Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2011 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2199» или «Ф2205». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2200 предлагалась на Болгарской национальной математической олимпиаде 2010 года, задача М2201 – на VI Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2199–М2205, Ф2205–Ф2212

М2199. Натуральное число, имеющее в десятичной записи n цифр, назовем *n-драконом*, если оно является точным квадратом и для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ после вычеркивания k последних цифр (отрубаем хвост дракону) оно будет точным квадратом. Для какого наибольшего n существует n-дракон?

В.Сендеров

М2200. Таблица 2×2010 (2 горизонтальных ряда по 2010 клеток) разделена на единичные клетки. Иван ставит горизонтальное домино ⬜⬜, которое покрывает в точности две клетки таблицы; затем Петр ставит вертикальное домино ⬜/⬜, которое покрывает две клетки таблицы; потом Иван снова ставит горизонтальное домино, Петр снова ставит вертикальное домино и т.д. (каждый раз домино можно ставить только на еще не покрытые клетки). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Попробуйте также изучить эту игру на таблице $2\times n$ при различных значениях n.

Э.Колев

М2201. Рассматриваются прямые, проходящие через вершину B треугольника ABC, пересекающие сторону AC в точке K, а описанную окружность треугольника ABC – в точке M, отличной от B. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK.

Ю.Блинков

М2202. Дана арифметическая прогрессия из 22 различных натуральных чисел, каждое из которых является точной степенью (т.е. степенью натурального числа, большей 1). Докажите, что разность этой прогрессии больше 2010.

П.Кожевников

М2203. Дан правильный mn-угольник. Среди его вершин m вершин покрашены красным, а n – синим (никакая вершина не покрашены дважды). Докажите, что некоторый отрезок с концами в красных точках равен некоторому отрезку с концами в синих точках.

И.Богданов, С.Берлов

М2204. Дан четырехугольник $ABCD$, описанный около окружности. Прямая l проходит через вершину A, пересекает отрезок BC в точке M и луч DC – в точке N. Пусть I_1, I_2, I_3 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, MNC, NDA. Докажите, что прямая l проходит через точку пересечения высот треугольника $I_1I_2I_3$.

Н.Белухов

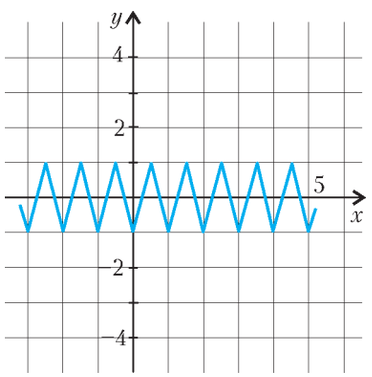


Рис. 1

М2205*. На рисунке 1 изображен график функции $g(x)$, т.е. $g(x)$ – периодическая функция с периодом 1 такая, что

$$g(x)=\begin{cases}4x-1, & \text{если } 0\le x\le \dfrac{1}{2},\\ -4x-1, & \text{если } -\dfrac{1}{2}\le x\le 0.\end{cases}$$

Положим $f(x) = x + g(x)$. Для данного действительного числа t определим последовательность $\{s_n(t)\}$ следующим правилом: $s_0(t) = t$, $s_{n+1}(t) = f(s_n(t))$ при $n \geq 0$. Докажите, что для некоторого числа t_0 последовательность $\{s_n(t_0)\}$ всюду плотна, т.е. для любых чисел $a < b$ найдется номер n такой, что $a < s_n(t_0) < b$.

Д.Фон-Дер-Флаас

Ф2205.[1] На горизонтальной поверхности льда нарисована окружность радиусом R = 10 м. В центре окружности находится заяц, а волк, как вы, наверное, уже догадались, – на окружности. Заяц начинает двигаться по прямой с постоянной скоростью v_0 = = 2 м/с, как показано на рисунке 2. Волк должен двигаться по окружности так, чтобы расстояние между ним и зайцем все время оставалось равным начальному. До какой точки окружности волк сможет добраться, не нарушая правил игры? Коэффициент трения о лед μ = 0,05. Волк движется строго по окружности, не подпрыгивая. (Ф1303)

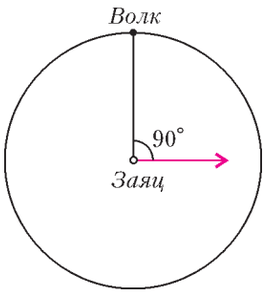


Рис. 2

Ф2206. Прямоугольный сосуд с водой стоит на двух опорах, разнесенных на расстояние L друг от друга. Над сосудом на перекладине подвешен на нити кусок свинца массой M на расстоянии l от центра сосуда (рис.3). Силы реакции опор при этом равны N_1 и N_2. Нить удлиняют так, что свинец погружается в воду. Какими станут после этого силы реакции опор? Плотность свинца в n раз больше плотности воды. (Ф1253)

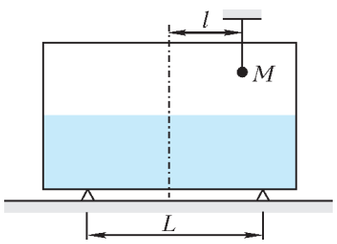


Рис. 3

Ф2207. Погремушка в виде полого стального шара объемом 0,2 л содержит внутри 300 стальных шариков радиусом 1 мм каждый. Ее трясут так, что шарики внутри непрерывно сталкиваются между собой и со стенками, издавая ужасный шум. Считая скорость погремушки равной 1 м/с, оцените число соударений между шариками за 1 минуту. Излучаемая звуковая мощность равна 10 Вт, выделением тепла при ударах пренебречь. (Ф1219)

Ф2208. В сосуде под поршнем находится некоторое количество жидкого азота и его паров при температуре T_1 = 78 К (точка *1* на рисунке 4). Поршень медленно отодвигают, увеличивая объем сосуда при постоянной температуре (участок *1–2–3*). В точке *3* давление в сосуде становится равным 686 мм рт.ст. Поршень закрепляют и охлаждают сосуд до температуры T_2 = 76 К, давление при этом уменьшается до 657 мм рт.ст. (точка *4*). Каким будет давление в сосуде, если при этой температуре медленно передвинуть поршень в начальное положение? Какая масса жидкости первоначально была в сосуде? Молярная масса азота M = 28 г/моль. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3. (Ф1310)

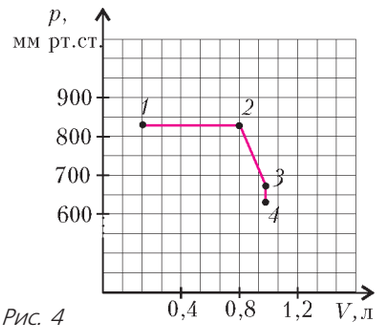


Рис. 4

Ф2209. Лампочку для карманного фонаря подключают к источнику напряжения длинными проводами. При длине проводов 10 м ток через лампочку оказался равным 0,17 А, при 20 м – 0,13 А. Каким будет ток через лампочку при длине проводов 40 м? Каким станет этот ток, если лампочку подключить прямо к источнику? Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Зависимость тока через лампочку от напряжения на ней приведена на рисунке 5. (Ф1311)

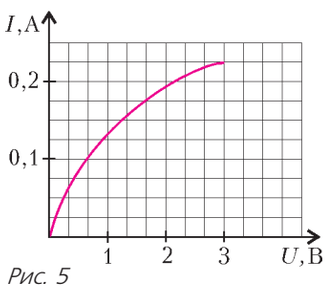


Рис. 5

Ф2210. Электрическая лампочка включена в сеть частотой 50 Гц последовательно с катушкой, индуктивность которой 1 Гн. Параллельно лампочке подключили конденсатор неизвестной емкости, и оказалось, что лампочка горит при этом с той же яркостью, что и без конденсатора. Определите его емкость. (Ф1272)

Ф2211. Из нескольких одинаковых CL-звеньев, подключенных друг за другом, собрана цепь для измерений на частоте 50 Гц (рис.6). К выходу последнего звена был подключен конденсатор, после чего ток, потребляемый всей цепью от источника, и разность фаз между этим током и приложенным напряжением перестали зависеть от числа подключенных звеньев. Какую емкость C_x имел подключенный

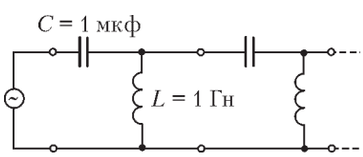


Рис. 6

[1] *Задачи по физике в этом номере журнала представляют собой подборку избранных задач А.Р.Зильбермана за прошлые годы. Александр Рафаилович был автором стольких задач, что многие из них выходили под разными псевдонимами (всего набралось более 100 псевдонимов). Однако самые удачные задачи он подписывал своим настоящим именем. Именно такие задачи и вошли в предлагаемую подборку.*

В конце каждой задачи указан ее изначальный номер, что позволит читателю найти ее решение (например, в Интернете).

