б) Существуют ли три попарно не подобных треугольника, каждый из которых можно разрезать на 26 равных треугольников?

А.Заславский, Б.Френкин

7 (7–9). Даны 10 бумажных прямоугольников. Вася может разрезать не более одного из них на два меньших прямоугольника. После этого он делит прямоугольники на две группы. Всегда ли он может добиться, чтобы суммы периметров в группах были одинаковы?

А.Шаповалов

8 (6–7). Коля и Толя по очереди закрашивают по две клетки на полоске 1×2010. Коля хочет, чтобы расстояния между двумя отмеченными им за один ход клетками не повторялись. Сможет ли Толя ему помешать?

Н.Чернятьев

9 (7–8). У Саши есть 27 кусков сыра с массами 100, 200, 300, …, 2700 граммов. Он очень хочет разложить весь сыр на кучки так, чтобы в каждой кучке был кусок, весящий столько же, сколько и все остальные куски в этой кучке вместе. Сколько кучек у него может получиться?

А.Грибалко

10 (7–8). В школе число мальчиков равно числу девочек. Ни в каком классе не учится больше, чем полшколы. Все ученики школы пришли на дискотеку. Диджей объявил белый танец. Докажите, что каждая девочка сможет пригласить мальчика из другого класса.

Фольклор

11 (8–9). Целые числа *a, b, c, d* удовлетворяют условию $a^3 + ba^2 + ca + d = 0$. Докажите, что число $c^2 - 4bd - 4ad$ – квадрат целого числа.

А.Хачатурян

12 (6–8). В летней школе мальчики и девочки живут в двух- и трехместных номерах (как мальчики, так и девочки занимают много и двух-, и трехместных номеров). Свободных мест нет. Посреди смены уехал один мальчик, живший в трехместном номере, а приехала новая девочка. Какое наименьшее количество школьников придется переселить, чтобы поселить девочку в трехместный номер?

В.Гуровиц

13 (7–8). Можно ли расставить в выражении $1*2*3*\ldots*100/(1*2*3*\ldots*100)$ вместо звездочек знаки умножения и деления так, чтобы полученное выражение равнялось $1/10$?

Фольклор

14 (7–9). На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 1001. Двое играют в игру – по очереди стирают по одному числу, пока на доске не останется только два числа. Если одно из них делится на второе, побеждает первый, если нет – второй. Кто из игроков имеет возможность победить при любой игре противника?

А.Шаповалов

15 (6–8). Петя разбил клетчатый квадрат 7×7 на прямоугольники по границам клеток, и раскрасил прямоугольники в три цвета так, что прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников могло быть у Пети?

А.Шаповалов

16 (7–9). Есть $2n$ человек: n болеют за «Спартак» и n – за «Динамо». Можно спросить у любых двоих, за одну они болеют команду или за разные, и они честно ответят. Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это можно сделать?

И.Раскина

17 (7–9). Параллелограмм разбит на треугольники. Докажите, что один из них можно накрыть всеми остальными вместе.

А.Шаповалов

18 (7–9). В точном квадрате – более миллиона цифр. Какое наименьшее количество цифр может быть четными?

А.Шаповалов

19 (8–9). а) Леша говорит, что придумал квадратный трехчлен с целыми корнями. Потом он прибавил ко второму коэффициенту 2, а к свободному члену 6 и снова получил квадратный трехчлен с целыми корнями. С результатом сделал то же, снова получил квадратный трехчлен с целыми корнями и так делал 2010 раз, и все время получались целые корни. Могут ли его слова быть правдой?

б) Есть две арифметические прогрессии a_n, b_n. Известно, что при каждом n уравнение $x^2 + a_n x + b_n = 0$ имеет два корня. Докажите, что у всех этих уравнений есть общий корень.

