ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. Барон не ошибается.
Например, подойдут числа $a = 4$, $b = 9$, $c = 6$: ни a, ни b не делятся на c, но при этом $ab = c^2 = 36$, поэтому $ab \vdots c^2$.

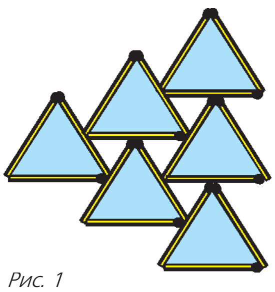

Рис. 1

Придумайте такую тройку чисел a, b, c, что ни a, ни b не делятся на c, но произведение ab делится на c^{100}.

2. На рисунке 1 сложены десять равносторонних треугольников – шесть синих и 4 белых.

3. 13 метров.
По теореме Пифагора получается, что за минуту один из ребят пробегает на $\sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40}$ метров больше, чем второй (рис.2). Поэтому за две минуты он пробежит на $2\sqrt{40}$ метров больше.

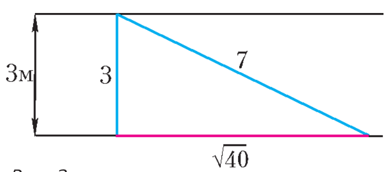

Рис. 2

Применив теорему Пифагора еще раз, найдем, что через две минуты расстояние между Васей и Петей будет равно $\sqrt{3^2 + (2\sqrt{40})^2} = \sqrt{169} = 13$ метрам.

4. 10000 рублей.
Пусть диван стоит x рублей, первый продавец завышает все числа в a раз, а второй занижает все в b раз. Попробуем теперь разобраться в том, что они говорят. Сначала первый продавец утверждает, что диван стоит 60000 рублей, т.е. $ax = 60000$. После чего второй заявляет, что первый «все числа завышает в 3 раза». Поскольку в условии сказано, что продавцы путают только числа, а все остальное говорят верно, то первый действительно все завышает, но не в 3, а в $3b$ раз. Значит, $a = 3b$. Наконец, первый продавец говорит про второго, что «он все числа занижает в 12 раз». В наших обозначениях это выражается равенством $b = \dfrac{12}{a}$. Получилась система из трех уравнений

$$\begin{cases} ax = 60000, \\ a = 3b, \\ b = \dfrac{12}{a}. \end{cases}$$

Подставляя выражение для b из третьего уравнения во второе, получим $a = \dfrac{36}{a}$, т.е. $a = 6$. Значит, $x = 10000$.

