Условие 3): $1+\sqrt[3]{4}>2$, так как $\sqrt[3]{4}>1$ $(4>1)$.

Условие 4): $1+\sqrt[3]{2}>\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{2}>\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}>2$ – верно, так как $\sqrt[3]{2}>1$ и $\sqrt[3]{4}>1$.

Итак, треугольники граней существуют. Докажем, что из них можно сложить тетраэдр. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ с коэффициентом подобия q. Значит, $\angle BAC=\angle BAD=\alpha$. Пусть $\angle CAD=\beta$. Для того чтобы можно было сложить тетраэдр, достаточно доказать, что существует трехгранный угол с плоскими углами α, α и β, что равносильно существованию решения системы

$$\begin{cases} \alpha,\beta>0, \\ 2\alpha+\beta<2\pi, \\ 2\alpha>\beta. \end{cases}$$

Из теоремы косинусов получаем ($q=\sqrt[3]{2}$, $q^3=2$, $q^6=4$, $q^9=8$)

$$\cos\alpha=\frac{q^6+q^8-1}{2q^7}=\frac{4+\frac{8}{q}-1}{2\cdot 4\cdot q}=\frac{8+3q}{8q^2};$$

$$\cos\beta=\frac{q^6+q^{10}-q^4}{2q^8}=\frac{q^2+q^6-1}{2q^4}=\frac{4+\frac{2}{q}-1}{4q}=\frac{2+3q}{4q^2}.$$

Значит, $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$. Далее,

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(\frac{8+3q}{8q^2}\right)^2-1=\frac{2\left(64+48q+9q^2\right)}{64q^4}=$$

$$=\frac{128+96q+18q^2-128q}{128q}=\frac{18q^2-32q+128}{128q}=$$

$$=\frac{9q^2-16q+64}{64q}>0 \Leftrightarrow 9q^2-16q+64>0,$$

так как выполнены оценки: $16q<16q^3=32<64<64+9q^2$.

$$2\alpha>\beta \Leftrightarrow \cos 2\alpha<\cos\beta \Leftrightarrow \frac{9q^2-16q+64}{64q}<\frac{2+3q}{4q^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9q^3-16q^2+64q<32+48q \Leftrightarrow f(q)=9q^3-16q^2+16q-32<0.$$

Действительно,

$$f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 9 \cdot 2 - \frac{32}{q} + 16q - 32 =$$

$$= 16q - \frac{32}{q} - 14 = \frac{16q^2 - 14q - 32}{q} = \frac{2}{q}\left(8q^2 - 7q - 16\right).$$

Пусть $\varphi(q) = \left(8q^2 - 7q - 16\right)$. Так как

$$\sqrt[3]{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 < \frac{27}{8} \Leftrightarrow 16 < 27 \Leftrightarrow \text{ и } \varphi(1) = 8 - 7 - 16 = -15,$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 8\frac{9}{4} - \frac{7 \cdot 3}{2} - 16 = 18 - 16 - \frac{21}{2} = -\frac{17}{2} < 0, \text{ то } \varphi\left(\sqrt[3]{2}\right) < 0.$$

Замечания

1. Приведенное расположение граней не единственно возможное.

2. Вторую часть (возможность сложить из треугольников тетраэдр) обязательно надо доказывать, так как существует пример, когда из четырех треугольников с совместимыми сторонами нельзя сложить тетраэдр.

10. 252.

Простых чисел, меньших 30, десять штук: это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29. Пусть p_1, p_2, …, p_{10} – какая-нибудь перестановка этих чисел. Заметим, что различных перестановок из 10 чисел всего $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$ (вообще $n!$ – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n). Действительно, число p_1 можно выбрать 10 способами, p_2 – 9 способами, p_3 – 8 способами и т.д.

Рассмотрим «цепь»

$$1, p_1, p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \ldots, p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{10} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

1) Каждое число в цепи делится на предыдущее и является делителем последующего.

2) В множество M может входить только одно число из цепи.

3) Таких цепей 10! штук.

4) Пусть число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ ($1 \le k \le 9$) входит в множество M, тогда число цепей, содержащих $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, равно $k!(10 - k)!$. Действительно, для того чтобы цепь содержала это число, вначале, при построении цепочки, выбираются в любом порядке числа p_1, p_2, …, p_k, а затем в любом порядке оставшиеся $10 - k$ чисел.

