a и $a > 0$, то для существования корня $z > 0$ необходимо и достаточно: $z_{\text{верш}} > 0$ и существуют корни. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{40t-5a}{160} > 0, \\ (5a-40t)^2 - 320a \geq 0, \\ 0 < t \leq \min\left(1; \dfrac{5a}{8}\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} t > \dfrac{a}{8}, \\ 40t - 5a \geq \sqrt{320a}, \\ t \leq \min\left(1; \dfrac{5a}{8}\right). \end{cases}$$

$$40t - 5a \geq \sqrt{320a} \Leftrightarrow t \geq \frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a}{5}} \;\; \left(> \frac{a}{8}\text{, так как } a > 0\right).$$

Система принимает вид

$$\begin{cases} t \geq \dfrac{a}{8} + \sqrt{\dfrac{a}{5}}, \\ t \leq 1, \\ t \leq \dfrac{5a}{8}. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела решение, необходимо и достаточно

$$\begin{cases} \dfrac{a}{8} + \sqrt{\dfrac{a}{5}} \leq 1, \\ \dfrac{a}{8} + \sqrt{\dfrac{a}{5}} \leq \dfrac{5a}{8}. \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{\dfrac{a}{5}} = q \geq 0$. Тогда $\dfrac{a}{8} = \dfrac{5q^2}{8}$. Первое неравенство примет вид $\dfrac{5q^2}{8} + q - 1 \leq 0$, $5q^2 + 8q - 8 \leq 0$, $q_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{14}}{5}$. Тогда $\sqrt{\dfrac{a}{5}} \leq \dfrac{2\sqrt{14}-4}{5}$, $\dfrac{a}{5} \leq \dfrac{72-16\sqrt{14}}{25}$, $0 < a \leq \dfrac{72-16\sqrt{14}}{5}$. Второе неравенство дает: $\sqrt{\dfrac{a}{5}} \leq \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{5} \leq a$.

6. 1 : 2, считая от вершины S.

Пусть H – точка пересечения диагоналей AC и BD в прямоугольнике $ABCD$. Пусть данная в условии плоскость T пересекает SB в точке P, SD в точке Q, SC в точке L, SH в точке M. Так как $BD \parallel T$, то $PQ \parallel BD$ и $M \in PQ$, $M \in AL$. Пусть искомое отношение $\dfrac{SL}{LC} = y$. Пусть $LK \parallel MH$ и $K \in AC$. Тогда из подобия: $\dfrac{HK}{KC} = y$, $\dfrac{AH}{HK} = \dfrac{y+1}{y}$, $\dfrac{LK}{SH} = \dfrac{1}{y+1}$, $\dfrac{MH}{LK} =$

$= \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{y+1}{2y+1}$, $\qquad \dfrac{MH}{SH} = \dfrac{MH}{LK} \cdot \dfrac{LK}{SH} = \dfrac{y+1}{2y+1} \cdot \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{2y+1}$,

$\dfrac{PQ}{BD} = \dfrac{SM}{SH} = \dfrac{2y}{2y+1}$. Тогда $\dfrac{V_{ASPQ}}{V_{ASBD}} = \dfrac{S_{SPQ}}{S_{SBD}} = \left(\dfrac{PQ}{BD}\right)^2 = \left(\dfrac{2y}{2y+1}\right)^2$. Высота пирамиды $SAPQ$, опущенная из точки S, равна радиусу R данного в задаче шара. Поэтому $\dfrac{V_{ASPQ}}{V_{ASBD}} = \dfrac{S_{APQ} \cdot R}{S_{ABD} \cdot SH}$. Получаем $\dfrac{S_{APQ} \cdot R}{S_{ABD} \cdot SH} = \left(\dfrac{2y}{2y+1}\right)^2$. Проведем через A плоскость, перпендикулярную BD. Пусть она пересекает BD в точке V, а PQ в точке U. Тогда $AV \perp BD$, $AU \perp PQ$, $UV \perp BD$, $UV \parallel SH$, $UV = MH$. Имеем $2S_{ABD} = AB \cdot AD = AV \cdot BD$. Пусть $AB = a$, $AD = b$, тогда $BD = \sqrt{a^2+b^2}$ и $AV = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Пусть $SH = h$. Тогда

$$UV = MH = \frac{h}{2y+1},$$

$$AU = \sqrt{AV^2 + UV^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + \left(\frac{h}{2y+1}\right)^2}.$$