А.Марачев, А.Заславский

20 (7–8). Всех участников турнира два раза разбивали на команды: первый раз для игры в «Абаку», второй – в «Завалинку». Размеры команд в каждой игре не обязательно одинаковы, но в каждой команде есть хотя бы один участник. Оказалось, что каждый участник играл в «Завалинку» в не меньшей по численности команде, чем в «Абаку». Докажите, что в «Абаку» играло не меньше команд, чем в «Завалинку».

А.Лебедев, А.Шаповалов

21 (8). У Ежика и Лисы есть кусочек сыра массой в целое число граммов. Они играют в шахматы. Если выигрывает Ежик, то он съедает 4 грамма, если выигрывает Лиса, то она съедает четверть оставшегося сыра. После нескольких игр осталось целое число граммов сыра, при этом Лиса и Ежик съели поровну сыра и набрали поровну очков. Сколько граммов сыра осталось?

Т.Голенищева-Кутузова, А.Хачатурян

22 (6–7). Робин-Бобин Барабек грабил 40 человек. Сначала он отобрал 6 пончиков у первого человека, разделил их на несколько одинаковых кучек и одну из кучек съел. У каждого из следующих он также отбирал по 6 пончиков, затем делил все имеющиеся к этому моменту пончики на равные кучки, одну съедал и т.д. Ограбив последнего, он разделил пончики на 6 кучек, а потом съел 6 пончиков. Сколько всего пончиков съел Робин, если до начала серии ограблений пончиков у него не было?

А.Шаповалов

23 (8–9). Есть одна монета, известно, что она – фальшивая. Есть еще девять таких же с виду монет. Как за три

(Продолжение см. на с. 34)

Стереометрия для всех

Стереометрия изучается в 10 и 11 классах и считается трудным предметом. Но многие стереометрические задачи доступны даже младшеклассникам. Мы собрали здесь несколько таких задач. А также добавили и более сложные задачи – формулировки их понятны любому, решения же требуют некоторой изобретательности (но минимум знаний).

Разминка

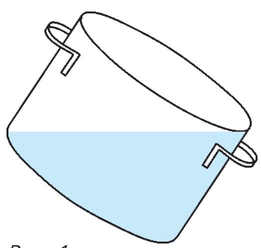

Рис. 1

1. Есть кран с водой и цилиндрическая кастрюля. Как набрать ровно половину кастрюли воды?

Решение. Наберем сначала полную кастрюлю, а потом отольем лишнее: будем наклонять ее до тех пор, пока не покажется дно (рис. 1).

2. Верно ли, что литровая и двухлитровая бутылки «Кока-Колы» подобны, т.е. одна получается из другой увеличением всех размеров в несколько раз?

Подсказка: решение не требует никаких вычислений!

3. а) Можно ли расположить пять одинаковых монет так, чтобы каждые две касались друг друга?

б) А можно ли расположить таким же образом шесть неоточенных карандашей?

Ответ. Можно в обоих пунктах.

Подсказка к пункту б): первые три карандаша положите на стол так, как показано на рисунке 2 (каждые два из них касаются друг друга).

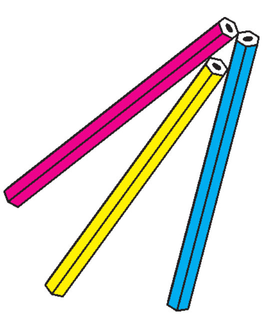

Рис. 2

4. После семи стирок и длина, и ширина, и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска?

Решение. На одну стирку – ведь объем куска мыла уменьшился в 8 раз.

5. Что тяжелее: два шара радиусов 3 см и 5 см или один шар радиуса 8 см? Шары сделаны из одного и того же материала.

Подсказка: подумайте, можно ли поместить первые два шара внутрь сферы радиуса 8 см.

6. Есть три одинаковых кирпича (прямоугольных параллелепипеда). Как с помощью линейки измерить длину диагонали кирпича (т. е. расстояние между двумя противоположными вершинами, не лежащими в одной грани)? Именно измерить, а не вычислить!

Подсказка изображена на рисунке 3.