5) Выясним, при каком k число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ «занимает»

наименьшее число цепей. Сравним по величине числа

$$k!(10-k)! \text{ и } (k+1)(10-k-1)!,$$

$k!(10-k)! >$

$$> (k+1)!\,(10-k-1)! \Leftrightarrow 10-k > k+1 \Leftrightarrow 2k < 9.$$

Значит, $k!(10-k)!$ при $k \le 5$ убывает, а при $k \ge 5$ возрастает. Поэтому наименьшее значение достигается при $k = 5$ и равно $5!5!$.

6) Включая число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ в M, мы тем самым «запрещаем» включать все другие числа из цепей, «проходящих» через $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Поэтому в M можно включить не более чем

$$\frac{10!}{5!5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252$$

числа.

7) Покажем, что можно построить множество M, состоящее из 252 чисел, удовлетворяющих условиям задачи. Действительно, пусть М = $\{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_5$, где p_1, p_2, ..., p_5 – различные числа из набора 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29$\}$.

В этом множестве ровно 252 числа.

Вариант 2

1. 16 см и 8 см.

Пусть V – объем банки с соком, s и S – площади оснований стаканов, h_1 и H_1 – уровни сока в обоих стаканах в первом случае, а h_2 и H_2 – во втором. Введем обозначения: $x = \frac{s}{V}$, $y = \frac{S}{V}$. Из условий задачи получаем систему

$$\begin{cases} h_1 x + H_1 y = 1, \\ h_2 x + H_2 y = 1, \end{cases}$$

откуда $x = \dfrac{H_2 - H_1}{H_2 h_1 - H_1 h_2}$, $y = \dfrac{h_2 - h_1}{H_2 h_1 - H_1 h_2}$. Значит, искомые уровни в стаканах равны $\dfrac{1}{2x}$ и $\dfrac{1}{2y}$.

2. Два решения: $\arcsin\dfrac{1}{3}$ и $\pi - \arcsin\dfrac{1}{3}$.

Уравнение сводится к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{3}, \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Если $\sin x = \dfrac{1}{3}$, то возможны варианты: 1) $\cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, 2) $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Во втором случае $\mathrm{tg} x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, поэтому на $[0;\pi]$ будет только два решения уравнения: $\arcsin\dfrac{1}{3}$ и $\pi - \arcsin\dfrac{1}{3}$.

3. $\dfrac{1}{2}$, 2, 8, 32, 128.

Пусть $b_n = b_1 q^{n-1}$, $b_1 > 0$, $q > 0$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда

$$15 = \log_2\left(b_1^5 q^{10}\right) = 5\log_2\left(b_1 q^2\right).$$

Значит, $b_1 q^2 = 8$ и второе условие задачи приводит к квадратному уравнению относительно $\log_2 b_1$.

4. $\dfrac{a+b}{2a+b} = \dfrac{7}{10}$.

Треугольник CKL − равнобедренный, поэтому CO − биссектриса угла C. Значит,

$$\frac{AO}{OB} = \frac{AC}{BC} = \frac{a+b}{2a+b},$$

где $a = CK = CL = MB$, $b = AK = LM$.

5. $a \geq -1$.

Перепишем неравенство в виде

$$(a+1)(x-2)^2 + (b-1)\left(x^2 + 3x - 2\right) \geq 0.$$

Если $a \geq -1$, то для любого b это неравенство имеет решения: его решениями будут, например, корни уравнения $x^2 + 3x - 2 = 0$.

Для любого $a < -1$ (так как корни уравнения лежат левее 2) найдется b такое, что для любого x левая часть неравенства отрицательна.

6. 16.

Пусть V и v − объемы пирамид $SABCD$ и $SKLMN$, соответственно, $SA = SB = SC = SD = l$, $SK = a$, $SL = b$, $SM = c$, $SN = d$.

Докажем, что

1) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d}$; 2) $a = c$.

1) Воспользовавшись тем, что отношение объемов двух пирамид с ребрами, лежащими на ребрах некоторого трехгранного угла, равно отношению произведений длин этих ребер, получаем:

$$\frac{2v}{V} = \frac{V_{SKMN}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SKLM}}{V_{SACD}} = \frac{acd + abc}{l^3}$$

аналогично,

$$\frac{2v}{V} = \frac{V_{SKLN}}{V_{SBCD}} + \frac{V_{SLMN}}{V_{SABD}} = \frac{abd + bcd}{l^3} .$$

Значит,

$$acd + abc = abd + bcd,$$

или

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} .$$

2) Докажем, что из условия перпендикулярности диагоналей сечения ($MK \perp NL$) правильной четырехугольной пирамиды следует, что или $a = c$, или $b = d$ (или $SQ \perp MK$, или $SQ \perp NL$, где Q – точка пересечения MK и NL).