Имеем

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABD}} = \frac{PQ \cdot AU}{BD \cdot AV} = \frac{2y}{2y+1}\sqrt{1 + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \cdot \left(\frac{h}{2y+1}\right)^2}.$$

Получаем уравнение

$$\frac{2y}{2y+1}\sqrt{1 + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \cdot \left(\frac{h}{2y+1}\right)^2} \cdot \frac{R}{h} = \left(\frac{2y}{2y+1}\right)^2.$$

Сокращая на $\dfrac{2y}{2y+1}$, затем домножая на $2y + 1$ и возводя в квадрат, приходим к уравнению

$$y^2\left(\frac{4h^2}{R^2} - 4\right) - 4y - \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \cdot h^2 + 1\right) = 0.$$

Подставляя $a = 2$, $b = 3$, $h = \dfrac{12}{\sqrt{23}}$, $R = 1$, получаем $484y^2 - 92y - 75 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $\dfrac{1}{2}$.

Вариант 3

1. 5.

Положим $2^x = y > 0$. Получим $-y^2 + 32y - 150 = 150$ или $-y^2 + 32y - 150 = -150$, т.е. $-y^2 - 32y + 300 = 0$ или $-y^2 - 32y = 0$. В первом уравнении дискриминант $D < 0$, из второго $y = 0$ (не подходит) либо $y = 32$ и $x = 5$.

2. $\begin{cases} x = -6, \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \dfrac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}, \\ y = \dfrac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Из первого уравнения вытекают случаи:

1) $y = -1$. Тогда второе уравнение примет вид $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x + 9$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} x + 9 \geq 0, \\ x^2 + 6x + 9 = (x + 9)^2. \end{cases}$$

Второе уравнение дает $12x + 72 = 0$ и $x = -6$. Это решение удовлетворяет и первому неравенству.

2) $y = x$. Тогда второе уравнение примет вид $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = -x^2 - 7x + 2$. Положим $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = t \geq 0$. Тогда $-x^2 - 7x + 2 = -t^2 + 12$. Получаем $t = -t^2 + 12$, или $t^2 + t - 12 = 0$, его корни -4 и 3. Так как $t \geq 0$, то $t = 3$, т.е. $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = 3$. Отсюда $x^2 + 7x + 10 = 9$, $x^2 + 7x + 1 = 0$. Получаем 2 корня: $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}$. При этом $y = x$, и надо учесть ОДЗ: $y \geq -1$. Поэтому подходит только

$$y = x = \frac{-7 + \sqrt{45}}{2} = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

3. а) $\operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $S = 120 \operatorname{arctg} 4 + 7140\pi$ и $S < 23040$.

а) ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\cos 4x \neq 0$, $\operatorname{tg} x + 7 \operatorname{tg} 4x \neq 0$. При умножении знаменателя второй дроби на $\operatorname{ctg} x$ получается выражение в скобке в числителе. Поэтому вторая дробь равна $32\operatorname{ctg} x$. Имеем

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\cos 2x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}$$

(последний переход получен делением числителя и знаменателя на $\cos x\neq 0$). Уравнение принимает вид: $\frac{9(\operatorname{tg} x+1)}{1-\operatorname{tg} x}+\frac{32}{\operatorname{tg} x}+$ $+7=0$. Заменяя $\operatorname{tg} x$ на y, получаем: $\frac{9(y+1)}{1-y}+\frac{32}{y}+7=0$. Освобождаясь от знаменателей, получим $2y^2-16y+32=0$ и $y^2-8y+16=0$. (Если изначально все переводится в sin и cos, то получится $\sin^2 x-8\sin x\cos x+16\cos^2 x=0$ и после деления на $\cos^2 x$ придем к тому же уравнению.) Отсюда $\operatorname{tg} x=y=4$. Из равенства $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$ получаем, что $\cos^2 x=\frac{1}{17}$. Применяя дважды формулу $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, вычисляем $\cos 2x$ и $\cos 4x$; также, применяя дважды формулу $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, вычисляем $\operatorname{tg} 2x$ и $\operatorname{tg} 4x$. Все условия из ОДЗ выполняются, т.е. $x=\operatorname{arctg} 4+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) $x=\operatorname{arctg} 4+\pi n\in[0;120\pi]$ при $n=0, 1, \ldots, 119$. Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, получаем, что сумма всех корней данного уравнения, принадлежащих отрезку $[0;120\pi]$, равна

$$S=120\operatorname{arctg} 4+\pi\frac{(0+119)\cdot 120}{2}=120\operatorname{arctg} 4+7140\pi.$$

Так как

$$\operatorname{arctg} 4\leq\frac{\pi}{2},\text{ то } S\leq 60\pi+7140\pi=7200\pi<7200\cdot 3{,}2=23040.$$

4. Тангенсы углов: $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $R=\frac{35}{\sqrt{6}}$.