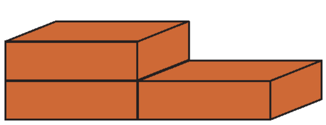

Рис. 3

7. а) Можно ли выпилить из дерева выпуклую многогранную фигуру, отличную от куба, каждая грань которой квадрат?

б) А если фигура может быть невыпуклой?

Решение. а) Нельзя. *Указание*: в каждой вершине многогранника сходятся не меньше трех граней, а больше трех граней сходиться не может – сумма плоских углов при такой вершине будет не меньше 360°.

б) Можно: например, возьмем один кубик и приклеим к каждой его грани еще по такому же кубику. Такую фигуру можно выпилить.

8. Существует ли многогранник, все грани которого – равнобедренные прямоугольные треугольники?

Развертки

9. На одной из клеток клетчатой фигуры нарисовали краской букву *Р* (рис. 4). На эту клетку поставили кубик с ребром, равным стороне клетки, и, перекатывая через ребра, прокатили по фигуре. При этом отпечаток буквы появился на грани кубика и на всех клетках, на которые становилась эта грань. В каких еще клетках появился отпечаток, и как именно там отпечаталась буква?

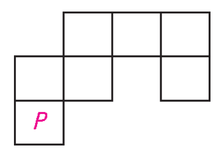

Рис. 4

10. Муравей сидит в вершине деревянного куба. Он хочет, двигаясь по поверхности куба, переползти в противоположную вершину по кратчайшему пути. Как ему это сделать?

Решение. Всего у куба шесть граней, три примыкают к вершине *A*, и три – к вершине *B* (рис. 5). Чтобы попасть из точки *A* в точку *B*, муравей должен в какой-то момент переползти с грани, примыкающей к *A*, на грань, примыкающую к *B*. Пусть это происходит на ребре *XY* в точке *M*. Но тогда ясно, что до этого момента муравью короче всего ползти по отрезку *AM*, а после этого момента короче всего ползти по отрезку *MB*. Вырежем мысленно те две грани, по которым ползет муравей, и расположим их на плоскости в виде прямоугольника (рис. 6). Для какой точки *M* путь $AM + MB$ будет самым коротким? Конечно же, для середины отрезка *XY*: тогда он просто равен диагонали *AB* нашего мысленного прямоугольника. Значит, надо сначала ползти из *A* по прямой в середину одного из ребер, не примыкающих ни к *A*, ни к *B*, а потом ползти из этой середины по прямой в точку *B*.

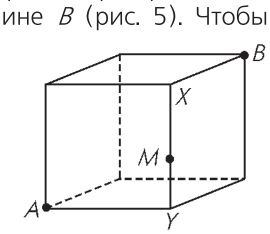

Рис. 5

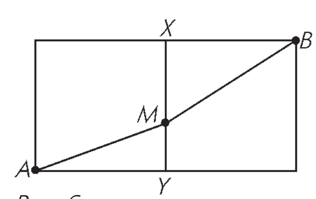

Рис. 6

11. В вершине A квадрата $ABCD$ сидит муравей. Точки A и C разделяет вертикальная стена в виде равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой BD. Как муравью попасть в точку C кратчайшим путем?

Подсказка: умный в гору не пойдет.

12*. Дан кирпич (прямоугольный параллелепипед), по поверхности которого ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол? (Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности кирпича.)

13*. Бумажный тетраэдр разрезали по ребрам так, что получилась плоская развертка. Может ли случиться, что эту развертку нельзя расположить на плоскости без наложений (в один слой)?

Ответ: может.

Замечание: до сих пор не решена проблема – верно ли, что любой выпуклый многогранник можно так разрезать по ребрам, что получится несамопересекающаяся плоская развертка?

Шары в пространстве

14. а) Можно ли так расположить четыре одинаковых шара в пространстве, чтобы каждый касался всех остальных?

б) А пять шаров (не обязательно одинаковых)?