Пусть $b \neq d$. Если $a \neq c$, то рассмотрим точку K' на ребре SA такую, что $SK' = SK$. Тогда

$$\angle NQK' = \frac{\pi}{2} = \angle NQK \Rightarrow NL \parallel BD \Rightarrow b = d$$ – противоречие.

По условию $b \neq d = 3b$, значит, $a = c$.

Из 1), 2) и условий задачи получаем

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{3b} + \frac{1}{b} = \frac{4}{3b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{3} .$$

Поэтому

$$S_{SNL} = \frac{bd}{ac} S_{SMK} = 3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot 12 = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot 12 = 16 .$$

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2010»

МАТЕМАТИКА

1. $x \in [-1;3]$.

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \leq \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{-(\log_3 2)^{2x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 3)^{4-x^2} \geq (\log_3 2)^{2x-1} \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 1 - 2x \Leftrightarrow x \in [-1;3] .$$

2. $\dfrac{6}{25}$.

Треугольники ADE и EFC подобны треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$ соответственно. Так как $DBFE$ – параллелограмм, то $S_{DEF} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{25} - \frac{9}{25}\right) S_{ABC} = \frac{6}{25} S_{ABC}$.

3. 8.

Если сначала в общем вкладе y (млн р.) указанный вкладчик имел x, а всего он добавляет z, то

$$\begin{cases} 0,04 = \dfrac{x+1}{y+1} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{y-x}{y(y+1)}, \\ 0,06 = \dfrac{x+2}{y+2} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{2(y-x)}{y(y+2)}, \\ 0,10 = \dfrac{x+z}{y+z} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{z(y-x)}{y(y+z)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0,04}{0,06} = \dfrac{y+2}{2(y+1)}, \\ \dfrac{0,04}{0,10} = \dfrac{y+z}{z(y+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y+4 = 3y+6, \\ 2z(y+1) = 5y+5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2, \\ z=10. \end{cases}$$

4. $x \in \left(-4; -3 + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right]$.

Так как $x \in (-4;-2)$, то, домножив неравенство на $\sqrt{(x+4)(-x-2)}$, приведем его к равносильному:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{-x-2} \le 1 + \sqrt{(x+4)(-x-2)}.$$

Введем обозначение $t = \sqrt{(x+4)(-x-2)} > 0$.

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{-x-2} < 0, \\ x \in (-4;-2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4;-3)$.

2) $\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{-x-2} \ge 0, \\ 2 - 2t \le 1 + 2t + t^2, \\ x \in (-4;-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3;-2), \\ t \ge \sqrt{5} - 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3;-2), \\ x^2 + 6x + 17 - 4\sqrt{5} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3; -3 + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right].$$

5. 54, 72, 96 и 128.

Решим задачу в общем виде.

Пусть первое число равно $\nu^a \cdot \mu^b$, а второе – $\nu^c \cdot \mu^d$, где a, b, c, d – конкретные целые неотрицательные числа, а ν, μ – различные простые числа (у нас $\nu = 2$, $\mu = 3$, $a = 1$, $b = 3$, $c =$

$=7,\ d = 0$). Из условия задачи следует, что существуют такие ненулевые b_1, q и различные натуральные n, m, k, что

$$\nu^a \cdot \mu^b = b_1 \cdot q^{n-1},\ \ \nu^c \cdot \mu^d = b_1 \cdot q^{m-1},\ \ N = b_1 \cdot q^{k-1},$$

где N − искомое натуральное число. Исключая b_1 и q из этих уравнений, получаем

$$N^m \cdot \nu^{ak+cn} \cdot \mu^{bk+dn} = N^n \cdot \nu^{am+ck} \cdot \mu^{bm+dk}.$$

Отсюда, во-первых, $N = \nu^x \cdot \mu^y$ для некоторых неотрицательных целых x, y и, во-вторых,

$$\nu^{xm+ak+cn} \cdot \mu^{ym+bk+dn} = \nu^{xn+am+ck} \cdot \mu^{yn+bm+dk},$$

поэтому

$$\begin{cases} xm+ak+cn = xn+am+ck, \\ ym+bk+dn = yn+bm+dk \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-n)(x-a) = (n-k)(a-c), \\ (m-n)(y-b) = (n-k)(b-d) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-a}{a-c} = \frac{y-b}{b-d}.$$

В итоге для x, y получается уравнение $x + 2y = 7$. Оно имеет четыре пары решений в целых неотрицательных числах: (7; 0), (5;1), (3;2), (1;3), которые и определяют четыре натуральных члена прогрессии (два из них даны в условии).

