Проведем через точку O_1 прямую параллельно AB и буквой C обозначим ее точку пересечения с продолжением радиуса O_2B за точку B. Четырехугольник O_1ABC – прямоугольник. Поэтому $CB = O_1A = 2$, $CO_2 = 2 + 3 = 5$ и по теореме Пифагора

$$AB = O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - CO_2^2} = \sqrt{49 - 25} = 2\sqrt{6}.$$

10. $2\frac{2}{3}$ часа. Обозначим буквами u и v выраженные в км/ч скорости, с которыми Василий ехал на автобусе и на велосипеде. Пусть также t – время в часах, затраченное им на дорогу от железнодорожной станции до деревни Бабушкино. Тогда скорость машины, на которой подвезли Василия до деревни, равна $\frac{3}{2}u$ км/ч, а расстояние от поселка до деревни равно $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}u$. Но то же расстояние он проехал на обратном пути за 1 час на велосипеде. Поэтому

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}u = v,$$

или $u = 4v$.

От станции до поселка Василий добирался $t - \frac{1}{6}$ часов со скоростью u км/ч. На обратном пути то же расстояние он проехал на такси со скоростью $6v$ км/ч за $t - 1$ часов. Имеем уравнение

$$u\left(t - \frac{1}{6}\right) = 6v(t-1).$$

Из найденных равенств следует $4\left(t - \frac{1}{6}\right) = 6(t-1)$, откуда находим $t = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ ч.

11. 16. Обозначим буквами E, F, G середины ребер AD, BC, CS соответственно. Так как прямая EF параллельна DC, то прямая EF параллельна плоскости CDS и, значит, плоскость сечения пересекает плоскость CDS по прямой, параллельной EF и, следовательно, параллельной прямой DC. Через точку G в плоскости DCS можно провести единственную прямую, параллельную DC, – среднюю линию треугольника DCS. Обозначив буквой H середину ребра DS, заключаем, что четырехугольник $EFGH$ есть заданное условием задачи сечение пирамиды. Так как FG, GH, HE – средние линии в боковых гранях пирамиды, заключаем, что $FG = HE = \frac{7}{2}$, $GH = 3$. Кроме того, $EF = DC =$

$= 6$, поэтому искомый периметр сечения равен $2 \cdot \frac{7}{2} + 3 + 6 = 16$.

12. (1; 3), (3; 5). При $x = 1$ данное уравнение превращается в равенство $y^3 = 27$, из которого следует $y = 3$. Итак, пара $x = 1$, $y = 3$ удовлетворяет данному уравнению.

Далее считаем, что $x \ge 2$. Перенося x^3 в левую часть уравнения и раскладывая ее на множители, получаем $(y-x)\left(y^2+xy+x^2\right) = 9x^2+17$, откуда следует

$$y - x = \frac{9x^2+17}{x^2+xy+y^2}.$$

Из этого равенства следует $y - x > 0$, так что $y - x \ge 1$, ведь x, y − целые числа. Пользуясь неравенствами $y \ge x+1$, $x \ge 2$, заключаем

$$1 \le y - x \le \frac{9x^2+17}{x^2+x(x+1)+(x+1)^2} = \frac{9x^2+17}{3x^2+3x+1} < 3.$$

Таким образом, возможны лишь два случая $y - x = 1$ и $y - x = 2$.

В первом случае получаем уравнение $(x+1)^3 = x^3+9x^2+17$. Его можно переписать в виде $6x^2 - 3x + 16 = 0$. Это уравнение не имеет действительных решений.

Во втором случае имеем уравнение $(x+1)^3 = x^3+9x^2+17$. После упрощения оно может быть переписано в виде $x^2 - 4x + 3 = 0$. Это уравнение имеет два целых корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Учитывая, что $x \ge 2$, оставляем только одно решение $x = 3$. Соответствующее значение второй переменной равно $x + 2 = 5$.

Вариант 2

1. $-1 < x < 2$, $x \ge 8$. **2.** 125 рублей. **3.** -4.

4. $2\sqrt{2}$.