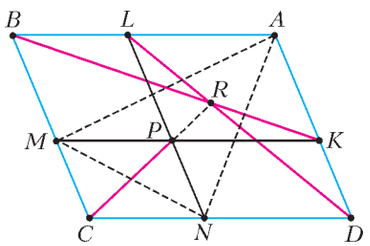
конденсатор? Можно ли дать однозначный ответ на этот вопрос? (Ф1242)

Ф2212. Нелинейность вольт-амперной характеристики лампы накаливания связана с тем, что сопротивление нити увеличивается с ее нагревом. Получите зависимость тока через лампу от приложенного к ней напряжения при следующих упрощающих предположениях: теплоотдачу считайте связанной с излучением ($P_{изл} \sim T^4$, где T – температура нити); сопротивление нити $R \sim T$. Параметры лампы: 60 Вт, 220 В. Теперь снизим напряжение до 200В. Какой будет мощность лампы? Сильно ли упадет световой поток? (Ф1227)

Решения задач М2176–М2183, Ф2190–Ф2195

М2176. *На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N. Докажите, что медианы треугольников ABM, ADN и CMN, проведенные соответственно из вершин B, D и C, пересекаются в одной точке.*

Проведем через M и N прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Теперь в конструкции (см. рисунок) участвуют две тройки параллельных прямых – AD, BC, LN и AB, CD, KM, и наша задача эквивалентна тому, что прямые BK, CP и DL пересекаются в одной точке.



Это несложно доказать, например, при помощи векторов. Положим $\overrightarrow{CB} = \bar{a}$, $\overrightarrow{MB} = \alpha\bar{a}$, $\overrightarrow{CD} = \bar{b}$, $\overrightarrow{ND} = \beta\bar{b}$. Пусть R – точка пересечения BK и CP. Тогда $\overrightarrow{CR} = t\overrightarrow{CP} = t\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN}\right) = t\left((1-\alpha)\bar{a} + (1-\beta)\bar{b}\right)$. С другой стороны, $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{CB} + s\overrightarrow{BK} = \bar{a} + s\left(\bar{b} - \alpha\bar{a}\right) = (1-s\alpha)\bar{a} + s\bar{b}$. Приравнивая два разложения вектора $\overrightarrow{CR}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, получаем $s = t(1-\beta)$ и $t(1-\alpha) = 1 - s\alpha = 1 - t(1-\beta)\alpha$, откуда $t = \dfrac{1}{1-\alpha\beta}$. Как видим, t симметрично относительно α и β, поэтому, обозначая $R' = CP \cap DL$, для вектора $\overrightarrow{CR'}$ мы получим (сделав выкладки, аналогичные приведенным выше) то же самое выражение, что и для вектора $\overrightarrow{CR}$. Значит, точка $R = R'$ и есть общая точка прямых BK, CP и DL.

Замечания. Интересная интерпретация данного сюжета получится, если представить, что точки K и L движутся с постоянными скоростями по прямым DA и BA, начиная движение из точек D и B соответственно (параллелограмм $ABCD$ – фиксированный), и в каждый момент времени мы рассматриваем наш рисунок. Тогда легко видеть, что направление прямой CP не меняется, поэтому точка пересечения $R = BK \cap DL$ движется по фиксированной прямой. В случае равенства скоростей точек K и L пааллелограмм $CMPN$ в любой момент является ромбом, поэтому R движется по биссектрисе угла BCD (это утверждение предлагалось в качестве задачи на зональном этапе Всероссийской олимпиады в 2001 году).

Другой пример. Если $CL \perp AB$ и $CK \perp AD$, то KM и LN – высоты треугольника CKL, поэтому CP – третья высота. Так как CP проходит через $R = BK \cap DL$, то $CR \perp KL$ (последнее утверждение – задача с устной Московской олимпиады по геометрии 2010 года).

Отметим в заключение, что при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$ прямая, проходящая через точки C, P и $R = BK \cap DL$, переходит в прямую, проходящую через середины отрезков BD, KL и AR, т.е. в *прямую Гаусса* для четверки прямых AB, AD, BK и DL. Как видим, несложная конструкция данной задачи оказывается связана с интересными (и более трудными) вопросами.

Л.Емельянов, П.Кожевников, А.Полянский, Д.Храмцов

М2177. *Существует ли такой угол α, что для любого натурального n число $\cos n\alpha$ – рационально, а число $\sin n\alpha$ – иррационально?*

Ответ: существует.

Один из возможных примеров $\alpha = \arccos\dfrac{1}{3}$. Докажем, что этот пример подходит. Имеем $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Лемма. *Для любого t и целого $n \geq 0$ выполнены равенства*

$$\cos nt = T_n(\cos t),$$

$$\sin nt = \sin t \cdot U_n(\cos t),$$

где T_n и U_n – многочлены с целыми коэффициентами.

Доказательство легко получается по индукции (с базой $n = 0,\ 1$) с помощью равенств

$$\cos(k+1)t = 2\cos t\cos kt - \cos(k-1)t, \qquad (1)$$

$$\sin(k+1)t = 2\sin t\cos kt + \sin(k-1)t.$$

Из леммы следует, что при всех натуральных n число $\cos n\alpha$ – рационально, а число $\sin n\alpha$ – иррационально либо равно 0. Остается доказать, что $\sin n\alpha \neq 0$. По индукции докажем, что $\cos n\alpha = \dfrac{p_n}{3^n}$, где p_n не кратно 3. База $n = 0,\ 1$ очевидна $(p_0 = p_1 = 1)$. Переход следует из формулы (1): $\cos(k+1)\alpha = \dfrac{2p_k}{3^{k+1}} - \dfrac{p_{k-1}}{3^{k-1}} = \dfrac{2p_k - 9p_{k-1}}{3^{k+1}}$, и $p_{k+1} = 2p_k - 9p_{k-1}$ не делится на 3. Таким образом, при натуральных n число $\cos n\alpha$ не является целым, значит, $\sin n\alpha \neq 0$.

Замечания. Аналогично рассмотренному случаю $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ можно доказать, что $\cos n\alpha$ не является целым ни при каком натуральном n, если $\cos\alpha = \dfrac{p}{q}$, где p и q – взаимно простые целые числа, $0 < |p| < q$, $q \neq 2$. Таким образом, $\cos\pi a$, где a рационально, принимает лишь следующие рациональные значения:

$0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$. Естественным обобщением этого утверждения является рассмотрение в качестве значений функции суперпозиции простейших – квадратных иррациональностей. В частном случае ее решение дает знаменитая **теорема Гаусса**. Вот одна из возможных формулировок.

Пусть калькулятор (вычисляющий с абсолютной точностью) имеет кнопки

$$1, +, -, \times, :, \sqrt{}$$

(и неограниченную память). На этом калькуляторе можно вычислить значение $\cos\frac{2\pi}{n}$ *тогда и только тогда, когда* $n = 2^{\alpha} p_1 \dots p_l$, *где* α *– целое неотрицательное,* $p_1, \dots, p_l$ *– различные простые числа вида* $2^{2^s}+1$.

Нетрудно показать, что эта теорема решает задачу и для всех чисел $\cos \pi a$, где a рационально. Об этой теореме можно прочесть в статье С.Гиндикина «Дебют Гаусса» («Квант» № 1 за 1972 г.).

В.Сендеров

M2178. *В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причем если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами А и Б, то самолеты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолеты всех трех компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трех компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.*

Вылетим из любого города A первой компанией, попадем в город $Б$, из него вылетим второй компанией, далее третьей, затем снова первой, второй, третьей и т.д. Рассмотрим самый первый момент, когда на этом пути встретился город B, где мы уже были. Тогда кусок нашего пути от первого посещения города B до второго и будет искомым. В самом деле, если мы в первый раз вылетели из города B в город $Г$, то из $Г$ сразу вернуться в B мы не могли. Поэтому между двумя посещениями города B мы совершили хотя бы три перелета и, значит, воспользовались по пути рейсами всех трех компаний.

С.Берлов

M2179. *В вершинах куба расставили числа* $1^2, 2^2, \dots, 8^2$ *(в каждую из вершин – по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.*

Ответ: 9420.