6. $y = \dfrac{1}{25x^2} + 2$ при $-\dfrac{1}{5} \le x < 0$.

Любая точка $(x; y; z)$ данной кривой удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} 5x + \cos z = 0, \\ z = \operatorname{arctg}\sqrt{y-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos z = -5x, \\ y - 3 = \operatorname{tg}^2 z = \dfrac{1}{\cos^2 z} - 1, \\ 0 \le z < \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{25x^2} + 2, \\ -1 \le 5x < 0, \end{cases}$$

причем любая пара $(x; y)$, удовлетворяющая последней системе, хотя бы при одном значении z удовлетворяет и первой.

7. $a < 13\sqrt{5} - 5$.

Преобразуем второе уравнение системы, получим

$$12\left(\frac{1-\cos 2\pi x}{2}\right)^2 - \left(2\cos^2 2\pi x - 1\right) - 11 = 0,$$

$$3\left(1 - 2z + z^2\right) - 2z^2 - 10 = 0 \ \ (\text{где } \cos 2\pi x = z),$$

$$z^2 - 6z - 7 = 0.$$

1) $\cos 2\pi x = 7$ − нет решений;

2) $\cos 2\pi x = -1$, $2\pi x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{1}{2} + n \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Обозначим $5^x = t$, тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} t = 5^n\sqrt{5}, \\ t^2 - 13t < -a. \end{cases}$$

Вершина параболы $y = f(t) = t^2 - 13t$ находится в точке $t = \frac{13}{2}$ и $\sqrt{5} < \frac{13}{2} < 5\sqrt{5}$ (так как $5 < \frac{169}{4} < 125$). Поскольку $\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5} > 13$ (так как 180 > 169), то $5\sqrt{5} - \frac{13}{2} > \frac{13}{2} - \sqrt{5}$, т.е. точка $\sqrt{5}$ лежит ближе к $\frac{13}{2}$, чем $5\sqrt{5}$. Поэтому $f\left(\sqrt{5}\right) < f\left(5\sqrt{5}\right)$ и система имеет решение тогда и только тогда, когда $f\left(\sqrt{5}\right) < -a$. Получаем: $5 - 13\sqrt{5} < -a$ и $a < 13\sqrt{5} - 5$.

8. 4.

Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 − площади треугольников ABC, MBC, NBC, SBC соответственно, h_1, h_2, h_3, h_4 − высоты треугольников ABC, BMC, BNC, BCS соответственно, опущенные из вершин A, M, N и S на сторону BC, а π − плоскость, проходящая через точку B, перпендикулярная ребру BC. Рассмотрим ортогональные проекции точек A, B, C, S, M и N на плоскость π − это точки A', B', C', S', M' и N' соответственно.

Тогда $B' = C' = B$, $A'M' = M'N' = N'S' = a$, $A'B = h_1$, $M'B = h_2$, $N'B = h_3$, $S'B = h_4$. Так как $M'B = h_2$ − медиана треугольника $A'BN'$, а $N'B$ − медиана треугольника $M'BS'$, то

$$2h_1^2 + 2h_3^2 - 4h_2^2 = 4a^2 = 2h_2^2 + 2h_4^2 - 4h_3^2,$$

или $h_3 = \sqrt{h_2^2 + \frac{h_4^2 - h_1^2}{3}}$. Так как площади S_1, S_2, S_3, S_4 пропорциональны высотам h_1, h_2, h_3, h_4 (с коэффициентом пропорциональности $\frac{BC}{2}$), то

$$S_3 = \sqrt{S_2^2 + \frac{S_4^2 - S_1^2}{3}} = \sqrt{4 + \frac{37 - 1}{3}} = 4.$$

9. а) Да; б) нет.

а) Ваня при любых начальных коэффициентах квадратного трехчлена, независимо от действий Тани, за конечное число шагов (либо своим ходом, либо ходом Тани) может обеспечить равенство нулю значения квадратного трехчлена в точке $x = 1$.

