

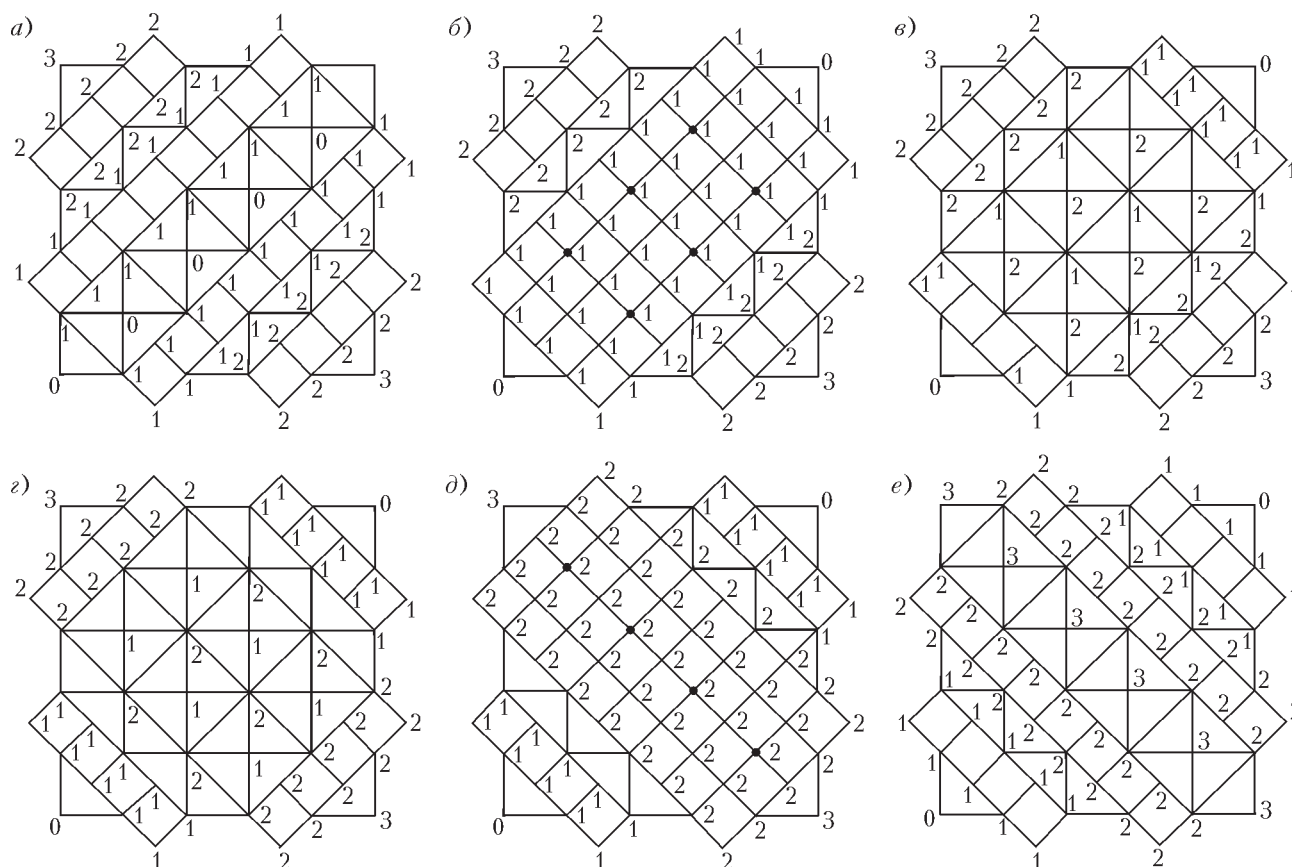


Рис.22. Заполнение коробки Янга по слоям

Доказательство. Обозначим эту сумму через S и запишем ее так:

$$S = 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \dots \\ \dots + (n-2) \cdot (n-(n-2)) + (n-1) \cdot (n-(n-1)).$$

Раскроем скобки:

$$S = 1 \cdot n - 1 + 2 \cdot n - 2 \cdot 2 + 3 \cdot n - 3 \cdot 3 + \dots$$

Соберем все положительные слагаемые вместе и вынесем n за скобку, все отрицательные слагаемые тоже соберем вместе:

$$S = n \cdot (1 + 2 + \dots + (n-1)) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2).$$

Воспользуемся известными соотношениями:

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = (n-1)n(2n-1)/6.$$

Получится как раз доказываемая формула. Лемма 2 доказана.