Раскрасим вершины куба в два цвета так, чтобы концы каждого ребра были разноцветными. Пусть в вершинах одного цвета стоят числа a_1, a_2, a_3, a_4, а в вершинах другого – числа b_1, b_2, b_3, b_4, причем числа с одинаковыми номерами стоят в противоположных вершинах. Тогда, как легко проверить, указанная в условии сумма произведений будет равна

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4).$$

По неравенству о средних,

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) \le (a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4)^2/4 = \left(1^2+2^2+\dots+8^2\right)^2/4 = 10404,$$

причем равенство достигается только при $a_1+a_2+a_3+a_4 = b_1+b_2+b_3+b_4$ (условие максимальности). С другой стороны, сумма $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$, где a_i и b_i – числа $1^2, 2^2, \dots, 8^2$, минимальна тогда, когда 8^2 умножается на 1^2, 7^2 – на 2^2, 6^2 – на 3^2, 5^2 – на 4^2 (условие минимальности). В самом деле, пусть 8^2 умножается на $a^2 \ne 1^2$, а 1^2 – на b^2. Понятно, что, умножив 8^2 на 1^2, а a^2 – на b^2, мы уменьшим сумму $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$. Затем аналогично показываем, что мы уменьшим сумму, умножив 7^2 на 2^2, и т.д. Оказывается, можно добиться *одновременного* выполнения условия максимальности и условия минимальности: для этого надо в вершины одного цвета поставить числа 1^2, 4^2, 6^2 и 7^2, а в вершины другого – остальные таким образом, чтобы 8^2 и 1^2, 7^2 и 2^2, 6^2 и 3^2, 5^2 и 4^2 стояли в противоположных вершинах. Понятно, что такая расстановка и даст искомый максимум сумм произведений, равный

$$10404 - \left(8^2\cdot 1^2 + 7^2\cdot 2^2 + 6^2\cdot 3^2 + 5^2\cdot 4^2\right) = 10404 - 984 = 9420.$$

Замечание. Тот факт, что числа $1^2, 2^2, \dots, 8^2$ можно разбить на две группы по 4 числа с равными суммами чисел, не случаен. Заметим, что $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, поэтому

$$\left((n+3)^2-(n+2)^2\right) - \left((n+1)^2-n^2\right) = (2n+5)-(2n+1) = 4$$

при любом n. Отсюда

$$\left(1^2-2^2-3^2+4^2\right) - \left(5^2-6^2-7^2+8^2\right) = 1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2 = 4-4 = 0.$$

Д.Фон-дер-Флаасс

M2180. *Многочлен* x^{2010} *разделили на многочлен* $x^3-6x^2+11x-6$ *с остатком. В качестве неполного частного был получен многочлен* $P(x)$. *Докажите, что коэффициенты многочлена* $P(x)$ *положительны.*

Из процесса деления столбиком легко вытекает

Лемма. *Если ненулевой многочлен с неотрицательными коэффициентами делится на* $x-c$, *где* $c>0$, *то у неполного частного все коэффициенты положительны.*

Далее, заметим, что при делении на произведение многочленов можно вычислять неполные частные последовательно, т.е. для вычисления неполного частного

при делении многочлена Q_1 на f_1f_2 достаточно сначала получить неполное частное Q_2 при делении Q_1 на f_1, а затем получить неполное частное Q_3 при делении Q_2 на f_2. Действительно, пусть $\frac{Q_1}{f_1} = Q_2 + \frac{r_1}{f_1}$, $\frac{Q_2}{f_2} = Q_3 + \frac{r_2}{f_2}$, где остатки r_1, r_2 – многочлены степени меньше чем степени f_1 и f_2 соответственно. Тогда $\frac{Q_1}{f_1f_2} = Q_3 + \frac{r_2}{f_2} + \frac{r_1}{f_1f_2} = Q_3 + \frac{r_2f_1 + r_1}{f_1f_2}$. Так как степень $r_2f_1 + r_1$ меньше степени f_1f_2, то Q_3 – неполное частное при делении Q_1 на f_1f_2.

Наконец, заметим, что $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$. Отсюда получаем утверждение задачи, применяя трижды лемму для деления многочлена x^{2010} последовательно на $x - 1$, $x - 2$ и $x - 3$.

П.Кожевников

M2181*. *Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Известно, что каждое из чисел 1, 2, 3, …, 2n! принадлежит хотя бы одной из прогрессий. Докажите, что каждое целое число принадлежит хотя бы одной из данных прогрессий. Насколько можно уменьшить число 2n!, чтобы утверждение осталось верным?*

Ответим на первый вопрос задачи. На второй дан ответ в заметке И.Богданова в конце раздела.

Все рассматриваемые здесь арифметические прогрессии непостоянные и бесконечные в обе стороны. Докажем индукцией по n следующее утверждение, обобщающее утверждение задачи:

пусть прогрессии A и $A_1,\dots,A_n$ таковы, что каждый из некоторых 2n! последовательных членов A принадлежит хотя бы одной из прогрессий $A_1,\dots,A_n$. Тогда каждый член A принадлежит хотя бы одной из прогрессий $A_1,\dots,A_n$.

База $n = 1$ очевидна. Пусть утверждение верно для $n - 1$ прогрессий A_i. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2n!}$ есть $2n!$ последовательных членов прогрессии A, d – разность прогрессии. Среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ найдутся два, принадлежащих одной из прогрессий $A_1,\dots,A_n$ пусть для определенности a_j и $a_{j+k} = a_j + kd$ $(1 \le k \le n)$ лежат в A_n. Разобьем прогрессию A на k прогрессий (с разностью kd) $B_1, B_2, \dots, B_k$ так, что прогрессия B_i содержит число a_i для $i = 1, 2, \dots, k$ соответственно. Каждая из прогрессий B_i содержит ровно $2n!/k \ge 2(n-1)!$ из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n!}$, значит, из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n!}$ можно взять $2(n-1)!$ последовательных членов прогрессии B_i. Каждая из прогрессий B_i либо целиком содержится в A_n, либо не пересекается с A_n. Во втором случае к ней и прогрессиям $A_1,\dots,A_{n-1}$ применимо предположение индукции. Поэтому каждый член прогрессий B_i, а значит и прогрессии A, является членом одной из прогрессий $A_1,\dots,A_n$.

П.Кожевников, И.Богданов

M2182. *Дан выпуклый четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждого i = 1, 2, 3, 4 рассмотрим окружность ω_i, лежащую вне четырехугольника, касающуюся прямых $A_{i-1}A_i, A_{i+1}A_{i+2}$ и касающуюся отрезка A_iA_{i+1} в точке T_i (индексы рассматриваются по модулю 4, так что $A_0 = A_4$, $A_5 = A_1$ и $A_6 = A_2$; рис.1). Докажите, что прямые A_1A_2, A_3A_4 и T_2T_4 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямые A_2A_3, A_4A_1 и T_1T_3 пересекаются в одной точке.*

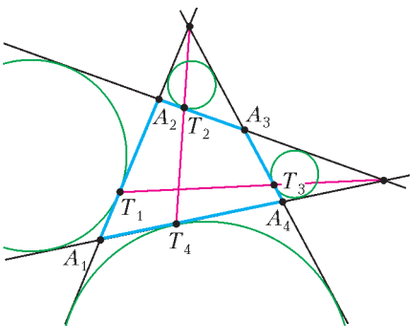


Рис. 1

Лемма. *Пусть четыре прямые l_i (i =1, 2, 3, 4), среди которых нет параллельных, касаются окружности ω в точках K_i, и прямые l_1, l_3, K_2K_4 пересекаются в одной точке. Тогда прямые l_2, l_4, K_1K_3 также пересекаются в одной точке.*

Доказательство леммы. Пусть O – центр окружности ω, положим $X = l_1 \cap l_3 \cap K_2K_4$, $Y = l_2 \cap l_4$ (рис.2). Имеем $OX \perp K_1K_3$, $OY \perp K_2K_4$. Пусть $Z = OX \cap K_1K_3$, $T = OY \cap K_2K_4$. Заметим, что $\Delta OK_1X \sim \Delta OZK_1$ и $\Delta OK_2Y \sim \Delta OTK_2$, отсюда $OY \cdot OT = OK_2^2 = OK_1^2 = OX \cdot OZ$. Это означает, что $\Delta OXT \sim \Delta OYZ$, значит, $YZ \perp OX$, поэтому $Y \in K_1K_3$. Лемма доказана.

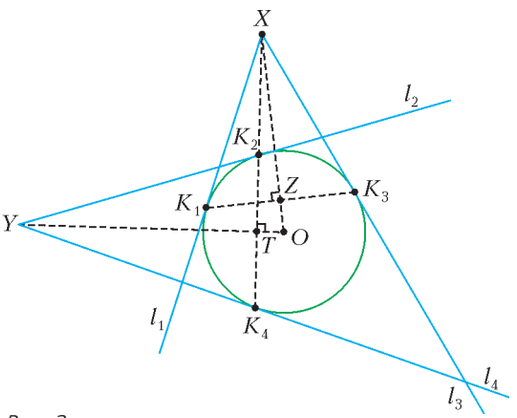


Рис. 2

Достаточно доказать, что если прямые A_2A_3, A_4A_1, T_1T_3 пересекаются в одной точке, то и прямые A_1A_2, A_3A_4, T_2T_4 пересекаются в одной точке, так как обратное утверждение аналогично.