б) Таня все время должна действовать так, чтобы коэффициент при x равнялся 7 или 8. В этом случае, как бы ни действовал мальчик, у получающихся квадратных трехчленов целых корней не будет.

В самом деле, после любого числа шагов трехчлен будет иметь вид $x^2 + 7x + 47 - 3n$ или $x^2 + 8x + 47 - 3k$ для некоторых целых n и k. Но эти многочлены целых корней не имеют. Действительно, в противном случае существовали бы такие целые x и n (k), что $3n = x^2 + 7x + 47$ ($3k = x^2 + 8x + 47$). Но это невозможно, так как левая часть в этих равенствах кратна трем, а правая – нет.

10. 12.

Проведем через точку O общую касательную к окружностям и обозначим через P точку пересечения касательной с основанием AD. $\angle OAP = \angle AOP = \alpha$, $\angle ODP = \angle DOP = \beta$. Так как $\pi - 2\alpha + \pi - 2\beta = \pi$, то $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, ΔAOD и ΔCOB прямоугольные, причём $\Delta COB \sim \Delta AOD$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$, откуда следует, что $OC = \frac{1}{3}AO$ и $BO = \frac{1}{3}OD$. Тогда

$$AC = AO + OC = \frac{4}{3}AO, \quad BD = BO + OD = \frac{4}{3}OD.$$

Кроме того, $\Delta AKC \sim \Delta AOK$ ($\angle KAO$ – общий, а $\angle ACK = \angle AKO = \alpha$). Следовательно,

$$\frac{AK}{AO} = \frac{AC}{AK} \Rightarrow AK^2 = AO \cdot AC = \frac{4}{3}AO^2.$$

Аналогично, $\Delta DLB \sim \Delta DOL$ ($\angle LDB$ – общий, а $\angle LBD = \angle DLO = \beta$). Следовательно,

$$\frac{DL}{DO} = \frac{DB}{DL} \Rightarrow DL^2 = DO \cdot DB = \frac{4}{3}OD^2.$$

В итоге получаем:

$$AK^2 + DL^2 = \frac{4}{3}\left(AO^2 + OD^2\right) = 3 \cdot 4 = 12.$$

МЕХАНИКА

1. а) 17:55; б) 30 км/ч.

а) Свяжем систему координат с первым мотоциклистом и обозначим его положение точкой A (рис.4). Положения второго мотоциклиста: в первый момент времени – точка B, во второй момент – C, в третий – D. Тогда $AB = 40$, $AC = 30$, $AD = 30$. Минимальное расстояние – это высота (она же медиана) треугольника ACD, поэтому соответствующий момент времени равен 17:55.

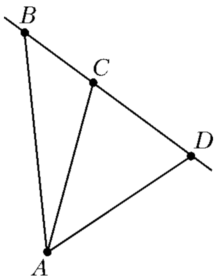

Рис. 4

б) Так как $BC : CD = AB : AD = 4 : 3$, то AC – биссектриса треугольника BAD. По формуле длины биссектрисы, $30^2 = 40 \cdot 30 - 4x \cdot 3x$, где $BC = 4x$, $CD = 3x$. Поэтому $x = 5$ км, $CD = 3x = 15$ км. Значит, искомая относительная скорость равна 15 км/0,5 ч = 30 км/ч.

2. 4 : 3.

Для спускаемого аппарата A имеем

$$P = T + Q,$$

где P – сила тяжести, Q – сила сопротивления воздуха, T – сила тяги тормозного двигателя. По условию для аппарата $Б$ сила тяги равна $33T$. Так как аппарат $Б$ имеет втрое больший диаметр, то для него сила тяжести равна $27P$ (масса пропорциональна объему), а сила сопротивления воздуха (пропорциональная площади поверхности) равна $9Q$. Значит, для аппарата $Б$ имеем

$$27P = 33T + 9Q.$$

Из получившейся системы уравнений находим

$$\frac{P}{T} = \frac{4}{3}.$$

3. а) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ мин; б) успеет.

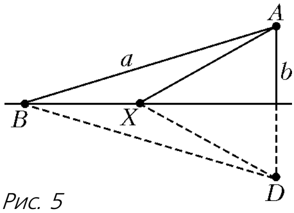

Рис. 5

а) Введем такие обозначения (рис.5): точка A – колодец, B – богатырь, X – точка на дороге, от которой богатырь должен пойти к колодцу по бездорожью, v – скорость по бездорожью, $AB = a = 1400$ м, $b = 200$ м. Если построить точку D симметрично точке A отно-