5. В точке C.
Заметим сначала, что проселочные дороги вносят один и тот же вклад в суммарное расстояние, поэтому важно только, сколько раз в нем будут учитываться участки шоссе.
Располагать остановку слева по шоссе от точки A невыгодно – сдвинув ее в точку A, мы, очевидно, уменьшим суммарное расстояние. Пусть остановка построена в точке O участка AB. Тогда слева от остановки у нас два села, а справа – семь. Это значит, что участок AO будет посчитан в суммарном расстоянии два раза, а участок OB – семь раз. Сдвинув остановку ближе к точке B, например, на 1 м, мы уменьшим суммарное расстояние на 5 м – ведь раньше этот метр учитывался семь раз, а теперь – два. Так можно уменьшать расстояние, пока мы не передвинем остановку в точку B. Теперь мы находимся на отрезке BC. Будем передвигать остановку в сторону точки C. Снова любой сдвиг остановки к точке C будет уменьшать суммарное расстояние: передвинув остановку, скажем, на 1 м, мы добавляем к суммарному расстоянию 4 м (за села слева от остановки) и вычитаем 5 м (за села справа от нее). Уменьшение будет происходить до тех пор, пока остановка не переместится в точку C. Рассуждая точно так же, видим, что при удалении от точки C вправо по шоссе суммарное расстояние будет все время увеличиваться. Значит, точка C – искомая.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Если поверхность сухая, то к лучам, соответствующим окраске поверхности, добавляется рассеянный свет от ее неровностей, поэтому цвет оказывается менее ярким. Когда поверхность пропитана водой, ее неровности затягиваются поверхностной пленкой воды и рассеянное излучение исчезает, поэтому основной тон окраски воспринимается как более насыщенный.
2. Цвет материала определяется отраженными лучами, а их состав зависит от состава излучения, падающего на материал.
3. При повороте белого луча фиолетовая и ближайшие к ней полоски могут исчезнуть с экрана из-за того, что углы падения соответствующих цветных лучей на внутреннюю поверхность призмы увеличатся настолько, что будет происходить их полное внутреннее отражение.
4. Нагреваемое тело начинает испускать лучи, соответствующие большей частоте, и максимум спектра смещается в сторону фиолетового цвета.
5. Изображение синей половины прямоугольника получается ближе к линзе, чем изображение красной, поскольку фокусное расстояние линзы больше для красных лучей, чем для синих.
6. В глазу, как и в любой линзе, красные лучи преломляются слабее, поэтому возникает зрительное впечатление, что красные предметы находятся ближе, чем синие или зеленые.
7. Призматический спектр растянут в коротковолновой части, а в дифракционном спектре одинаковым интервалам длин волн отвечают участки спектра одинаковой длины.
8. Надо погрузить порошок в жидкость с таким же показателем преломления, как и у стекла. Тогда порошок перестанет рассеивать свет равномерно во все стороны и будет вести себя как целое стекло.
9. Часть лучей, испускаемых поверхностью Солнца, поглощается окружающей его газовой оболочкой и земной атмосферой.
10. Во время затмения все лучи от фотосферы Солнца задерживаются Луной, а Земли достигают лучи только от атмосферы Солнца, поэтому линии поглощения становятся линиями испускания.
11. Черная, так как она поглощает все падающие на нее лучи.
12. Нет. Синяя краска поглощает все цвета, но отражает синий, голубой и зеленый, а желтая краска поглощает все цвета, но отражает зеленый, желтый и оранжевый. Поэтому обе краски в смеси отражают только зеленый цвет. При освещении же бумаги синим и желтым цветами оба они отражаются и вызывают ощущение белого цвета.
13. Синие стекла пропускают не только синие лучи, но частично и красные. Вместе с тем, листья растений отражают не только зеленый, но отчасти и красный свет.
14. Фотопленка реагирует на красный свет так же, как на

темноту, т.е. «не отличает» красного от черного. Поэтому красный череп на белом флаге получится черным (на позитиве), а череп на черном флаге на снимке виден не будет.

15. Когда свет в комнате, вначале яркий, постепенно ослабевает, механизм зрения переключается с «колбочкового», одинаково чувствительного к разным цветам, на «палочковый», наиболее чувствительный к зеленому свету, менее – к синему и еще менее – к красному.

16. Красный свет виден с наибольшего расстояния, так как меньше всего рассеивается в атмосфере.

17. Между далекими объектами и наблюдателем находится толстый слой воздуха, который из-за рассеяния солнечного света воспринимается глазом голубым.

Микроопыт

Слой воды над зеркалом образует призму, которая разлагает свет в радужный спектр.

ДВА ЭТЮДА О ДИНАМИКЕ

1. $a = \frac{g}{5} = 2$ м/с^2, $T_1 = \frac{4mg}{5} = 8$ Н, $T_2 = \frac{6mg}{5} = 12$ Н.

2. $a = \frac{3g}{5} = 6$ м/с^2, $T_A = T_B = \frac{8mg}{5} = 16$ Н, $T_{бл} = 2T_A = 32$ Н.

3. $a = \frac{mg}{2M+m} = 0{,}5$ м/с^2, $P = \frac{2Mmg}{2M+m} = 0{,}95$ Н.