Пусть прямые A_2A_3, A_4A_1, T_1T_3 проходят через точку P. Предположим, что окружность ω_1 касается прямых A_1A_4 и A_2A_3 в точках T_4' и T_2' соответственно (рис. 3). Пусть T_3' – вторая точка пересечения прямой T_1T_3 и

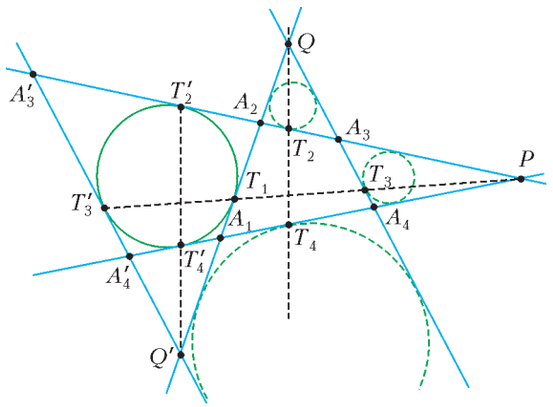


Рис. 3

окружности ω_1. Пусть касательная к ω_1, проходящая через T_3', пересекает прямые A_1A_4 и A_2A_3 в точках A_4' и A_3' соответственно. Гомотетия с центром P, переводящая ω_1 в ω_3, переводит T_3' в T_3, поэтому $A_3A_4 \parallel A_3'A_4'$. Пусть $Q = A_1A_2 \cap A_3A_4$, $Q' = A_1A_2 \cap A_3'A_4'$. Применяя лемму к окружности ω_1 и прямым A_1A_2, A_2A_3, $A_3'A_4'$, A_4A_1, получаем, что точки Q', T_2', T_4' лежат на одной прямой. Гомотетия с центром A_1, переводящая треугольник QA_1A_4 в треугольник $Q'A_1A_4'$, переводит T_4 в T_4' (так как T_4 и T_4' – соответствующие точки касания в подобных треугольниках QA_1A_4 и $Q'A_1A_4'$), поэтому $Q'T_4' \parallel QT_4$. Аналогично, гомотетия с центром A_2, переводящая треугольник QA_2A_3 в треугольник $Q'A_2A_3'$, переводит T_2 в T_2', следовательно, $Q'T_2' \parallel QT_2$. Так как точки Q', T_2', T_4' лежат на одной прямой, то точки Q, T_2, T_4 также лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Утверждение задачи останется верным, если заменить окружности ω_i на окружности, касающиеся прямых $A_{i-1}A_i$, $A_{i+1}A_{i+2}$ и отрезка A_iA_{i+1}, пересекающиеся с четырехугольником. При этом точки T_i заменятся на точки, симметричные T_i относительно середин отрезков A_iA_{i+1}.

Замечание 2. Утверждение леммы – это переформулировка известного критерия гармоничности четырехугольника $(K_1K_2K_3K_4)$.

П.Кожевников

M2183. *Дано натуральное число n. Назовем множество K, состоящее из точек плоскости с целыми координатами, связным, если для любых двух точек $R, S \in K$ существуют натуральное l и последовательность точек $R = T_0, T_1, \ldots, T_l = S$, принадлежащих K, такая, что длина любого отрезка вида T_iT_{i+1} равна 1. Для связного множества K обозначим через $\delta(K)$ количество попарно неравных векторов в множестве $\Delta K = \left\{\overrightarrow{RS} \,\middle|\, R, S \in K\right\}$. Найдите максимальное возможное значение $\delta(K)$, если K пробегает все связные множества из $2n + 1$ точек плоскости с целыми координатами.*

Ответ: $2n^2 + 4n + 1$.

Если K состоит из точек $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, …, $(0, n)$, $(-1, 0)$, $(-2, 0)$, …, $(-n, 0)$, то ΔK состоит из всех векторов вида (x, y), где x и y – целые неотрицательные числа, не превосходящие n (таких векторов $(n+1)^2$), либо целые неположительные числа, не превосходящие n (таких векторов $(n+1)^2$). Количество таких векторов равно $2(n+1)^2 - 1 = 2n^2 + 4n + 1$, поскольку нулевой вектор был учтен дважды. Остается доказать, что для любого связного множества точек с целыми координатами выполнено $\delta(K) \le 2n^2 + 4n + 1$.

Рассмотрим граф G, вершины которого являются точками множества K, а ребра – отрезки длины 1. Ребра бывают одного из двух типов – горизонтальные и вертикальные. По условию граф G связный. Если в графе G найдется ребро, после удаления которого граф остается связным, то удалим это ребро. Последовательно удаляем ребра таким образом, пока это возможно. В конечном итоге мы придем к связному графу G', который при удалении любого ребра перестает быть связным. Это означает, что G' – дерево. Пусть в этом дереве h горизонтальных и v вертикальных ребер. Как известно, в дереве число ребер на 1 меньше числа вершин, т.е. $h + v = 2n$.

По графу G' определим новый граф Γ следующим образом. Вершинами Γ объявим все векторы $\overrightarrow{XY}$, где $X, Y \in K$ (таким образом, в графе Γ содержится $(2n+1)^2$ вершин). Две «вершины» $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{X'Y'}$ графа Γ соединим ребром, если векторы $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{X'Y'}$ равные, а XX' и YY' – ребра в графе Γ (одного типа). Как нетрудно видеть, каждая упорядоченная пара (XX', YY') ребер (возможно, совпадающих) одинакового типа (горизонтальных или вертикальных) графа G' определяет единственное ребро графа Γ, поэтому в графе Γ проведено $h^2 + v^2$ ребер. Легко видеть, что в Γ нет циклов (иначе циклы были бы и в G'), поэтому количество N компонент связности графа Γ равно разности количеств вершин и ребер. Получаем, что

$$N = (2n+1)^2 - \left(h^2 + v^2\right) \le (2n+1)^2 - \frac{1}{2}(h+v)^2 =$$

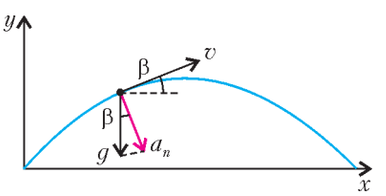
$$= (2n+1)^2 - 2n^2 = 2n^2 + 4n + 1.$$

Остается заметить, что в каждой компоненте связности графа Γ все «вершины» – равные векторы, и, значит, $\delta(K) \le N$.

В.Омельяненко, К.Савенков

Ф2190. *Камень брошен с начальной скоростью $v_0 = 40$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найдите максимальную угловую скорость вращения вектора скорости камня в процессе свободного полета.*

Если в какой-то точке полета скорость камня $\vec{v}$ составляет угол β с горизонтом, то радиус кривизны траектории R



вычисляется по формуле (см. рисунок)

$$a_n = g\cos\beta = \frac{v^2}{R},\ \text{откуда}\ R = \frac{v^2}{g\cos\beta}.$$

Для угловой скорости получаем

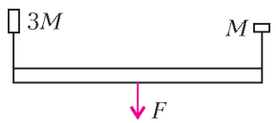
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{g\cos\beta}{v}.$$

При движении от точки броска до верхней точки траектории $\cos\beta$ монотонно возрастает, а модуль скорости v монотонно убывает. Следовательно, угловая скорость максимальна в верхней точке, где $\cos\beta = 1$, а $v = v_{0x} = v_0\cos\alpha$, и равна

$$\omega_{\max} = \frac{g}{v_0\cos\alpha} \approx 0{,}3\ \text{с}^{-1}.$$

А.Камнев

Ф2191. *На гладком горизонтальном столе находится легкий стержень, к концам которого привязаны короткие нерастяжимые куски легкой нити (см. рисунок). К свободным концам кусков нити прикреплены грузы массами M и $3M$, лежащие на столе. К середине стержня приложена сила F, параллельная кускам нити и перпендикулярная стержню. Найдите ускорение середины стержня.*



Запишем второй закон Ньютона для грузов и стержня:

$$T_1 = 3Ma_1,\ T_2 = Ma_2,\ F - T_1 - T_2 = 0$$

(масса стержня равна нулю). Кроме того, равна нулю сумма вращательных моментов сил, действующих на стержень, например, относительно его середины:

$$T_1\frac{l}{2} - T_2\frac{l}{2} = 0.$$

Решая полученные уравнения, находим

$$a_1 = \frac{F}{6M},\ a_2 = \frac{F}{2M}.$$

Ускорение середины стержня равно (подумайте, почему)

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{F}{3M}.$$

А.Повторов

Ф2192. *Имеются 16 одинаковых батареек с ЭДС $\mathcal{E} = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом каждая. Сопротивление нагрузки $R = 1$ Ом. Как нужно соединить батарейки, чтобы получить максимальный ток нагрузки? Найдите этот ток.*

Рассмотрим только случай соединения $N = m\times n$ источников в прямоугольник – n параллельных групп из m последовательно соединенных источников (либо m последовательных групп из n параллельно соединенных источников). Внутреннее сопротивление такой батареи равно $mr/n = m^2r/N$, а ЭДС равна $m\mathcal{E}$. Сила тока через нагрузку, равная

$$I = \frac{m\mathcal{E}}{\frac{m^2r}{N} + R} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{mr}{N} + \frac{R}{m}},$$

максимальна, когда

$$\frac{mr}{N} = \frac{R}{m},\ \text{т.е.}\ m = \sqrt{N}\sqrt{\frac{R}{r}}$$

(минимум знаменателя в выражении для тока находится с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом). При $R = r$, как задано в условии задачи, максимальный ток получается при соединении источников в квадрат $m = n = \sqrt{N}$, ток при этом равен

$$I = \frac{\mathcal{E}\sqrt{N}}{2r} = 2\ \text{А}.$$

(Если же $R = 4r$, то $m = 2\sqrt{N}$, $n = \sqrt{N}/2$. Внутреннее сопротивление батареи опять равно сопротивлению нагрузки, а ток через каждый источник в обоих случаях равен $\mathcal{E}/(2r)$.)