Решение. а) Положим три одинаковых шара на стол и сдвинем их так, чтобы любые два касались друг друга. Затем положим один шар сверху так, чтобы он коснулся остальных. (В итоге центры шаров будут располагаться в вершинах правильного тетраэдра со стороной, равной удвоенному радиусу шара.)

б) Возьмем пирамидку из четырех шаров, построенную в предыдущем пункте. В центр этой пирамидки поместим маленький шарик и начнем раздувать его, пока он не коснется остальных четырех шаров. Такой момент обязательно наступит, и касание будет сразу со всеми шарами пирамидки из-за ее симметричности.

15. Есть 20 шариков, склеенных так, что получилось две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямоугольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 7). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков треугольная пирамида?

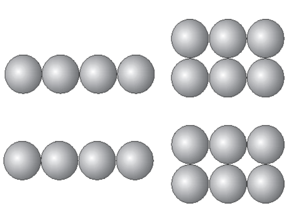

Рис. 7

16. В пространстве имеется точечная лампочка, светящая во все стороны. Можно ли подобрать 4 непрозрачных шара и так расположить их в пространстве, чтобы они не пересекали друг друга, не касались лампочки и полностью загораживали свет от нее (т.е. чтобы любой луч, выходящий из лампочки, упирался в один из этих шаров)?

Решение. Рассмотрим в пространстве такой правильный тетраэдр, что наша лампочка попадет ровно в его центр. Опишем вокруг одной из граней тетраэдра окружность. Соединим лампочку лучами со всеми точками этой окружности. Получим бесконечный конус. В этот конус можно положить шар (любого размера), и он закроет собой все лучи, идущие из лампочки внутри этого конуса. А как быть с лучами, идущими по границе конуса: они упираются в наш шар или нет? Для надежности увеличим немного размеры нашего шара (не меняя положение его центра и так, чтобы не задеть лампочку): тогда лучи, идущие по границе конуса, тоже упрутся в шар. Теперь рассмотрим второй конус (полученный с помощью другой грани тетраэдра). И его можно закрыть шаром, надо только расположить его далеко от лампочки (взяв для этого шар достаточно большого радиуса), чтобы он не пересекся с предыдущим шаром. Аналогично строим и закрываем еще два конуса. Так как луч, выходящий из лампочки, лежит в одном из конусов, шары загораживают весь свет от нее.

Проекции

17. а) Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано слева на рисунке 8. А если смотреть справа – то как на рисунке 8 справа. Нарисуйте вид сверху.

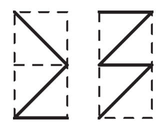

Рис. 8

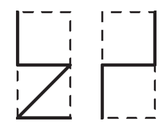

Рис. 9

б) Та же задача для рисунка 9.

18. Может ли тень куба быть правильным шестиугольником?

19. Существует ли выпуклый многогранник, ни одна грань которого не является квадратом, с таким свойством: если посмотреть на него сверху, спереди и сбоку, то мы каждый раз увидим квадрат?

Разное

20. Можно ли расположить восемь пирамид в пространстве так, чтобы каждые две соприкасались гранями (по участку ненулевой площади)?

21. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на ребрах этого многогранника?

22. Пирамиду, основание которой правильный треугольник, а боковые грани равнобедренные прямоугольные треугольники, отразили относительно середины высоты пирамиды. Какая фигура будет пересечением исходной и отраженной пирамид?

Подсказка: эта фигура вам очень хорошо известна.

23. Можно ли разбить какую-нибудь призму на непересекающиеся пирамиды, у каждой из которых основание лежит на одном из оснований призмы, а вершина – на другом основании призмы?

24. Можно ли в пространстве составить замкнутую цепочку из нечетного числа одинаковых согласованно вращающихся шестеренок? Для простоты считайте шестеренки кругами; шестеренки сцеплены если соответствующие окружности в точке соприкосновения имеют общую касательную.

25*. Есть циркуль, линейка, бумага, карандаш и деревянный шар. Можно рисовать на шаре (циркулем и карандашом) и на бумаге (здесь можно пользоваться и линейкой). Как нарисовать на бумаге отрезок, равный радиусу шара?