Пусть заданное отношение площадей $m:n$ и $m<n$. Пусть $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}=m:n$ и $\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}}=m:n$ (остальные случаи симметричны). Пусть диагонали пересекаются в точке K. Из отношения площадей треугольников ABC и ADC с общей стороной AC вытекает, что высоты, опущенные из B и D на AC, относятся как $m:n$. Прямоугольные треугольники, сторонами которых явля-

ются эти высоты и отрезки BK и DK, подобны (по 2 углам). Поэтому также $BK : KD = m : n$. Аналогично получаем $CK : AK = m : n$, т.е. $BK : KD = CK : AK$. Кроме того, углы BKC и AKD равны (как вертикальные). Следовательно, треугольники AKD и CKB подобны. При этом равны углы DAK и BCK, поэтому $AD \parallel BC$, т.е. $ABCD$ – трапеция. Из подобия треугольников AKD и CKB вытекает, что $BC : AD = m : n$ и $AD > BC$. Пусть $AD = nx$, $BC = mx$. Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобокая (так как $\cup AB = \cup CD$). Поскольку она описана около окружности, то $AB + CD = AD + BC$. Отсюда $AB = CD = \frac{m+n}{2}x$, и AD – наибольшая сторона. Опустим перпендикуляр BH на AD. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{n-m}{2}x$. Значит, $BH^2 = AB^2 - AH^2 = mnx^2$, $BH = x\sqrt{mn}$. Тогда тангенсы двух углов четурехугольника равны $\frac{BH}{AH} = \frac{2\sqrt{mn}}{n-m}$, а два равны $-\frac{2\sqrt{mn}}{n-m}$. Подставляя $m = 2$, $n = 3$, получаем первый ответ. Далее имеем: $HD = AD - AH = \frac{m+n}{2}x$ и $BD^2 = HD^2 + BH^2 = \frac{m^2 + 6mn + n^2}{4}x^2$. Так как $\sin BAD = \frac{BH}{AB} = \frac{2\sqrt{mn}}{m+n}$, то по теореме синусов из треугольника ABD для радиуса описанной окружности R получаем: $R = \frac{BD}{2\sin BAD} = \sqrt{\frac{m^2 + 6mn + n^2}{4}}\,\frac{m+n}{4\sqrt{mn}}x$. Учитывая, что $x = \frac{AD}{n}$, и подставляя значения $m = 2$, $n = 3$, $AD = 24$, получаем второй ответ.

5. $\left[\arccos\frac{1}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[2; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[-\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n; \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $n, k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $k \geq 1$.

ОДЗ: $x > 0$. Вынося все показатели степени из логарифмов, используя тождество $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ и группируя все слагаемые с логарифмом, приходим к неравенству

$$\log_2 x\left(2\cos x + 8\sin^2 x - 8\right) \leq 2\cos x - 4\cos 2x - 4.$$

Так как $8\sin^2 x = 4 - 4\cos 2x$, то окончательно получим неравенство $(\log_2 x-1)(2\cos x-4\cos 2x-4)\le 0$. Заменяя $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$, получаем неравенство

$$(\log_2 x-1)\cos x\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)\ge 0.$$

Оно сводится к объединению двух систем (учтем ОДЗ: $x>0$):

$$\begin{cases}0<x\le 2,\\ 0\le\cos x\le\dfrac{1}{4},\end{cases}\qquad \begin{cases}x\ge 2,\\ \cos x\le 0 \text{ или } \cos x\ge\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Ответ получаем на тригонометрическом круге.

6. $\left(-\infty;\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup(-1;\ +\infty)$.