А.Зильберман

Дополнение к решению

Можно ли убедиться в том, что никакое другое соединение (не в форме прямоугольника) не может дать еще больший ток? Перебором заниматься не хочется – ведь можно потом вместо 16 источников взять 64 или 256. Оказывается, это можно строго доказать, выразив ток через нагрузку R с помощью закона сохранения энергии (для общности рассмотрим N разных источников)

$$I^2R = \left(\mathcal{E}_1I_1 - I_1^2r_1\right) + \ldots + \left(\mathcal{E}_NI_N - I_N^2r_N\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_1^2}{4r_1} - r_1\left(I_1 - \frac{\mathcal{E}_1}{2r_1}\right)^2 + \ldots + \frac{\mathcal{E}_N^2}{4r_N} - r_N\left(I_1 - \frac{\mathcal{E}_N}{2r_N}\right)^2.$$

Видно, что максимальный ток через нагрузку будет достигнут, если удастся собрать схему так, чтобы

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{2r_1}, \ldots, I_N = \frac{\mathcal{E}_N}{2r_N}.$$

При этом

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1^2}{4Rr_1} + \ldots + \frac{\mathcal{E}_N^2}{4Rr_N}}.$$

Именно такие токи реализуются в предложенных выше прямоугольных схемах.

С.Кротов

Ф2193. *В сосуде под поршнем находится 1 моль газа. Его температура увеличивается на 1 градус в минуту, а объем за 3 минуты изменился от 30 литров до 31 литра. Давление же газа за это время практически не менялось. Найдите это давление.*

Поскольку давление постоянно, то

$$\frac{V}{T} = \frac{V + \Delta V}{T + \Delta T},$$

где $\Delta T = 3$ К. Отсюда $V\Delta T = T\Delta V$, т.е.

$$T = \frac{V\Delta T}{\Delta V} = 90 \text{ К}.$$

Давление найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p = \frac{\nu RT}{V} \approx 25 \text{ кПа}.$$

А.Газов

Ф2194. *Два протона летят навстречу друг другу вдоль одной прямой. В некоторый момент скорости протонов равны v и $2v$, а расстояние между ними равно d. Найдите максимальное ускорение одного из протонов за время их движения.*

Максимальное ускорение протонов соответствует максимальной силе взаимодействия, т.е. минимальному расстоянию между частицами. В момент максимального сближения скорости протонов одинаковы и могут быть найдены из закона сохранения импульса:

$$m \cdot 2v - mv = 2mu, \text{ т.е. } u = \frac{v}{2}.$$

Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} + \frac{kq^2}{d} = \frac{2m(v/2)^2}{2} + \frac{kq^2}{r}.$$

Выражаем отсюда минимальное расстояние r между протонами и подставляем в выражение для ускорения одного из них:

$$a = \frac{kq^2}{r^2 m} = \frac{\left(\frac{9}{4}mv^2 + \frac{kq^2}{d}\right)^2}{kq^2 m}.$$

Д.Протонов

Ф2195. *Униполярный индуктор представляет собой быстро вращающийся постоянный магнит в форме диска. Диск выполнен из магнитного сплава, способного создавать сильное магнитное поле, и покрыт тонким проводящим слоем никеля. При вращении диска между осью вращения и боковой поверхностью возникает разность потенциалов, которую можно измерить с помощью неподвижного вольтметра (рис.1). Если же к оси вращения и боковой поверхности подсоединить батарейку, то магнит начнет*

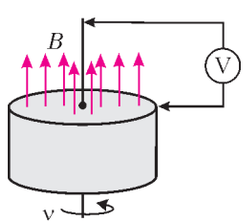


Рис. 1

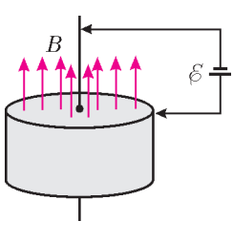


Рис. 2

быстро вращаться, превратившись в электродвигатель. Точно так же, если быстро вращать вал обычного электромотора, он превращается в генератор, и наоборот, если на электрический генератор подать напряжение, он превращается в электромотор. На рисунке 2 показана схема такого реально работающего униполярного электродвигателя, ротором которого является сильный постоянный магнит в форме диска радиусом $r_0 = 2$ см, насаженного на ось. При подключении с помощью скользящих контактов батарейки с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}5$ В диск начинает быстро вращаться.

1) Что покажет неподвижный вольтметр на рисунке 1 при частоте вращения диска $\nu = 3000$ об/мин? Какова полярность этой разности потенциалов? Вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть сверху.

2) Пренебрегая трением, оцените предельную частоту вращения (об/мин) намагниченного диска (ротора униполярного двигателя на рисунке 2). Укажите направление вращения ротора (если смотреть сверху) при заданной полярности батарейки и заданном направлении вектора $\vec{B}$.

Примечание. Считайте, что в проводящем никелевом слое вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля перпендикулярен поверхности диска, постоянен и равен $B = 1$ Тл. Также для упрощения считайте, что ток в проводящем слое течет вдоль радиуса между осью и контактом.

1) На свободные электроны в проводящем слое при вращении диска действует сила Лоренца, равная $F_Л = evB$, где e – заряд электрона, $v = \omega r = 2\pi\nu r$ – линейная скорость. При указанных на рисунке 1 направлениях магнитного поля и вращения диска сила Лоренца направлена к центру диска. В результате возникает перераспределение зарядов: электроны будут скапливаться в центре, а на боковой поверхности образуется нескомпенсированный положительный заряд. Это приведет к возникновению электрического поля $\vec{E}$, направленного по радиусу к центру. Равновесие наступит, когда в каждой точке проводящего слоя кулоновская сила скомпенсирует силу Лоренца:

$$eE = evB, \text{ т.е. } E = vB.$$

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между боковой поверхностью диска ($r = r_0$) и его центром ($r = 0$) равна

$$\Delta\varphi = \int_0^r E dr = \frac{1}{2}vBr_0.$$

Эта разность потенциалов и будет измерена вольтметром:

$$U = \Delta\varphi = \frac{1}{2}vr_0B = \pi\nu r_0^2 B = 62{,}8 \text{ мВ},$$

причем «минус» – в центре диска, а «плюс» – на боковой поверхности.

2) Диск разгоняется моментом силы Ампера, возникающей в результате взаимодействия радиально направленного тока с магнитным полем диска. В соответствии с правилом левой руки, диск будет вращаться так же, как и на рисунке 1, – против часовой стрелки, если смотреть сверху. Разгон диска прекратится, когда сила тока станет равной нулю, т.е. когда разность потенциалов $\Delta\varphi$, обусловленная действием силы Лоренца,

станет равной ЭДС батарейки $\mathcal{E}$:

$$\Delta\varphi = \mathcal{E}, \text{ или } \pi\nu_{\text{пред}} r_0^2 B = \mathcal{E},$$

откуда

$$\nu_{\text{пред}} = \frac{\mathcal{E}}{\pi r_0^2 B} \approx 7{,}2 \cdot 10^4 \text{ об/мин}.$$

А.Гуденко

О покрытии целых чисел прогрессиями

Данная заметка посвящена точному ответу на последний вопрос в задаче М2181 из Задачника «Кванта»: *Насколько можно уменьшить число 2n!, чтобы утверждение осталось верным?*

Факт, который мы докажем, высказал в качестве гипотезы знаменитый венгерский математик П.Эрдеш в 1965 году. Впервые его (весьма сложно и неэлементарно) доказали через пять лет Р.Криттенден и К.Ванден Эйнден. Мы приводим (с некоторыми изменениями) доказательство, предложенное Жи-Вей Суном в 1995 году.

Гипотеза Эрдеша состояла в следующем.

Теорема. *Рассмотрим n целочисленных арифметических прогрессий, бесконечных в обе стороны. Предположим, что нашлись 2^n последовательных целых чисел, каждое из которых лежит хотя бы в одной из них. Тогда и каждое целое число лежит хотя бы в одной из них.*

Замечание. Число 2^n в этой теореме нельзя заменить на меньшее. Действительно, пусть прогрессия A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) состоит из всех чисел, делящихся на 2^{j-1}, но не делящихся на 2^j. Тогда прогрессии $A_1, A_2, \ldots, A_n$ содержат в объединении все целые числа, не делящиеся на 2^n, и только их; в частности, они содержат все числа от 1 до $2^n - 1$.