Из прямоугольного треугольника ABC находим

$$AB = BC\cos\frac{\pi}{8}, \quad AC = BC\sin\frac{\pi}{8}.$$

Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}BC^2 \cdot \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = 4\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}.$$

5. $3/2$.

Нужно привести все логарифмы к одному основанию, например 2, и вынести дробные степени из-под логарифмов. В результате данное выражение может быть переписано так:

$$\frac{\log_2 \sqrt{2}}{\log_2 \sqrt{3}} \cdot \frac{\log_2 \sqrt{3}}{\log_2 \sqrt[3]{2}} = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}.$$

6. 7. Для решения задачи существенно, что точки P, Q и середина R отрезка AB лежат на одной прямой. Для доказательства этого заметим, что медианы PR и QR в равнобедренных треугольниках APB и AQB соответственно являются и высотами. Учитывая, что через точку R можно провести единственный перпендикуляр к прямой AB, заключаем, что прямые PR и QR совпадают. Затем используется теорема Пифагора:

$$PR = \sqrt{AP^2 - AR^2} = \sqrt{225 - 144} = 9,$$

$$QR = \sqrt{AQ^2 - AR^2} = \sqrt{400 - 144} = 16.$$

Точки P, Q могут лежать как по одну сторону от прямой AB, так и по разные. Если они лежат по разные стороны, то $PQ = 9 + 16 = 25 > AB$, но это противоречит условию задачи. Значит, они лежат по одну сторону и $PQ = 16 - 9 = 7$.

7. $\frac{4}{5}$. Если t и s – время в минутах, затраченное велосипедистом на путь до встречи и после встречи соответственно, то аналогичные затраты времени для пешехода равны $t + 20$ и $s + 5$ минут. Постоянство скоростей означает, что $\frac{t}{s} = \frac{t+20}{s+5}$. Отсюда следует $t = 4s$, и искомая величина равна $\frac{t}{t+s} = \frac{4}{5}$.

8. $2\sqrt{2}$. Длина хорды, на которую опирается вписанный угол α, равна $2R\sin\alpha$, где R – радиус окружности. Отрезок, заданный в условии, равен половине этой хорды, т.е. $R\sin\frac{\pi}{4} = 2$. Отсюда следует $R = \frac{2}{\sqrt{2}/2} = 2\sqrt{2}$.

9. $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Все решения данного уравнения удовлетворяют условию $\cos 3x \neq 0$. В области, определяемой этим неравенством, данное уравнение равносильно уравнению $\cos x + \sin 2x = \cos 3x$. Учитывая тождество $\cos 3x - \cos x = -2\sin x \sin 2x$, перепишем получившееся уравнение в виде $\sin 2x\,(2\sin x + 1) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\sin 2x = 0$ и $\sin x = -\frac{1}{2}$. Множество решений первого уравнения имеет вид $x = \frac{\pi k}{2}$, где k пробегает все целые числа. Из них лишь при четных значениях $k = 2n$ получаются точки $x = \pi n$, удовлетворяющие условию $\cos 3x \neq 0$. Множество решений второго уравнения имеет вид $x = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, где n пробегает целые числа. Все эти числа удовлетворяют равенству $\cos 3x = 0$ и потому не являются решениями данного уравнения. Итак, множество решений данного уравнения имеет вид πn, $n \in \mathbb{Z}$.

10. (0; 0), (3; 1), $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}\right)$. Данная система уравнений может быть переписана в виде

$$\begin{cases} x(2x+y) = 8x - 3y, \\ y(2x+y) = 3x - 2y. \end{cases}$$

Если первое уравнение системы умножить на y, а второе на x, и вычесть затем получившиеся уравнения друг из друга, получится уравнение $y(8x-3y) - x(3x-2y) = 0$, которое после упрощения приводится к виду

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy = 0.$$

Пара чисел $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяет этому последнему уравнению и, как легко видеть, исходной системе уравнений.