Условие задачи равносильно тому, что хотя бы одно из чисел первой пары меньше обоих чисел из второй пары. Получаем объединение двух систем:

$$\begin{cases}(x+1)^3<x^3+3x^2+2x+2,\\ (x+1)^3<x^2+5x+4\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x^2-3x-2<x^3+3x^2+2x+2,\\ x^2-3x-2<x^2+5x+4.\end{cases}$$

Преобразуя, получаем:

$$\begin{cases}x<1,\\ x^3+2x^2-2x-3<0\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x^3+2x^2+5x+4>0,\\ 8x>-6.\end{cases}$$

Кубические многочлены раскладываются на множители с учетом того, что есть корень $x=-1$. Приходим к системам:

$$\begin{cases}x<1,\\ (x+1)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)<0\end{cases}$$

$$\text{или}\ \begin{cases}(x+1)\left(x^2+x+4\right)>0,\\ x>-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Решая эти системы методом интервалов, получаем ответ.

Замечание. Неравенства, получающееся из сравнения чисел в паре, не решаются.

Вариант 4

1. −6.

Имеем

$$a^3 = \left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3 = 2 + 3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16} + 4 =$$

$$= 6 + 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{32} = 6 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4}$$

и $6a - a^3 = -6$.

2. 5 ч.

Петров на весь путь потратил 4 часа. Значит, полпути он пробегал за 2 часа. Первую половину пути Иванов бежал вдвое быстрее Петрова, а потому потратил на нее 1 час. Вторую половину пути Иванов бежал вдвое медленнее Петрова, и, значит, потратил на нее 4 часа. Время, затраченное Ивановым на весь пробег, равно 1 + 4 = 5 часов.

Можно, конечно, решать эту задачу, вводя неизвестные и составляя уравнения. Например, можно обозначить буквой v скорость Петрова и буквой S длину пути. Уравнение, связывающее эти величины, имеет вид $S = 4v$, а искомая величина есть

$$\frac{S/2}{2v} + \frac{S/2}{v/2} = \left(\frac{1}{4}+1\right)\frac{S}{v} = 5.$$

3. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$. Имеем

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{8}{9}.$$

Кроме того, по условию

$$0 > \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha.$$

Из этого неравенства, поскольку $\sin\alpha = \frac{1}{3} > 0$, следует, что $\cos\alpha < 0$. Значит, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Теперь находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\sqrt{2}}{3}}{\frac{8}{9}-\frac{1}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

4. $1 < x \le 3$.

Пользуясь формулами $4^t = 2^{2t}$, $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ при $a = 9$, $c = 3$, $b = x^2 + 4x - 5$, находим

$$4^{\log_9\left(x^2+4x-5\right)} = 2^{2\log_9\left(x^2+4x-5\right)} = 2^{\log_3\left(x^2+4x-5\right)}.$$

Поэтому данное неравенство можно переписать в виде

$$2^{\log_3\left(x^2+4x-5\right)} \le 2^{\log_3\left(1+8x-x^2\right)}.$$

Функции 2^t и $\log_3 t$ монотонно возрастают на своих областях определения, поэтому последнее неравенство равносильно неравенству

$$\log_3\left(x^2+4x-5\right) \le \log_3\left(1+8x-x^2\right),$$

а также двойному неравенству

$$0 < x^2+4x-5 \le 1+8x-x^2$$

и, следовательно, системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-3 \le 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства состоит из двух областей $x<-5$ и $x>1$. Решения второго неравенства составляют промежуток $-1<x\le 3$. Множество же решений системы неравенств имеет вид

$$1<x\le 3.$$

5. $\dfrac{14}{5}$.

Треугольники AFD и BFK имеют по паре равных углов и потому подобны. Следовательно, $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AD}{BK}$. Учитывая, что $BK=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{4}{9}AD$, заключаем: $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{9}{4}$ и

$$\frac{AB}{BF}=\frac{AF}{BF}-1=\frac{5}{4}, \quad BF=\frac{4}{5}AB.$$

Точно так же, пользуясь подобием треугольников AED и KEC, находим равенства

$$\frac{DE}{CE}=\frac{AD}{KC}=\frac{9}{2}, \ \frac{CD}{CE}=\frac{DE}{CE}-1=\frac{7}{2}, \ CE=\frac{2}{7}CD.$$

Теперь, поскольку $AB=CD$, имеем

$$\frac{BF}{CE}=\frac{\frac{4}{5}AB}{\frac{2}{7}CD}=\frac{14}{5}.$$

6. Наибольшее значение параметра равно $\sqrt[3]{3}$, а наименьшее равно -5.