Таким образом, число $2n!$ в задаче М2181 можно заменить на 2^n, но не на меньшее число.

Напомним сначала одно обозначение, которое нам потребуется для доказательства теоремы. Пусть x – вещественное число. В согласии с *формулой Муавра* вводится обозначение[1]

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Это обозначение хорошо согласуется с обычными правилами действия со степенями; именно, $\exp(ix + iy) = \exp(ix) \cdot \exp(iy)$ и, как следствие, $\exp(inx) = (\exp(ix))^n$ для любого целого n. Заметим, что $\exp(ix) = 1$ тогда и только тогда, когда x является целым кратным числа 2π (т.е. когда число $\dfrac{x}{2\pi}$ – целое).

Кроме того, нам потребуется следующая лемма, интересная сама по себе (но на первый взгляд далекая от нашей теоремы).

[1] *Другое распространенное обозначение: e^{ix}. Подробнее о комплексных числах и, в частности, о формуле Муавра можно прочитать в статье С.Дориченко «Комплексные числа» в «Кванте» № 5 за 2008 год.*

Памяти Александра Рафаиловича Зильбермана

11 ноября 2010 года ушел из жизни наш близкий друг, член редколлегии журнала «Квант» Александр Рафаилович Зильберман.

Он был выдающимся педагогом с глубоким и уникальным физическим мышлением, умевшим донести свое восхищение красотой любимой физики до своих многочисленных учеников.

В течение всех сорока лет существования журнала «Квант» Александр Рафаилович был одним из самых активных его сотрудников, автором многих статей и чуть ли не половины задач «Задачника «Кванта» по физике», а с 1981 года бессменно возглавлял эту рубрику.

Он участвовал в организации и проведении множества олимпиад и летних школ и был признан коллегами высочайшим в стране авторитетом по нетривиальным физическим задачам. Его ученики достигали больших высот сначала в олимпиадах, а потом и в науке.

Заслуги Александра Рафаиловича были отмечены многими наградами, но не это главное. Главное – благодарность и восхищение детей, учителей, друзей, всех тех, кто имел счастье с ним общаться и у него учиться.

Мы все никогда его не забудем.

Александр Рафаилович Зильберман (04.04.1946–11.11.2010)

Лемма. *Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ – комплексные числа, причем $z_d \neq 0$ при всех $d = 1, 2, \ldots, k$. Предположим, что равенство*

$$a_1 z_1^t + a_2 z_2^t + \ldots + a_k z_k^t = 0 \qquad (1)$$

выполняется при всех $t = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда оно выполняется и для всех целых t.

Доказательство леммы. Если некоторые из чисел $z_1, z_2, \ldots, z_k$ равны, то мы можем сгруппировать соответствующие слагаемые в (1) и уменьшить значение k. Итак, можно считать, что все числа $z_1, z_2, \ldots, z_k$ различны. В этом случае мы докажем, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$, откуда, очевидно, следует требуемое. Предположим противное: некоторый коэффициент a_j ненулевой; можно считать, что $j = 1$.

Сделаем сначала небольшое замечание. Пусть $P(x) = p_{k-1}x^{k-1} + p_{k-2}x^{k-2} + \ldots + p_0$ – произвольный многочлен не более чем $(k-1)$-й степени. Тогда из равенств (1) следует, что

$$a_1 P(z_1) + \ldots + a_k P(z_k) = 0; \qquad (2)$$

действительно, для получения (2) достаточно сложить равенства (1), предварительно умножив равенство с t-ми степенями на p_t.

Нам осталось выбрать подходящий многочлен. Подставим в (2) многочлен $P(x) = (x - z_2)(x - z_3)\ldots(x - z_k)$ степени $k-1$; тогда в левой части обнулятся все слагаемые, кроме первого, ибо $P(z_2) = P(z_3) = \ldots = P(z_k) = 0$; первое же слагаемое будет иметь вид $a_1(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)\ldots(z_1 - z_n) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание. Другое доказательство леммы можно получить, заметив, что последовательность $s_t = a_1 z_1^t + a_2 z_2^t + \ldots + a_k z_k^t$ является линейной рекуррентой[2] порядка n.

Доказательство теоремы. «Сдвинув», если надо, прогрессии, можно считать, что каждое из чисел $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ лежит хотя бы в одной из них. Заметим, что любая прогрессия с разностью d состоит из всех чисел, имеющих фиксированный остаток от деления на d.

Итак, пусть j-я прогрессия ($j = 1, 2, \ldots, n$) состоит из всех чисел, дающих остаток k_j при делении на d_j. Иначе говоря, целое число m принадлежит j-й прогрессии тогда и только тогда, когда число $\dfrac{m - k_j}{d_j}$ тоже целое. Вспомнив формулу Муавра, запишем последнее условие как

$$\exp\left(2\pi i \frac{m - k_j}{d_j}\right) = 1, \text{ или } u_j v_j^m - 1 = 0;$$

здесь мы для краткости ввели обозначения $u_j = \exp\left(-\dfrac{2\pi i k_j}{d_j}\right)$, $v_j = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{d_j}\right)$; числа u_j и v_j не зависят от m.

Последнее условие хорошо тем, что оно позволяет записать также условие того, что m принадлежит *хотя бы одной* из прогрессий! Именно, это происходит тогда и только тогда, когда одно из полученных нами выражений обнуляется, т.е.

$$(u_1 v_1^m - 1)(u_2 v_2^m - 1)\ldots(u_n v_n^m - 1) = 0. \qquad (3)$$

Раскроем все скобки в левой части этого равенства. Мы получим сумму из 2^n членов вида

$$a_1 z_1^m + a_2 z_2^m + \ldots + a_{2^n} z_{2^n}^m = 0, \qquad (4)$$

где числа a_j и z_j не зависят от m; именно, каждое из чисел z_j является либо единицей, либо произведением нескольких (возможно, одного) различных чисел из $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Эта переформулировка позволяет нам напрямую применить лемму. Действительно, поскольку все числа $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ лежат в наших прогрессиях, равенство (4) выполняется при всех $m = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Но тогда оно выполняется и при всех целых m; это и означает, что каждое целое m лежит в одной из наших прогрессий.

И.Богданов

[2] *Заинтересовавшихся линейными рекуррентами отсылаем к соответствующему разделу статьи А.Егорова «Числа Пизо» в «Кванте» №5 за 2005 год.*

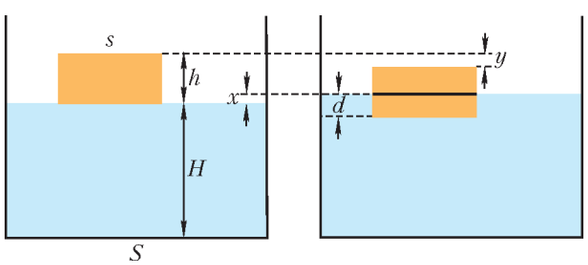
НАША ОБЛОЖКА

Где проходит ватерлиния?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

…Известно, что всякая изолированная система стремится уменьшить свою потенциальную энергию. Попробуем применить этот принцип для поиска положения ватерлинии однородного деревянного бруска, плавающего в воде.

Пусть брусок имеет высоту h, площадь поперечного сечения s и сделан из материала плотностью ρ. Опустим брусок в сосуд с водой плотностью ρ_0, площадь поперечного сечения которого S, а глубина воды в нем (до опускания бруска) H (см. рисунок). Брусок частично погрузится в



(Продолжение см. на с. 43)

Задачи

1. В фотоателье есть правило: если фотографий меньше ста, то напечатать одну фотографию стоит 3 руб. 50 коп., а если фотографий 100 или больше, то печать одной фотографии стоит 3 руб. Получается, что выгоднее отдать в печать 100 фотографий по 3 руб., чем 99 по 3,5 руб. При каком наименьшем числе фотографий можно добавить еще несколько фотографий, чтобы после этого плата за печать уменьшилась?

А.Ковальджи

2. Спичками изображена фигура, представляющая собой объединение четырех одинаковых кубиков. На изображении четвертый кубик не виден, он спрятан за тремя видимыми кубиками. Переложите девять спичек так, чтобы все четыре кубика этой фигуры можно было увидеть.

Н.Авилов

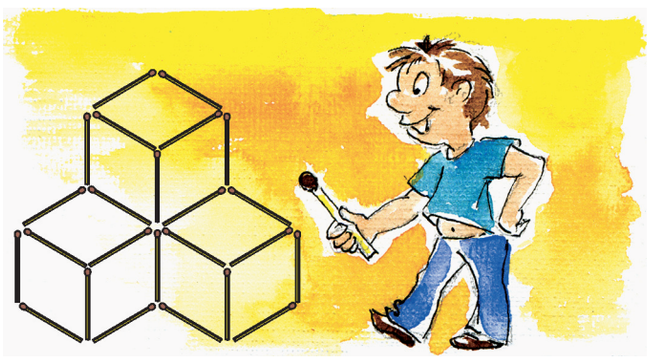


Иллюстрация Д.Гришуковой

3. Придумайте четырехзначное число, которое не делится на 2010, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 2010.