Материал подготовил С.Дориченко

(Начало см. на с. 28)

взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, есть ли среди этих девяти монет хотя бы одна фальшивая монета? (Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже весят одинаково и тяжелее настоящих).

А.Шаповалов

24 (9). Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Еще одна окружность, проходящая через точки B и C, касается отрезка AD в точке M_{AD}. Аналогично определяются точки M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}. Докажите, что прямые $M_{AB}M_{CD}$ и $M_{AD}M_{BC}$ перпендикулярны.

А.Волчкевич, Д.Швецов

25 (9). Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка N, а на сторонах AB и BC – точки P и Q соответственно. Отрезки NP, NQ и NA делят треугольник ABC на треугольник и два четырехугольника. Оказалось, что упомянутые четырехугольники – две равные трапеции. Как относятся их основания?

А.Хачатурян

26 (8–9). Есть клетчатый бильярдный стол размером 101×99. По углам стола расположены лузы. Можно ли запустить шар таким образом, чтобы на своем пути он прошел по всем вершинам всех квадратиков сукна, расположенных внутри стола?

А.Юрков

27 (9). *Правильным маршрутом* на бесконечной клетчатой плоскости назовем маршрут ладьи, который имеет начало, не имеет конца и ровно по одному разу проходит через каждую клетку плоскости (ладья каждым ходом перемещается в соседнюю клетку по вертикали или горизонтали). Можно ли во всех клетках плоскости расставить натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и на некотором правильном маршруте числа только возрастали, а на другом правильном маршруте все время чередовалось возрастание и убывание чисел?

Б.Френкин

28 (7–9). Петя и Вася играют на шахматной доске в следующую игру. Каждым ходом игрок выбирает некоторую свободную клетку и проводит в ней обе диагонали – одну красным цветом, другую синим. Запрещается проводить диагональ так, чтобы она имела общий конец с уже проведенной диагональю такого же цвета. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Петя. Кто из них может выигрывать, как бы не играл противник?

А.Шаповалов

29 (7–9). На клетчатой доске 8×8 часть клеток отмечена. Известно, что ладья может пройти от любой отмеченной до любой другой, не перепрыгивая через неотмеченные клетки, причем единственным маршрутом (иначе говоря, нет замкнутых маршрутов ладьи по отмеченным клеткам). Какое наибольшее число клеток может быть отмечено?

Б.Френкин

30 (9). Через вершину C ромба $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезки AB и BD в точках M и K соответственно. Окружность, проходящая через точки A, M и K, пересекает прямые BD и AD в точках P и L соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника CKP совпадает с центром описанной окружности треугольника CML.

Ю.Блинков

Публикацию подготовили Д.Калинин, А.Шаповалов

ГОЛОВОЛОМКИ

Танграм

(Начало см. на 2-й странице обложки)

«Квант» уже писал о танграме в №5 за 1989 год. В этом номере мы предлагаем еще несколько заданий. Ниже вы видите 13 выпуклых многоугольников. Чтобы сложить каждый из них, потребуется весь набор из семи танов. Попробуйте сделать это. Оказывается, что другие выпуклые многоугольники из семи танов сложить невозможно. Это установили китайские математики в 1942 году.

В заключение сформулируем одну забавную задачу.

Аня подарила на Новый Год своим младшим братьям Боре и Вите по танграму. Задание для них было одно: сложить квадрат, использовав для этого все части. Через несколько дней, после многих тщетных попыток решить головоломку, Боря убедился, что из его набора это сделать невозможно. Посмотрев на Борин набор, Аня догадалась, в чем дело: она ошиблась и положила две детали не в ту коробку! В итоге одному брату достался набор из пяти частей, а второму – из девяти. Боря предложил рассказать об этом Вите, но Аня немного поразмыслила и поняла, что из Витиного набора все равно можно сложить квадрат. Так какие же части Аня упаковала неправильно?

Е.Епифанов