Далее можно считать, что $x \neq 0$. Обозначив $t = \frac{y}{x}$ и разделив обе части последнего уравнения на x, получим квадратное уравнение $3t^2 - 10t + 3 = 0$. Его корни равны 3 и $\frac{1}{3}$. Поэтому должно выполняться одно из равенств $y = 3x$ или $y = \frac{1}{3}x$. Подставляя эти выражения в первое уравнение исходной системы и учитывая, что $x \neq 0$, найдем еще две пары чисел $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{3}{5}$ и $x = 3$, $y = 1$. Эти пары чисел, как легко убедиться с помощью проверки, также являются решениями исходной системы уравнений.

11. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. *Указание.* Проведите плоскость через одно из выбранных ребер и середину другого. Этим задача сводится к плоской.

12. $0 < x \leq 2$. *Указание.* Функция, стоящая в левой части неравенства, монотонно возрастает на множестве $x > 0$ и принимает значение 4 в точке $x = 2$. Значит, множество решений данного неравенства имеет вид $0 < x \leq 2$.

Механика

1. Относительно неподвижной системы отсчета, которую будем считать инерциальной, пластинка совершает сложное движение – суперпозицию поступательного движения и вращения. Поскольку поверхность, по которой скользит пластинка, гладкая и горизонтальная, скорость $\vec{v}_Ц$ центра масс пластинки (точки $Ц$) постоянна. Рассмотрим мгновенное положение пластинки в момент времени $t = 0$ (рис.10). Проведем биссектрису AO угла BAC и восстановим перпендикуляр CO к стороне AC в вершине C. В момент времени $t = 0$ по условию $\vec{v}_A \perp AO$ и $\vec{v}_C \perp CO$. Следовательно, движение пластинки в этот момент времени можно представить как вращение с некоторой угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O. Поскольку

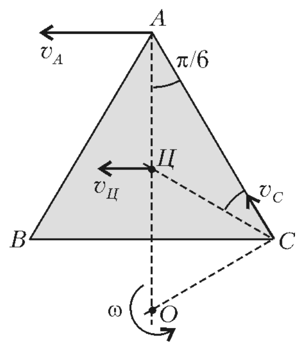

Рис. 10

$$OЦ = OC = \frac{AO}{2} \text{ и } \omega = \frac{v_A}{AO} = \frac{\vec{v}_Ц}{OЦ},$$

то

$$v_Ц = \frac{\vec{v}_A}{2}.$$

Учитывая, что точка $Ц$ движется равномерно и прямолинейно, получаем ответ:

$$\Delta\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{v}_A\tau.$$

2. Для того чтобы сдвинуть брусок вдоль наклонной плоскости вверх, нужно приложить к нему силу, модуль которой

$$F_0 = F_{ск} + F_{тр},$$

где $F_{ск} = mg\sin\alpha$ – модуль «скатывающей» силы (составляющей силы тяжести вдоль наклонной плоскости), $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ – модуль максимальной силы трения покоя, равный модулю силы трения скольжения. При действии на брусок горизонтальной силы $\vec{F}_1$ направление силы трения изменится, а модуль ее останется таким же. Силы, действующие на брусок в этом случае,

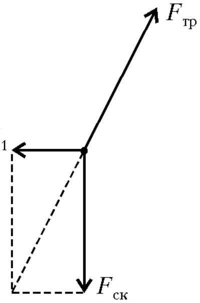

Рис. 11

изображены на рисунке 11 в проекции на наклонную плоскость. Брусок сдвинется с места, когда

$$F_1^2 + F_{ск}^2 = F_{тр}^2 .$$

Из записанных выражений находим

$$F_{тр} = \frac{F_0^2 + F_1^2}{2F_0}, \quad F_{ск} = \frac{F_0^2 - F_1^2}{2F_0}, \quad \frac{F_{тр}}{F_{ск}} = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} .$$