Н.Кушпель

4. Саша, Дима и Федя коллекционируют кусочки пазла «Крошка Енот». Пазл — это картинка, разрезанная на кусочки хитрой формы, среди которых нет одинаковых. Если бы у Феди был желтый кусочек с носом Енота, у Саши был зеленый кусочек с хвостом, а у Димы был синий кусочек с лапкой, то оказалось бы, что любые два мальчика, собравшись вместе, могли бы из своих кусочков составить картинку целиком. Докажите, что уже сейчас втроем мальчики смогут целиком составить пазл.

Ф.Бахарев

5. Разрежьте по клеточкам квадрат размером 10×10 клеток на 5 прямоугольных частей по схеме, показанной на рисунке, так, чтобы площадь прямоугольника *A* была больше площади каждой из остальных частей и при этом периметр прямоугольника *B* был больше периметра каждой из остальных частей.

К.Кохась

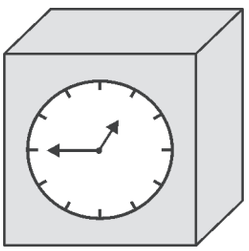
Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов. Задачи 3, 4, 5 предлагались на районном туре 77-й Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: **math@kvant.info** ***(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.***

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Настольные часы с часовой и минутной стрелками имеют форму куба с круглым циферблатом в центре одной из граней. На часах нет чисел и каких-либо пометок, показывающих, где у них верх. Поэтому можно случайно поставить их на бок или даже вверх ногами.



а) Какое время показывают часы на рисунке?

б) Есть ли в сутках хотя бы один такой момент, когда нельзя будет определить, какое время показывают эти часы?

Н.Стрелкова

12. По кругу стоят 10 бочек с водой. Сначала половину воды из первой бочки перелили во вторую, потом треть воды из второй бочки перелили в третью, затем четверть воды — из третьей бочки в четвертую, ..., после чего 1/10 из девятой бочки перелили в десятую и, наконец, долили воду из десятой бочки в первую до ее исходного уровня. Могло ли в каждой бочке оказаться столько же воды, сколько было в ней вначале?

Г.Гальперин

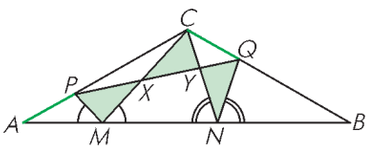
13. Пусть N — натуральное число. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше — разносторонних, у которых длины стороны не меньше 1 и не больше $N+3$, или всевозможных, у которых длины сторон не меньше 1 и не больше N?

А.Эвнин

14. 60 детей построились парами и пошли в музей. По пешеходному переходу они шли толпой, а после него снова построились парами (но некоторые пары могли стать другими). Докажите, что в музее детей можно разбить на три равные группы так, чтобы дети в одной группе ни разу не были в одной паре.

И.Богданов

15. Угол C при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины C выпустили внутрь треугольника два луча, которые, отразившись от основания AB в точках M и N (по закону «угол падения равен углу отражения»), попали соответственно на боковую сторону AC в точку P и на боковую сторону BC в точку Q. Известно, что $AP = CQ$. Пусть отрезок PQ пересекает CM в точке X, а CN — в точке Y. Докажите, что треугольники PMX, XCY и QNY равны.



В.Произволов

Летний турнир имени А.П.Савина

С наступлением лета школьники разъезжаются отдыхать. Но для некоторых ребят увлекательный отдых — решение математических задач. А также общение с теми, у кого такая же горячая любовь к математике. Каждый год в конце июня проходит турнир математических боев памяти А.П. Савина. В 2010 году он состоялся в 16-й раз. Как и раньше, он проходил на берегу живописного озера, на базе отдыха «Берендеевы Поляны» около Судиславля (Костромская область).

В соревнованиях приняли участие 38 команд из Москвы, Санкт-Петербурга, Костромы, Тамбова, Черноголовки, Харькова и Киева. Инициаторы проведения турнира — Григорий Вячеславович Кондаков и образовательная программа «Большая Перемена».

В первый день турнира прошла игра «Математическая абака». Это увлекательное соревнование, где ребятам надо выбирать задачи как по сложности, так и по темам. Так, например, семиклассникам предложили задания по логике и теории чисел, арифметике и алгебре, а также задания, объединенные в группу с расплывчатым названием «Числа». Из победителей назовем команды, занявшие первые места. Среди 6 классов — это команда кружка «Квантик» (Москва). Среди семиклассников — первая команда гимназии 1514 (Москва). Команда школы 82 из Черноголовки (Московская область) стала лучшей в 8 классах. Команда «А» ЦО 218 (Москва) заняла 1 место среди 9 классов.

На следующий день команды 6–8 классов участвовали в командной олимпиаде, по результатам которой они были разделены на лиги. А девятиклассники уже начали сражаться: 6 команд составили отдельную лигу и за 5 дней провели полный круговой

турнир. Команды 6–8 классов разделились на подгруппы лиг 6 классов, 7 классов, 8 классов, а также смешанной лиги 7–8 классов.

Турнир математических боев – это не только борьба с задачами. Каждый вечер группы ребят и руководителей собираются возле листочков с результатами очередного тура, долго обсуждают итоги и пытаются делать прогнозы на следующий тур. Но надо признать, что в большей части групп лиг интриги не получилось: команды в итоге выстроились в таком порядке, когда команда, оказавшаяся в итоге выше, выигрывала у команды, оказавшейся ниже. Сложно было делать прогнозы в 9 классе: здесь три команды настойчиво выигрывали у остальных трех. Все шло к тому, что первые три команды выиграют друг у друга по кругу, и так же произойдет среди оставшихся трех команд. Неужели команды не распределятся по местам? Все ждали последний тур. В итоге неожиданная «ничья» определила 3 и 4 места, а 1 и 2 место определились по личной встрече между командами.

В лиге 6 классов лучшей стала команда московской гимназии 1514, выиграв в финальном бою у шестиклассников школы 179. Зато семиклассники школы 179 заняли первое место, победив прошлогоднего победителя – команду кружка «Фрактал» из Санкт-Петербурга. Первое место в лиге 8 классов заняла сборная команда кружка А.В.Спивака, в которой играл только один ученик 8 класса, а остальные игроки – семиклассники. В результате упорной борьбы в лиге 9 классов лучшей стала команда кружка Т.П.Зориной с названием «Москва-Юг». Заметим, что эта команда выиграла не только два летних турнира – осенью 2009 года они увезли кубок турнира «Kostroma Open 8–9».

Список всех призеров турнира представлен на странице 30.

Один день турнира ребята отдыхают от математических боев. В это время проходит личная олимпиада, а точнее – целых четыре (по каждой из параллелей 6, 7, 8 и 9 классов). Среди шестиклассников лучшими стали *Степан Петров* из Санкт-Петербурга (школа 30) и пятиклассница *Дарья Николаева* (школа 464, Москва). Результат *Юли Зайцевой* (школа 179, Москва) в олимпиаде 7 классов был отмечен «гран-при», а первые дипломы получили два ее одноклассника *Илларион Дмитриев* и *Саша Ватузов*, а также *Андрей Зерцалов* из ЦО 218 Москвы. Но на этом дипломы, заработанные семиклассниками, не закончились – *Андрей Волгин* (7 класс, гимназия 1543, Москва) стал одним из лучших в олимпиаде 8 классов. Дипломы I степени также получили двое киевлян *Никита Щеглов* и *Данил Хилько* (оба – лицей 208) и москвич *Ваня Зверев* (школа 853, Москва). Команды киевского лицея 208, впервые приехавшие на турнир, увезли еще один диплом первой степени – его получил *Максим Чаудхари* в олимпиаде 9 классов. Вместе с ним такой результат

Сборная команда кружка А.В.Спивака

Математический бой

показали *Саша Корочкин* (гимназия 1514, Москва) и *Лев Синяков* (школа 350, Москва).

Обладателями дипломов II степени стали: *Зайцева Татьяна* (6 кл., школа 179, Москва), *Ипатов Михаил* (6 кл., гимназия 1, Кострома), *Виленский Самуил* (6 кл., школа 57, Москва), *Ионица Георгий* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Петренко Иван* (7 кл., лицей 17, Кострома), *Лебедева Дарья* (7 кл., лицей 533, Санкт-Петербург), *Лукашевич Дмитрий* (7 кл., гимназия 28, Кострома), *Чистопольская Алиса* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Белугина Виктория* (7 кл., лицей 533, Санкт-Петербург), *Гудков Сергей* (8 кл., гимназия 1514, Москва), *Райко Арсений* (8 кл., школа 179, Москва), *Зуев Антон* (8 кл., школа 179, Москва), *Мельниченко Петр* (8 кл., школа 315, Москва), *Мукин Тарас* (8 кл., лицей 14, Тамбов), *Князева Алиса* (8 кл., ФМЛ 27, Харьков), *Кулаков Петр* (8 кл., школа 82, Черноголовка), *Любчик Евгений* (8 кл., УВК 45 АГ, Харьков), *Хачатурян Марина* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Никитин Игорь* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Харитонова Елена* (8 кл., лицей 208, Киев), *Заславский Олег* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Ситкин Александр* (8 кл., школа 179, Москва), *Меньшов Сергей* (9 кл., лицей 20, Междуреченск), *Ефимов Андрей* (9 кл., ЦО 218, Москва), *Сандрикова Мария* (9 кл., ЦО 218, Москва), *Феклина Анастасия* (9 кл., школа 179, Москва), *Королев Андрей* (9 кл., школа 1345, Москва), *Кульчицкий Юрий* (9 кл., лицей 208, Киев), *Попов Сергей* (9 кл., ЦО 218, Москва).

Дипломами III степени награждены *Пучка Тарас* (6 кл., школа 179, Москва), *Шибанкова Екатерина* (6 кл., школа 179, Москва), *Шатский Владимир* (6 кл., гимназия 1514, Москва), *Волков Виктор* (6 кл., школа 622, Москва), *Гришутин Александр* (6 кл., школа 827, Москва), *Тукачинский Владислав* (6 кл., гимназия 1514, Москва), *Золотов Борис* (6 кл., школа 3, Гатчина), *Румянцев Влад* (6 кл., школа 179, Москва), *Семин Иван* (6 кл., школа 30, Санкт-Петербург), *Полевой Сергей* (7 кл., «Интеллектуал», Москва), *Некрасова Татьяна* (7 кл., школа 179, Москва), *Исхаков Тимур* (7 кл., ЦО 218, Москва), *Смирнова Ирина* (7 кл., лицей 17, Кострома), *Махлина Екатерина* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Ванчурина Антонина* (7 кл., школа 179, Москва), *Бакунов Никита* (8 кл., ФМЛ 27, Харьков), *Савостьянов Антон* (8 кл., лицей 14, Тамбов), *Уруев Андрей* (8 кл., лицей 34, Кострома), *Щербань Яков* (8 кл., школа 82, Черноголовка), *Котельникова Юлия* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Говорухин Ярослав* (8 кл., школа 179, Москва), *Добровольская Анна* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Погорелов Иван* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Попеску Андрей* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Сафронов Кирилл* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Сердюк Ярослава* (9 кл., лицей 208, Киев), *Преображенский Анатолий* (9 кл., ЦО 218, Москва).

Также многие ребята были награждены похвальными грамотами.

Отбором задач и составлением вариантов занималась методи-

Лига	*Диплом*	*Команда*	*Капитан*	*Руководитель*
Лига 9 кл.	I диплом	Сборная «Москва-Юг», Москва	Л.Синяков	Т.П.Зорина
Лига 9 кл.	II диплом	ЦО 218, Москва	А.Ефимов	А.Д.Блинков, Е.С.Горская
Лига 9 кл.	III диплом	Лицей 208, Киев	М.Чаудхари	Т.Д.Тимошкевич
Лига 8 кл.	I диплом	МММФ-8, Москва	О.Заславский	А.В.Спивак, Е.Б. Пронина
Лига 8 кл.	II диплом	«Эврика-8», Харьков	Е.Любчик	А.Л.Берштейн
Лига 8 кл.	II диплом	Гимназия 1543, Москва	М.Грачева	Т.В.Караваева, И.В.Раскина, М.А.Берштейн, А.В.Хачатурян
Лига 8 кл.	III диплом	Лицей 14, Тамбов	Т.Мукин	А.В.Бурмистрова
Лига 8 кл.	III диплом	Лицей 208, Киев	Н.Щеглов	Т.Д.Тимошкевич
Лига 7 кл.	I диплом	Школа 179, Москва	А.Ватузов	Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов
Лига 7 кл.	II диплом	Кружок «Фрактал», Санкт-Петербург	Е.Цейтина	А.П.Храпкина, А.П.Погода
Лига 7 кл.	II диплом	ЦО 218, Москва	А.Зерцалов	Ю.А.Блинков, О.А.Карпов
Лига 7 кл.	III диплом	Школа 179, Москва	Е.Гаврилец	Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов
Лига 7 кл.	III диплом	Гимназия 1514, Москва	И.Брауде-Золотарев	Л.О.Бычкова
Лига 6 кл.	I диплом	Гимназия 1514, Москва	В.Шатский	Л.О.Бычкова, Н.Т.Гребенник
Лига 6 кл.	II диплом	Школа 179, Москва	Т.Зайцева	Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов
Лига 6 кл.	II диплом	Гимназия 1514, Москва	А.Рыбина	Л.О.Бычкова, А.Горденко
Лига 6 кл.	III диплом	Кружок «Квантик» Москва	В.Волков	И.А.Николаева
Лига 6 кл.	III диплом	сборная лицея 30 (Санкт-Петербург) и кружка ДНТТМ (Москва)	И.Семин	А.В.Садовников, Т.П.Зорина
Лига 7-8 кл.	I диплом	Гимназия 1514, Москва	Т.Григорьев	Т.В.Житникова
Лига 7-8 кл.	II диплом	Школа 179, Москва	А.Райко	Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А. Кузнецов, Т.П. Зорина
Лига 7-8 кл.	II диплом	ДНТТМ, Москва	Г.Ионица	Т.П.Зорина, А.В.Спивак
Лига 7-8 кл.	III диплом	Школа «Интеллектуал», Москва	А.Иглина	А.И.Сгибнев
Лига 7-8 кл.	III диплом	Школа 179, Москва	С.Фельдшеров	М.В.Прасолов

ческая комиссия под общим руководством А.В.Шаповалова. Варианты лиги 9 классов составляли М.А.Берштейн, М.В.Прасолов, А.А.Заславский, 8 классов – А.В.Хачатурян, Н.Т.Гребеник, П.В.Мартынов, 7 классов – Д.В.Прокопенко, Ю.А.Блинков, А.И.Сгибнев, 6 классов – И.В.Раскина, А.П.Пагода, Н.Л.Чернятьев, варианты лиги 7–8 классов собирали Д.А.Калинин, Э.А.Акопян. Кроме них, в методкомиссии работали А.Д.Блинков, Е.С.Горская, Т.В.Караваева, Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, О.А.Карпов.

Книги и другие призы для победителей предоставили журнал «Квант», компании «Яндекс», «ABBYY» и Фонд математического образования и просвещения.

Конечно, такой турнир должен быть представлен не только участниками и победителями. Запоминаются яркие эмоции от побед (а порой и от неудач), но остаются в памяти яркие задачи. Приведем некоторые из задач турнира. У каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит, а если известно, то и автор.

Избранные задачи турнира

1 (6–8). Произведение двух последовательных натуральных чисел может оканчиваться на 1000. Например, $1000 \cdot 1001 = 1001000$ или $8999 \cdot 9000 = 8999 \cdot 9 \cdot 1000 = \ldots 1000$.

а) Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел оканчиваться на 1000?

б) Может ли произведение шести последовательных натуральных чисел оканчиваться на 1000?

Д.Шноль

2 (6–7). Нарисуйте 6-угольник и проведите прямую через две его вершины, которая разбивает его на два пятиугольника.

В.Гуровиц

3 (6–7). 2010 шариков раскрасили в 7 цветов радуги. На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?

Г.Гальперин

4. а) (6–8) В 10 кошельках лежали монеты. Достоинства любых двух монет из одного кошелька отличались не более чем на 1 берендейку. Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про монеты заранее ничего не знает. Он вынимает по одной монете из мешка, смотрит на нее и кладет в одну из 19 имеющихся коробок. Положив монету в коробку, потом ее уже нельзя переложить. Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке достоинства любых двух монет отличались не более чем на 1 берендейку.

б) (7–8) В 10 кошельках лежали монеты так, что веса любых двух монет из одного кошелька отличались не более чем на 1 г (массы монет могут быть нецелыми). Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про массы монет заранее ничего не знает. Он вынимает одну монету из мешка, взвешивает, затем кладет монету в одну из имеющихся 20 коробок, вынимает следующую монету и т.д. (Положив монету в коробку, потом ее уже нельзя переложить.) Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке массы любых двух монет отличались не более чем на 1 г.

в) Условие задачи такое же, как в п. б), но коробок 19.

А.Шаповалов

5 (6–7). У двух восьмизначных чисел произведения цифр положительны и равны. В каждом из чисел все цифры различны. Докажите, что у этих чисел равны и суммы цифр.

А.Шаповалов

6 (8–9). а) При каком наименьшем n найдется n-угольник, который можно разрезать на 13 равных частей?

А.Заславский