Первое решение. При любом a функция $\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}$ определена на множестве чисел x, для которых выполнено $x \ge a$, $x^3+1 \ge 0$, т.е. на множестве чисел, одновременно удовлетворяющих неравенствам

$$x \ge a,\ x \ge -1\ . \qquad (3)$$

При любом x из этого множества имеем

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1} \ge \sqrt{x^3+1}\ ,$$

и при $\sqrt{a^3+1} > 2$, т.е. при $a > \sqrt[3]{3}$, находим $\sqrt{x^3+1} \ge \sqrt{a^3+1} > 2$, так что данное уравнение при $a > \sqrt[3]{3}$ решений не имеет.

Для любого x, удовлетворяющего условиям (3), верно неравенство

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1} \ge \sqrt{x-a}\ ,$$

так что при $\sqrt{-1-a} > 2$, т.е. при $a < -5$, выполняется $\sqrt{x-a} \ge \sqrt{-1-a} > 2$. Значит, данное уравнение не имеет решений и при $a < -5$.

При $a = \sqrt[3]{3}$ данное уравнение имеет корень $\sqrt[3]{3}$, а при $a = -5$ оно имеет корень -1.

Второе решение. Это решение находит не только искомые наименьшее и наибольшее значения параметра a, но и все множество параметров, при которых разрешимо данное уравнение. Но оно использует непрерывность функции, стоящей в левой части уравнения.

Как доказано раньше, при любом a функция $\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}$ определена на множестве $x \ge b = \max(a; -1)$. Эта функция есть сумма двух возрастающих функций и потому возрастает. Она непрерывна и принимает сколь угодно большие значения. Поэтому уравнение будет разрешимо в том и только том случае, когда наименьшее значение функции, т.е. $f(b)$, не превосходит 2. Итак, условием разрешимости является выполнение неравенства $f(b) \le 2$. Рассмотрим отдельно два случая.

а) Пусть $a \ge -1$. Тогда $b = a$, $f(b) = \sqrt{a^3+1}$ и условие разрешимости принимает вид

$$\sqrt{a^3+1} \le 2\ .$$

Это неравенство на множестве $a \ge -1$ равносильно неравенству $a^3+1 \le 4$. Решая последнее неравенство, находим $a^3 \le 3$ и $a \le \sqrt[3]{3}$. Искомое множество значений параметра в первом случае имеет вид $-1 \le a \le \sqrt[3]{3}$.

б) Пусть $a < -1$. Тогда $b = -1$, $f(b) = \sqrt{-1-a}$ и условие разрешимости принимает вид

$$\sqrt{-1-a} \le 2.$$

Это неравенство на множестве $a < -1$ равносильно неравенству $-1-a \le 4$. Решая последнее неравенство, находим $a \ge -5$. Искомое множество значений параметра во втором случае имеет вид $-5 \le a \le -1$.

Объединяя найденные множества, находим множество значений параметра a, при которых данное уравнение имеет решение: $-5 \le a \le \sqrt[3]{3}$.

Вступительное испытание (вместо ЕГЭ)

Вариант 1

1. $\dfrac{1}{2552}$. **2.** $-4 \le x < -1$, $x \ge 1$. **3.** 25%. **4.** 2.

5. $\dfrac{2\pi}{3}$. *Указание.* Используйте теорему косинусов.

6. $-\log_3 2 \le x \le 1$.

7. 6. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм и $BC = 3$. Точки касания окружности со сторонами BC, AD и центр окружности лежат на одной прямой, перпендикулярной BC. Поэтому высота параллелограмма равна удвоенному радиусу, т.е. 2, а его площадь равна $2 \cdot 3 = 6$.

Иное решение основано на том, что суммы длин противоположных сторон описанного четырехугольника равны. Отсюда следует, что параллелограмм является ромбом, а его площадь равна учетверенной площади треугольника с основанием 3 и высотой 1.

8. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Данное уравнение может быть переписано в виде $7\cos^3 x = 2\cos^2 x\left(2 - \cos^2 x\right)$, или $\cos^2 x\left(4 - 7\cos x - 2\cos^2 x\right) = 0$. Квадратное уравнение $2t^2 + 7t - 4 = 0$ имеет два корня $t_1 = \dfrac{1}{2}$ и $t_2 = -4$. Уравнение $\cos x = -4$ решений не имеет, поэтому данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos x = 0$ и $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

9. $2\sqrt{6}$. Пусть O_1 – центр меньшей окружности и A – точка ее касания с заданной прямой. Точно так же, O_2 – центр большей окружности и B – точка ее касания с той же прямой. Согласно условию точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB.