом»

МАТЕМАТИКА

1. а) $(5;3)$; б) $(5;3)$, $(11;7)$. **2.** а) $\pm\sqrt{5/2}$; б) -2. **3.** а) $\pi/6 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\{\pi/6 + \pi k, \pm 2\pi/3 + 2\pi n\}$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **4.** $(0;1/2) \cup (3/4;1)$; $\left\{1;6;3;6 - \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{1}{4}\right\}$. **5.** а) $\frac{5}{2} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; б) $2\pi/3$.

ФИЗИКА

1. При последовательном соединении у всех конденсаторов заряды одинаковые, а напряжения складываются. Поэтому, когда к цепи приложили электрическое напряжение U и на каждом конденсаторе установился заряд Q, справедливо равенство

$$U = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{3C} + \frac{Q}{2C} .$$

Отсюда находим

$$Q = \frac{6CU}{11} .$$

2. Неравноплечность и уравновешенность весов означает, что их плечи имеют разные длины, но центр тяжести весов располо-