Решая эту систему уравнений относительно искомого коэффициента трения, получаем ответ:

$$\mu = \frac{1+k^2}{1-k^2}\operatorname{tg}\alpha = 0,325 .$$

3. Когда шарик касается обода колеса, удлинение пружины составляет $\Delta l = R - l$. Центростремительное ускорение шарика при этом равно $a = \omega^2 R$, где ω − угловая скорость вращения колеса. Согласно второму закону Ньютона и закону Гука, в случае касания шариком обода уравнение движения шарика имеет вид

$$m\omega^2 R = k(R-l) .$$

При этом модуль линейной скорости шарика и всех точек обода колеса $v = \omega R$. Следовательно, кинетическая энергия вращающегося обода с грузом

$$E_к = \frac{1}{2}(m+M)\omega^2 R^2 ,$$

а потенциальная энергия растянутой пружины

$$E_п = \frac{1}{2}k(R-l)^2 .$$

Согласно закону изменения механической энергии, работа по раскручиванию колеса

$$A = E_к + E_п .$$

Подставляя в это выражение записанные выше соотношения, получаем ответ:

$$A = \frac{1}{2}k(R-l)\left(\left(2+\frac{M}{m}\right)R - l\right).$$

4. Совместим начало системы отсчета, связанной с кабиной лифта, с нижним концом недеформированной пружины, а координатную ось $0x$ направим вертикально вниз. Когда кабина неподвижна, координата гири в положении равновесия равна

$$x_0 = \frac{mg}{k}.$$

В момент начала движения кабины скачком смещается вниз положение равновесия гири, координата которой в равновесии становится равной

$$x_1 = \frac{m(g+a)}{k}.$$

В результате начинаются гармонические колебания гири с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

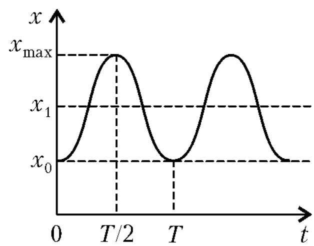

Рис. 12

который не зависит от ускорения кабины. График зависимости координаты гири x от времени t изображен на рисунке 12, на котором $t = 0$ соответствует моменту начала движения кабины. Как видно из рисунка, время τ, за которое длина пружины достигает максимального значения, равно половине периода колебаний гири:

$$\tau = \frac{T}{2}.$$

Путь, пройденный кабиной за это время, равен

$$s = \frac{a\tau^2}{2}.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$s = \frac{\pi^2 am}{2k} \approx 0{,}49 \text{ м}.$$

5. Угол отклонения маятника от вертикали изменяется во времени по закону

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ – круговая частота. Следовательно, модуль линейной скорости маятника $v = l|\alpha'|$ зависит от времени следующим образом:

$$v = \alpha_0 l\omega |\sin \omega t|.$$

Здесь через α' обозначена производная от угла α по времени. Модуль вертикальной составляющей $\vec{v}_y$ скорости маятника

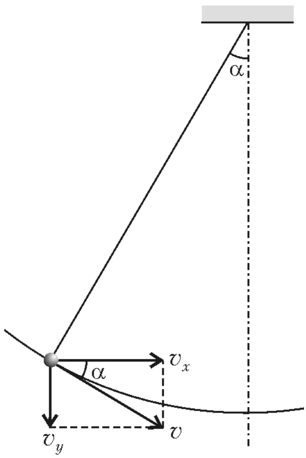

Рис. 13

равен (рис.13)

$$\left|v_y\right| = \left|v\sin\alpha\right| \approx \left|v\alpha\right| =$$

$$= \alpha_0^2 l\omega\left|\sin\omega t\cos\omega t\right| = \frac{\alpha_0^2 l\omega}{2}\left|\sin 2\omega t\right| .$$

Максимальное значение этой величины достигается при $\left|\sin 2\omega t\right| = 1$. Отсюда получаем

$$v_{y\,\max} = \frac{1}{2}\alpha_0^2\sqrt{gl} = 1 \text{ см/с} .$$

6. Смещение уровней жидкости от положения равновесия на расстояние x приведет к появлению в нижнем сечении U-образной трубки разности давлений, равной $2\rho gx$. Вследствие этого возникнет сила, возвращающая жидкость в положение равновесия и равная по модулю $2S\rho gx$. Под действием этой силы жидкость придет в ускоренное движение, причем модуль ускорения каждой частицы жидкости будет одним и тем же. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения жидкости имеет вид

$$ma = -2S\rho gx .$$

Это уравнение описывает гармонические колебания жидкости с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{2\rho gS}{m}} .$$

Учитывая, что период колебаний T связан с круговой частотой ω формулой $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем ответ:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2m}{\rho gS}} \approx 1 \text{ с} .$$

Молекулярная физика и термодинамика

1. На участке пластинки площадью S за время τ осаждается масса серебра

$$M_0 = mN_0S\tau ,$$

где m – масса атома серебра, N_0 – число атомов, попадающих на единичную площадку в единицу времени. С другой стороны,

$$M_0 = \rho v_0 S\tau .$$

Из этих выражений находим

$$v_0 = \frac{mN_0}{\rho}.$$

Давление, оказываемое атомами, осаждающимися на пластинке, равно

$$p = muN_0,$$

где u – скорость атомов, летящих к пластинке. Следовательно,

$$v_0 = \frac{p}{\rho u}.$$

Учитывая, что

$$u = \sqrt{\frac{2E}{m}} \text{ и } m = \frac{\mathrm{M}}{N_\mathrm{A}},$$

получаем ответ:

$$v_0 = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{2EN_\mathrm{A}}} \approx 9 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}.$$

2. Внутренняя энергия гелия (идеального одноатомного газа) равна суммарной кинетической энергии теплового движения его атомов:

$$U = \frac{m}{\mathrm{M}} N_\mathrm{A} \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

где m – масса гелия, M – его молярная масса, N_A – постоянная Авогадро, m_0 – масса атома гелия, v – средняя квадратичная скорость атомов гелия. С другой стороны, внутренняя энергия гелия связана с его абсолютной температурой T формулой

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mathrm{M}} RT,$$

где R – универсальная газовая постоянная. Уравнение состояния гелия имеет вид

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT,$$

где p – давление гелия, V – объем сосуда. Из записанных выражений находим

$$p = \frac{mv^2}{3V}.$$

После установления равновесия внутренняя энергия гелия по условию должна быть равна сумме первоначальных внутренних энергий гелия в первом и во втором сосудах, т.е.

$$\frac{(m + nm)v_\text{к}^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{nmv_2^2}{2},$$

где $v_к$ – средняя квадратичная скорость атомов гелия в конечном состоянии. Отсюда

$$v_к^2 = \frac{v_1^2 + nv_2^2}{n+1} .$$

Таким образом,

$$\frac{p_к}{p_1} = \frac{(1+n)v_к^2}{2v_1^2} = \frac{1}{2}\left(1 + n\frac{v_2^2}{v_1^2}\right).$$

3. В соответствии с первым законом термодинамики,

$$\Delta Q = \Delta U + A ,$$

где

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\left(T - T_0\right)$$

– изменение внутренней энергии газа,

$$A = \frac{k}{2}\left(4h^2 - h^2\right)$$

– работа газа, равная изменению потенциальной энергии упругой деформации пружины. Из уравнений Клапейрона–Менделеева, записанных для начального и конечного состояний газа, находим

$$p_0V_0 = \frac{kh}{S}hS = kh^2 = \nu RT_0 , \quad pV = \frac{k\cdot 2h}{S}\cdot 2hS = 4kh^2 = \nu RT .$$

Следовательно,

$$\Delta U = \frac{9}{2}kh^2 .$$

Учитывая, что $A = \frac{3}{2}kh^2$, получаем ответ:

$$\Delta Q = 6kh^2 = 24 \text{ Дж} .$$

4. До погружения в воду в стакане находилась смесь воздуха и водяного пара, причем давление этой смеси равно

$$p_0 = p_в + p_п ,$$

где $p_в$ – парциальное давление воздуха, $p_п = fp_н/100\%$ – парциальное давление пара. Отсюда

$$p_в = p_0 - \frac{f}{100\%}p_н .$$

После медленного погружения стакана в воду пар в стакане достиг насыщения, и давление газовой смеси в стакане стало