Напомним, что мы рассматриваем крепости Янга при нечетном N .

Теорема 2. Любое замощение крепости Янга может быть перестроено в любое другое замощение при помощи не более чем $(N+1)(2N^2-2N+3)/6$ флипов. Эта оценка точная.

Доказательство. Как и в случае коробки с кубиками из п. 1, всего лишь нужно проверить, что «полная

коробка» содержит $(N+1)(2N^2-2N+3)/6$ кирпичей. Напомним, что в нашей модели кирпич — это четырехугольная пирамида вершиной вверх, пирамида вершиной вниз или тетраэдр.

Выше мы подробно описывали процесс заполнения коробки (см. рис.22). В общем случае сначала в пустую коробку кладется один ряд из N тетраэдров. Далее они закрываются одним рядом из $(N-1)$ перевернутых пирамид. На образовавшуюся горизонтальную площадку ставят два ряда из $(N-2)$ обычных пирамид. Далее на них кладутся три ряда из $(N-2)$ тетраэдров (над каждым диагональным ребром, идущим слева снизу вправо вверх) и два ряда из $(N-3)$ тетраэдров (над каждым диагональным ребром, идущим слева сверху вправо вниз) и т.д.

Подсчитаем количество пирамид. Перевернутых пирамид будет $1 \cdot (N-1) + 3 \cdot (N-3) + \dots$. Обычных пирамид $2 \cdot (N-2) + 4 \cdot (N-4) + \dots$. При нечетном N это одинаковые суммы, они отличаются только порядком слагаемых. Обозначим количество пирамид каждого вида через P . Тогда

$$2P = 1 \cdot (N-1) + 3 \cdot (N-3) + \dots$$

$$\dots + 2 \cdot (N-2) + 4 \cdot (N-4) + \dots =$$

[переставляем слагаемые местами]

$$= 1 \cdot (N-1) + 2 \cdot (N-2) + 3 \cdot (N-3) + 4 \cdot (N-4) + \dots$$

По лемме 2 это число равно $(N-1)N(N+1)/6$.

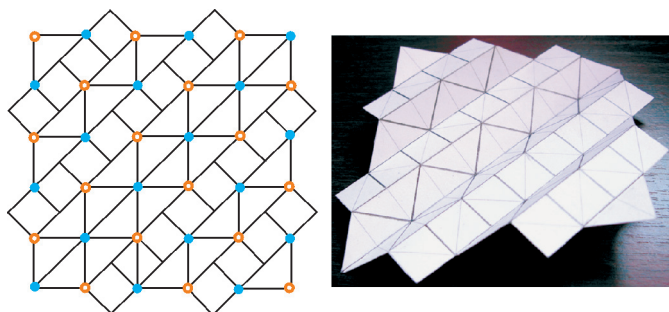


Рис.23. Пустая коробка. Диагональ, идущая с Ю-З на С-В, находится на высоте 0, два ряда из восьми квадратов находятся на высоте 1, два ряда из четырех квадратов находятся на высоте 2, вершины на С-З и Ю-В находятся на высоте 3

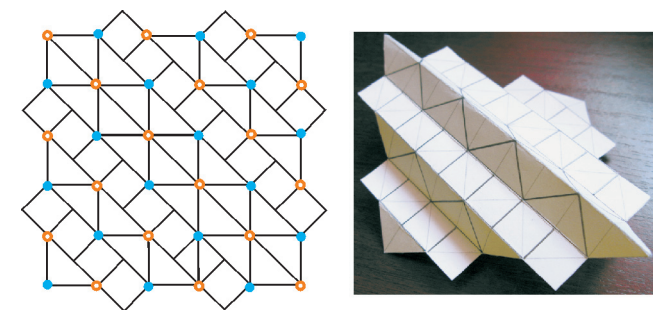


Рис.24. Заполненная коробка. Диагональ с С-З на Ю-В находится на высоте 3, и высота уменьшается до 0 в вершинах на Ю-З и С-В

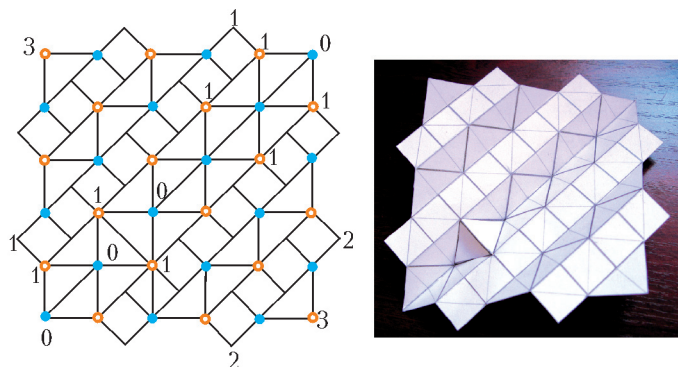


Рис.25. Здесь в центральную «канаву» вставлен тетраэдр, в результате ребро стало повернутым на 90° (флип первого типа)

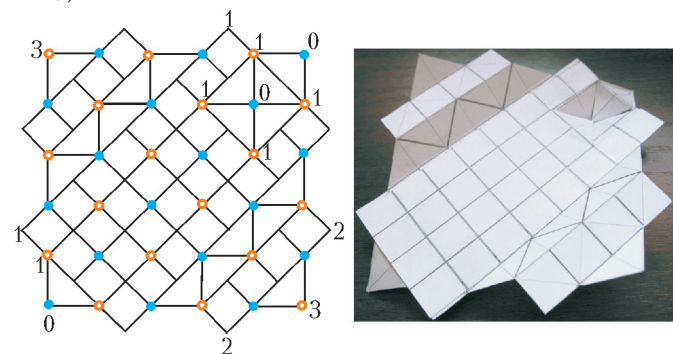


Рис.26. В левом нижнем углу точка находится на высоте 0, верхняя сторона прилегающего к ней треугольника — на высоте 1, прямоугольник 8×4 находится на высоте 1. В правом верхнем углу вынута пирамида, и вершина находится на высоте 0, а края пирамиды — на высоте 1 (флип второго типа)

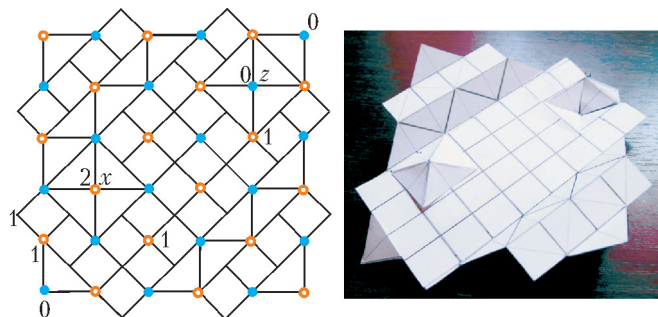


Рис.27. Одна пирамида выступает слева (ее вершина x на высоте 2), а одна вынута справа (ее вершина z на высоте 0). Большая площадка из квадратов находится на высоте 1

Теперь вычислим количество тетраэдров. Обозначим его через T . Как следует из описания заполнения коробки,

$$T = 1 \cdot N + (3 \cdot (N - 2) + 2 \cdot (N - 3)) + \\ + (5 \cdot (N - 4) + 4 \cdot (N - 5)) + \dots \\ \dots + ((N - 2) \cdot 3 + (N - 3) \cdot 2) + N \cdot 1.$$

В каждой скобке второе слагаемое запишем чуть иначе, увеличив его второй множитель на 2: вместо $2 \cdot (N - 3)$ напишем $2 \cdot (N - 1) - 4$, вместо $4 \cdot (N - 5)$ напишем $4 \cdot (N - 3) - 8$ и т.д. Кроме того, для единообразия к самому последнему слагаемому — оно имеет вид $N \cdot 1$ — добавим нулевое слагаемое, получится $N \cdot 1 + (N - 1) \cdot 0$; но при этом добавленное нулевое слагаемое модернизируем в стиле предыдущих преобразований — получится $N \cdot 1 + (N - 1) \cdot 2 - 2 \cdot (N - 1)$. В результате формула примет вид

$$T = 1 \cdot N + 2 \cdot (N - 1) + 3 \cdot (N - 2) + \dots \\ \dots + N \cdot 1 - (4 + 8 + 12 + \dots + 2 \cdot (N - 1)).$$

Положительные слагаемые в правой части по лемме дают сумму $N(N+1)(N+2)/6$, а отрицательные — учетверенную сумму последовательных натуральных чисел от 1 до $(N-1)/2$, которая равна $(N-1)(N+1)/8$. Итого: $T = (N+1)(N^2 - N + 3)/6$. А общее число кирпичей равно $2P + T = (N+1)(2N^2 - 2N + 3)/6$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. W.P. Thurston. *Conway's tiling group* // American Mathematical Monthly. 1990. V. 97. Pp. 757–773.
2. N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp. *Alternating sign matrices and domino tilings* // Journal of Algebraic Combinatorics. 1992. V. 2.
3. Bo-Yin Yang. *Three enumeration problems concerning Aztec diamonds* // Ph.D. thesis. Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, 1991.



О муарах, ОЖИВШИХ ИЛЛЮСТРАЦИЯХ И ПОЛЬЗЕ МОДЕЛЕЙ

З.ПЯТАКОВА, А.ПЯТАКОВ

В НАШЕ ВРЕМЯ ЭЛЕКТРОННЫЕ КНИГИ ВСЕ СИЛЬНЕЕ теснят своих бумажных собратьев, но те так просто сдавать позиции не намерены. Недавно появились книжки с картинками, «оживающими» в тот момент, когда читатель начинает перелистывать их страницы (рис.1). От старой доброй книги подобных



Рис. 1. Книжки с «оживающими» картинками

способностей, казалось бы, никак нельзя ожидать. Неудивительно, что за рубежом эти книги уже стали лидерами продаж. На полках наших книжных магазинов книжки такого типа пока еще не появились, но

читатель может легко найти их в Интернете по ключевому слову Scanimation.

В наши руки попал экземпляр такой книги, оживляющей героев сериала «Звездные войны», и мы не смогли удержаться, чтобы не посмотреть, что там внутри. С помощью лезвия бритвы мы разделили слои, из которых была склеена страница книги (рис.2,а). Оказалось, что под прозрачной пленкой с нанесенной на ней решеткой из вертикальных черных линий скрывается рисунок, в котором можно угадать первоначальный образ иллюстрации, но при пристальном разгля-

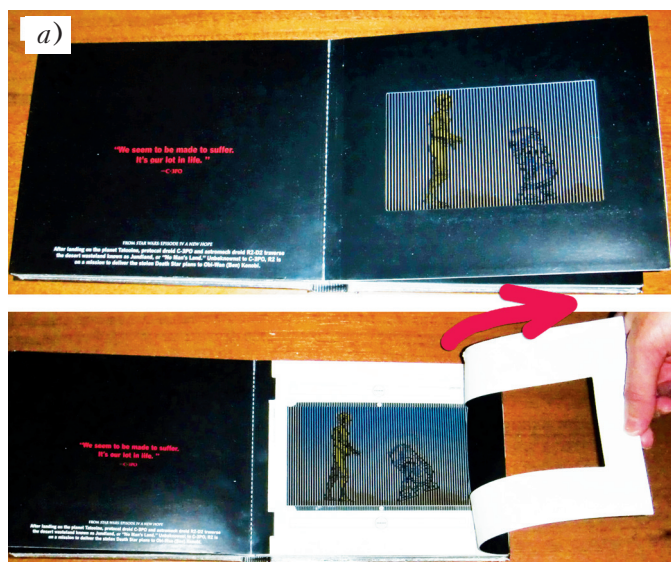
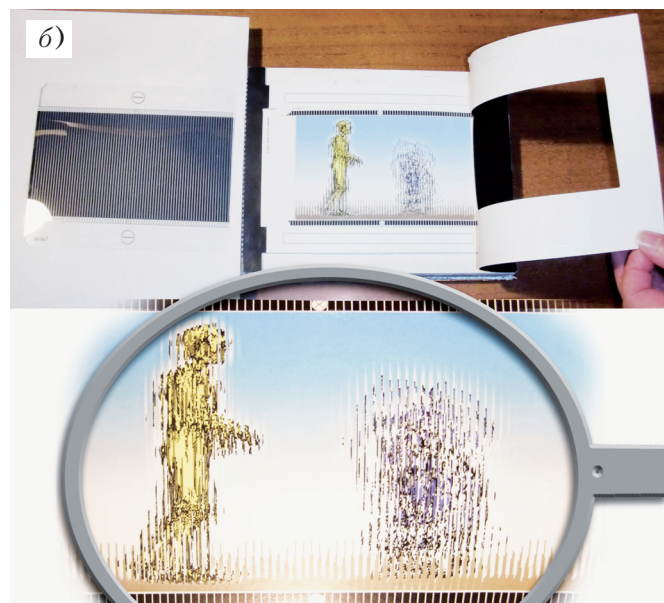


Рис. 2. Как же устроена «оживающая» картинка?





дывании становится заметно, что он состоит из серий вертикальных полос (рис.2,б; вставка). Эти серии полос соответствуют различным фазам движения объекта. Если снова наложить прозрачную пленку с вертикальной штриховкой на рисунок и начать двигать ее (рис.2,в), то картинка оживет, и фигуры начнут свое движение.

Вам ничего это не напоминает?

Отвлечемся от космических баталий и зайдем в тихую комнату, на окнах которой висят легкие тюлевые занавески. Посмотрите, что будет, если наложить шторы одна на другую, – возникнет переменчивая картина из светлых и темных областей. Такие картины называются *муарами* – от красивого французского слова *moiré*, означающего ткань с разводами, переливающуюся на свету различными оттенками. Муары возникают всегда, когда накладываются друг на друга периодические структуры, будь то нити полотна, решетки изгороди или зубья расчески (рис.3).

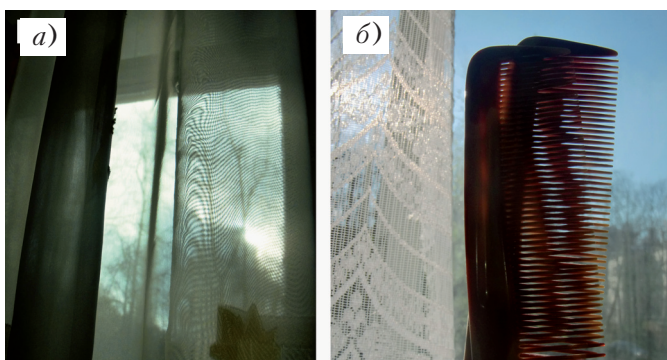


Рис.3. Возникновение муаров

Муары могут наблюдать и пользователи компьютера – при рассматривании в мелком масштабе полосатых рисунков откуда ни возьмись появляются кольца, причем при изменении масштаба рисунка размеры колец меняются. Для дизайнеров и фотографов муары превращаются в досадную помеху, с которой они стараются разными методами бороться.

Мы предлагаем читателю создать свои узоры и поэкспериментировать с ними, а чтобы это не было пустой забавой, заодно промоделировать с помощью муаровых узоров явления интерференции волн. Действительно, у муаров и электромагнитных волн есть одно общее свойство – периодичность. Так, в электромагнитной волне периодически меняются в пространстве и во времени электрическое и магнитное поля, а для муара характерна периодичность в пространстве. Если в некоторой области пространства встречаются две волны, то происходит наложение волн друг на друга, подобно тому, как накладываются друг на друга две гребенки (см. рис.3,б). И при определенных условиях возникает интерференционная картина с характерным чередованием максимумов и минимумов интенсивности. Таким образом, для объяснения интерференции можно пользоваться моделью муаров. Правда, здесь нужно сделать небольшую оговорку – обычно для света характерна гармоническая, т.е. синусоидальная зависимость напряженности поля от времени и коорди-

наты, в нашем же случае мы рисуем решетки с резкими краями и изменение происходит только в пространстве. Но в принципе нам ничто не мешает нарисовать и синусоидальное распределение интенсивности – картина муаров существенно не изменится, только станет менее резкой.

Ну, а теперь приступим к опытам. Распечатаем периодические системы штрихов (рис.4,а) или concentрических колец (рис.4,б) сначала на прозрачной

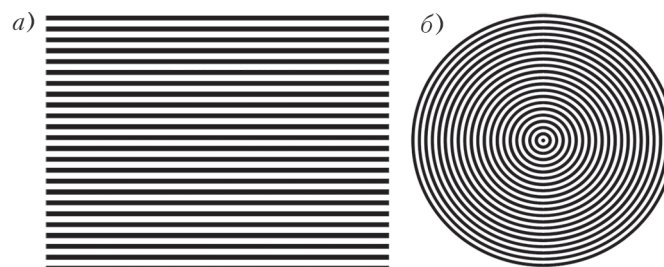


Рис.4. Периодические структуры штрихов и колец

пленке, а затем на бумаге. Наложим эти две распечатки – прозрачную и непрозрачную – друг на друга под различными углами, и мы увидим неоднородное распределение плотности штрихов (рис.5).

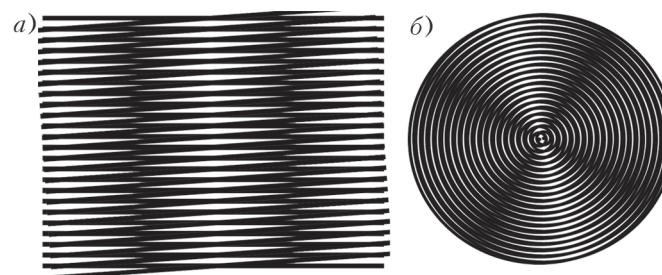


Рис.5. Муаровая модель интерференции плоских и сферических волн

Те же самые опыты можно проводить даже без печати картинок на пленке, а просто разглядывая их на экране компьютера в каком-либо графическом редакторе, позволяющем работать с отдельными объектами и прозрачностью. Поворачивая решетки друг относительно друга, можно наблюдать, как меняется картина.

Отметим, что случай параллельных линий моделирует интерференцию плоских волн, а системы concentрических окружностей – интерференцию сферических волн. На этих моделях легко увидеть, как зависит интерференционная картина от угла между плоскими волнами (см. рис.5,а) и от расстояния между точечными источниками (см. рис.5,б). Чем ближе друг к другу направления распространения волн или места расположения точечных источников, тем шире интерференционные полосы (рис.6). Этот факт хорошо известен, но, тем не менее, не очень хорошо укладывается в сознании человека, только начавшего изучать явление интерференции волн. Муаровая модель позволяет прочувствовать эти закономерности «на кончиках пальцев».

Заметим еще одно свойство муаров (см. рис.6): муаровые узоры намного крупнее, чем породившая их структура. Это обстоятельство с успехом используется

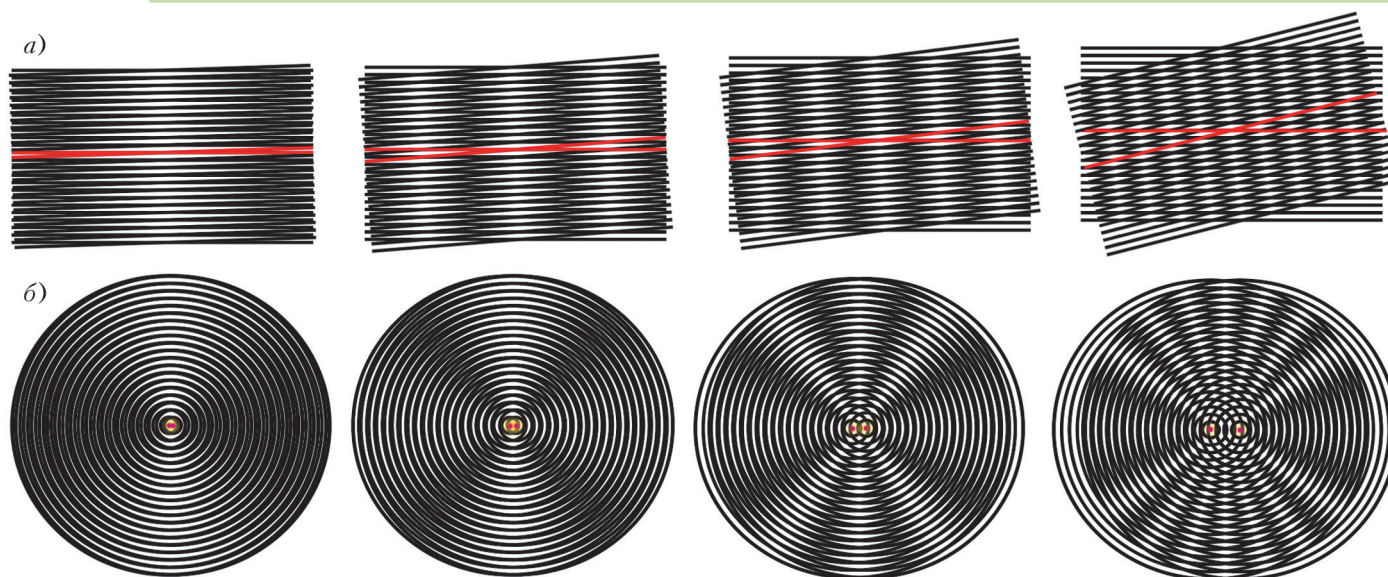


Рис.6. Взаимное расположение источников света и ширина интерференционных полос

в современной микроскопии сверхвысокого разрешения. Представим себе, что мы хотим изучить поверхность с таким мелким рельефом, что в обыкновенный оптический микроскоп увидеть ее уже нельзя. И тут на помощь приходит эффект муаров: если осветить объект излучением с периодическим распределением интенсивности в пространстве, т.е. так, чтобы световое пятно само образовывало решетку из темных и светлых полос, то эти две решетки (рельеф и подсветка) дадут крупную муаровую картину, которую легко увидеть в микроскоп. Правда, нужно еще уметь отделить само изображение от муаров. Однако, зная структуру подсветки, а также сняв кадр при однородном освещении, с помощью вычислений можно получить изображение поверхности с разрешением, вдвое превосходящем возможности микроскопа. Конечно, объем вычислений при обработке изображений будет значителен, но в наш цифровой век это никого не смущает.

А можно ли с помощью муаров делать количественные расчеты интерференционных картин? К сожалению, здесь все не так просто. Электромагнитная волна, в отличие от муаров, меняется и в пространстве и во времени, и разности хода двух волн в одной точке пространства нельзя однозначно поставить в соответствие какое-либо расстояние на картине муаров. В то же время для понимания качественных закономерностей интерференционных картин муары вполне помогают.

Наконец, муары позволяют разобраться в одном из самых сложных вопросов физической оптики: в понятии когерентности. Напомним, что волны называются когерентными, если разность фаз возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени. Попробуем сопоставить понятию когерентности наглядные образы с помощью все той же муаровой модели.

Нарисуйте на прозрачной пленке (или в графическом редакторе) несколько коротких элементов решеток со случайным расстоянием между ними (рис.7,а) или повернутыми на небольшой случайный угол друг относительно друга (рис.7,б). Здесь важно, чтобы рассто-

яние между системами решеток или угол, на который они повернуты, были именно случайными величинами, т.е. не подчинялись никакому заранее заданному закону. Если наложить такие решетки друг на друга, то уже не будет видно четкой интерференционной картины с определенным периодом, а получится некоторое среднее распределение освещенности (рис.7,в, г). В таком случае говорят, что волны являются некогерентными, причем определить на глаз причину некогерентности нельзя. Но в случае с рисунками 7,в и 7,г все же понятно, что причины, вызвавшие некогерентность, разные.

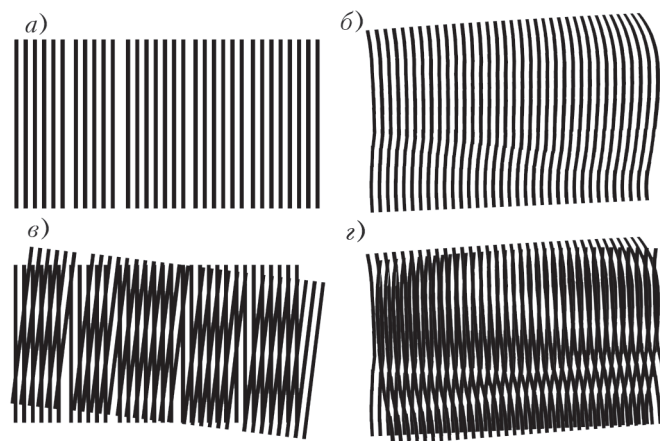


Рис.7. Иллюстрация нарушения когерентности на модели муаров

Обычно выделяют два вида когерентности – пространственную и временную. Пространственная когерентность означает, что разность хода волн, излученных *разными точками* протяженного источника *в один и тот же момент* времени, остается постоянной во времени. Временная когерентность означает, что разность хода волн, излученных *одной точкой* источника *в разные моменты* времени, остается постоянной во времени.

Иллюстрацией нарушения временной когерентности будет случайное распределение расстояний между системами решеток (см. рис.7,а), а иллюстрацией нарушения пространственной когерентности – случайное распределение углов наклона решеток (см. рис.7,б). При этом можно считать, что по горизонтальной оси на этих рисунках представлено время.

Как же количественно охарактеризовать когерентность? Для этого существуют понятия длины и времени когерентности. (В школьном курсе физики эти понятия не вводятся, более подробно с ними можно ознакомиться в учебниках для вузов, например – в «Курсе общей физики» И.В.Савельева.) Длина когерентности – это максимальная разность хода волн, излученных источником, при которой еще наблюдается устойчивая интерференционная картина. Время когерентности – это максимальная разность времен прихода волн в данную точку пространства, при которой еще наблюдается устойчивая интерференционная картина. Для света, распространяющегося в вакууме, длина когерентности l связана со временем когерентности τ следующим образом: $l = c\tau$, где c – скорость света.

Время когерентности для точечного источника можно определить как длительность одного импульса, или, как говорят, цуга излучения. За это время случайное изменение фазы колебаний достигает значения порядка π . Длина отдельного элемента периодической структуры на рисунке 7,а как раз и характеризует время когерентности. Если мы будем рассматривать частицу размером меньше этой длины, то увидим четкую картину, а если будем рассматривать в более крупном масштабе – уввы, видно будет только нечто среднее.

Для пространственной когерентности вводится радиус когерентности – характерный размер источника, при котором волны, излучаемые им, можно считать когерентными. Радиус когерентности определяется как $r = \lambda / \Phi$, где λ – длина волны излучения, Φ – диапазон углов, в котором наблюдатель может зарегистрировать излучение источника. В случае пространственной когерентности максимальный угол, на который повернуты решетки друг относительно друга на рисунке 7,б, и характеризует радиус когерентности.

Для каждого источника света ограничения пространственной и временной когерентности действуют одновременно, только могут проявляться в разной мере. Например, для источников малых размеров, излучающих разные длины волн (таких, как лампочка накаливания), сильнее проявляется ограничение временной когерентности, а для протяженных источников, излучающих в узком диапазоне длин волн, сильнее проявляется ограничение пространственной когерентности.

На пространственных масштабах меньше длины когерентности или на временных интервалах меньше времени когерентности интерференцию волн наблюдать можно, а если мы рассматриваем большую область пространства или большой интервал времени, то в среднем распределение энергии будет однородным. Именно такую картину мы и наблюдаем при наложении света, например, двух лампочек накаливания. Для лампочки время когерентности составляет около 10^{-8} с,

и наш глаз, конечно, не замечает быстрых мельканий интерференционной картины – ведь характерное время реакции глаза приблизительно 0,1 с. Получается, что за время реакции глаза интерференционная картина успевает измениться десятки миллионов раз! Большинство природных источников света имеют малое время когерентности, и поэтому мы не наблюдаем интерференции независимых источников.

Чтобы побороть временную некогерентность, «делают» два источника из одного. Например, в классическом опыте Юнга два небольших отверстия в экране освещались одной световой волной. В таком случае эти источники-отверстия уже будут связаны друг с другом по времени, т.е. будут когерентными. Для борьбы с пространственной некогерентностью необходимо уменьшить размер источника, т.е. выделить из него малую часть. В том же опыте Юнга, если отверстия расположить слишком далеко друг от друга или сделать их слишком крупными, вступит в действие ограничение пространственной когерентности, и интерференционная картина размажется.

Но существуют и такие источники света, которые без всяких дополнительных ухищрений могут давать интерференционную картину. Это – лазеры. Для лазера время когерентности оказывается порядка 10^3 с, а длина когерентности составляет приблизительно 10^{11} м – больше диаметра земной орбиты! Однако и в лазерах часто вступает в действие ограничение пространственной когерентности. Например, если внимательно посмотреть на пятно, даваемое обычной лазерной указкой (только не заглядывайте прямо в сам лазер, это опасно для глаз), там можно увидеть постоянно изменяющуюся структуру из множества точек. Эти точки действуют как независимые источники, и такой свет не обладает пространственной когерентностью, что связано с большим углом расходимости обычной лазерной указки.

О лазерах можно рассказывать долго, но о них можно прочитать в других статьях и книгах. Наша же статья подходит к завершению, и мы надеемся, что сравнение таких, казалось бы, далеких вещей – света и муаров – позволит вам лучше понять и то и другое.



Рис.8. Что же здесь изображено?

Напоследок попробуйте отгадать, что изображено на рисунке 8. Догадались? А сможете подобрать такую решетку, чтобы оживить эту картинку?