4. $a = 6$ м/с^2, $T_1 = 16$ Н, $T_2 = 32$ Н, $m_3 = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} = 3{,}2$ кг.

5. $a = \frac{x}{l}g$.

6. На рисунке 3 показано, как изменяется рисунок 9 задачи при изменении угла β от $90°$ до значения $-\alpha$ (при этом угол β удобнее указывать относительно точки вращения). Этот рисунок дает ответы к случаям *а)–д)*. Случаи *е)* и *ж)*

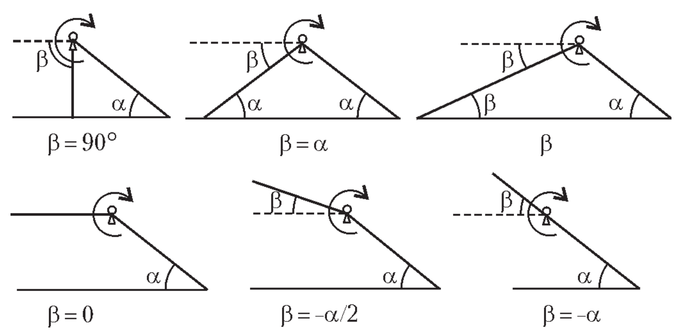

Рис. 3

разберите сами. А мы нарисуем, что происходит в последнем случае *з)*. Будем исходить из рисунка 9,*а* ($\beta = \alpha$). Увеличивая угол α до $90°$ (рис.4), мы придем к случаю блока, закрепленного на подставке. Это, конечно, несколько не то, что

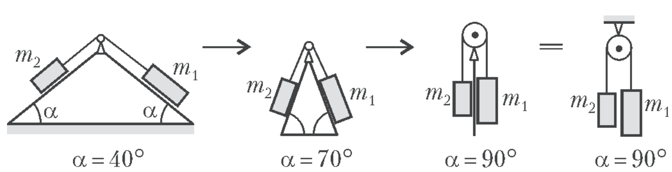

Рис. 4

показано на рисунке 9,*з*, но мы думаем, каждый согласится, что по смыслу задачи совершенно не важно, как закреплен блок: на подставке или подвешен к потолку.

Установив, какие значения углов α и β соответствуют каждой картинке, легко из общей формулы получить ответы к каждой задаче. Мы собрали их в таблицу:

	Углы	Ускорение	Натяжение нити
а)	$\beta = \alpha$	$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\alpha$	$T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2} g \sin\alpha$
б)	$\beta = 0$	$a = \frac{m_1 \sin\alpha}{m_1+m_2} g$	$T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} g\sin\alpha$
в)	$\beta = -\alpha/2$	$a = \frac{m_1\sin\alpha + m_2\sin(\alpha/2)}{m_1+m_2} g$	$T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} g\left(\sin\alpha - \sin(\alpha/2)\right)$
г)	$\beta = -\alpha$	$a = g\sin\alpha$	$T = 0$
д)	$\beta = 90°$	$a = \frac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1+m_2} g$	$T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} g(\sin\alpha + 1)$
е)	$\alpha = 90°$, $\beta = 0$	$a = \frac{m_1}{m_1+m_2} g$	$T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} g$
ж)	$\alpha = 0$, $\beta = 0$	$a = 0$	$T = 0$
з)	$\alpha = 90°$, $\beta = 90°$	$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} g$	$T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2} g$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Трое.

2. Предположим противное. Обозначим наши числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$; будем считать, что $a_{100+n} = a_n$. Тогда выполнены неравенства $a_n + a_{n+3} \le a_{n+1} + a_{n+2}$, или $a_{n+3} - a_{n+2} \le a_{n+1} - a_n$ при n = 1, 2, …, 100. Значит, $a_{100} - a_{99} \le a_{98} - a_{97} \le \ldots \le a_2 - a_1 \le a_{100} - a_{99}$, что означает, что все эти неравенства обращаются в равенства. Итак, $a_{2n} - a_{2n-1} = k$ при всех n = 1, 2, …, 50 и, аналогично, $a_{2n+1} - a_{2n} = l$ при n = 1, 2, …, 50. Просуммировав все 100 полученных равенств, получаем 0 = 50k + 50l, откуда $k = -l$. Но тогда $a_3 - a_2 = l = -k = -(a_2 - a_1) = a_1 - a_2$, т.е. $a_1 = a_3$. Это противоречит условию.

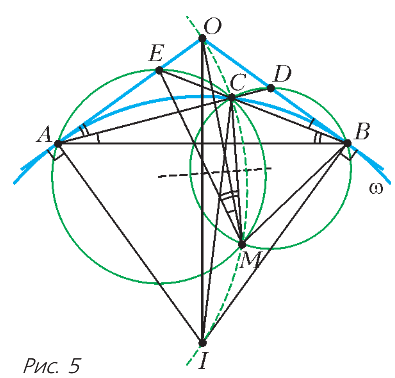

Рис. 5

3. Пусть M (рис.5) – вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ACE и BCD (она есть, так как в случае касания прямые AE и BD были бы параллельны). Нам достаточно показать, что описанная окружность треугольника OCI также проходит через точку M, так как в этом случае центры всех трех окружностей из условия будут лежать на серединном перпендикуляре к отрезку CM.

Обозначим $\angle CAB = \alpha$ и $\angle CBA = \beta$; без ограничения общности можно считать, что $\beta > \alpha$. По свойству угла между хордой и касательной, $\angle OBE = \alpha$, аналогично, $\angle DAE = \beta$. В четырехугольнике $OBIA$ углы A и B прямые, поэтому он вписанный; значит, $\angle OIA = \angle OBA = \alpha + \beta$. Следовательно,

$$\angle CIO = \angle CIA - \angle OIA = 2\angle CBA - (\alpha + \beta) = \beta - \alpha.$$

Для того чтобы доказать, что точка M лежит на описанной окружности треугольника OCI, нам достаточно доказать равенство $\angle CMO = \beta - \alpha$.

Поскольку четырехугольники $AECM$ и $DBMC$ вписаны, получаем

$$\angle BME = \angle BMC + \angle CME =$$
$$= (180° - \angle CDB) + \angle CAE = \angle ODA + \angle DAO = 180° - \angle EOB,$$

т.е. четырехугольник $EOBM$ также вписан, и $\angle OMA + \angle OBE = \alpha$. Следовательно,

$$\angle CMO = \angle CME + \angle OME = \angle CAE - \alpha = \beta - \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Точка M является *точкой Микеля* четырехсторонника, образованного прямыми AC, BC, AO и BO, т.е. точка M будет лежать на описанной окружности треугольника, образованного любыми тремя из этих четырех прямых. Таким образом, точка M будет лежать не только на описанных окружностях треугольников AEC, BCD, EOB, как мы показали, но и на описанной окружности треугольника AOD.

5. Предположим противное. Пусть для определенности $b > a$; тогда $20(b-a) \geq 1$, т.е. $b - a \geq \frac{1}{20}$.

Дискриминант второго трехчлена в исходном уравнении отрицателен, откуда $100b^2 - 10a < 0$. Значит, $10b^2 < a \leq b - \frac{1}{20}$, т.е. $10b^2 - b + \frac{1}{20} < 0$. Но это невозможно, поскольку дискриминант трехчлена $f(b) = 10b^2 - b + \frac{1}{20}$ также отрицателен, а старший член положителен.

6. 998.

Назовем гнома *красным* или *синим*, если на нем надет колпак соответствующего цвета. Заметим, что один гном может сказать требуемую фразу другому тогда и только тогда, когда эти гномы разноцветны: синий гном при этом скажет правду, а красный – солжет. Теперь, если какие-то три гнома не выворачивали колпаков, то два из них одного цвета и они не смогут сказать друг другу требуемого, что неверно. Значит, таких гномов не больше двух, и выворачиваний было не меньше 1000 – 2 = 998.

Будем говорить, что два гнома *пообщались*, если каждый из них сказал другому заветную фразу. Опишем, как могло случиться всего 998 выворачиваний, если, например, вначале гном Вася был синим, а остальные – красными. В начале дня каждый гном пообщался с Васей. Затем красные гномы по очереди выворачивали свои колпаки. При этом после каждого выворачивания все красные гномы пообщались с изменившим цвет. Когда останется только один красный гном, то любая пара гномов уже пообщается друг с другом (в тот момент, когда первый из них сменил цвет), при этом произойдет 998 изменений цвета.

Замечание. Построить пример с 998 изменениями цвета можно, начиная с любой ситуации, в которой не все гномы одноцветны.

7. Бесконечно.

Докажем, что неудачным является любое число вида $n = p^2$, где p – нечетное простое число. Предположим противное, т.е.

$$\left(y^2 - 1\right)p^2 = x^2 - 1 \qquad (*)$$

при некоторых натуральных $x, y \neq 1$. Тогда либо $x + 1$, либо $x - 1$ делится на p.

Пусть $x + 1 \vdots p$. Тогда $x - 1 = (x + 1) - 2$ не делится на p, и из $(*)$ получаем, что $x + 1 \vdots p^2$, т.е. $x = kp^2 - 1$ при некотором натуральном k. Подставляя в $(*)$, получаем

$$y^2 = \frac{x+1}{p^2}(x-1) + 1 = k\left(kp^2 - 2\right) + 1 = k^2p^2 - 2k + 1.$$

Но $k^2p^2 > k^2p^2 - 2k + 1 > k^2p^2 - 2kp + 1$, т.е. $(kp)^2 > y^2(kp-1)^2$, что невозможно.

Если же $x - 1 \vdots p$, то аналогично получаем $x = kp^2 + 1$, $y^2 = k^2p^2 + 2k + 1$, $(kp)^2 < y^2 < (kp+1)^2$, что опять же невозможно.

8. Пусть N – середина стороны AC, а K – точка на прямой MN такая, что $MK = MN$ (рис.6). Тогда треугольники MNC и MKB симметричны относительно M и потому равны. Проведем разрез по средней линии MN; переложив треугольник MNC так, чтобы он совпал с ΔMKB, получаем параллелограмм $ANKB$. Если $AN = AB$, то ромб уже получен.

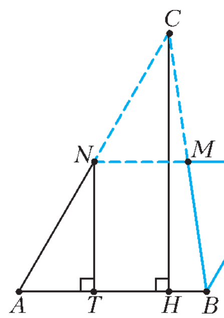

Рис. 6

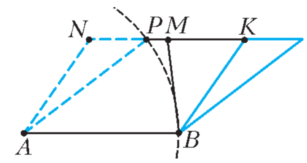

Рис. 7

Пусть $AN < AB$ (рис.7). Проведем окружность с центром в точке A и радиусом AB. Тогда точка N лежит внутри окружности, а M – вне, поэтому окружность пересечет отрезок NM в точке P. Отрезав от параллелограмма $ANKB$ треугольник APN и сдвинув его так, чтобы сторона AN совпала с BK, мы получим ромб.

Пусть, наконец, $AN > AB$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, основание H высоты CH лежит на отрезке AB (см. рис.6). Далее, основание T перпендикуляра, опущенного из N на AB, есть середина отрезка AH; значит, $BT > AT$, а тогда $BN > AN$. Значит, окружность с центром в точке B и радиусом, равным AN, пересечет сторону AN в точке S, ибо точка N лежит вне, а точка A – внутри этой окружности (рис.8). Отрезав от параллелограмма треугольник ABS и сдвинув его до совмещения стороны AB со стороной NK, мы получим ромб.

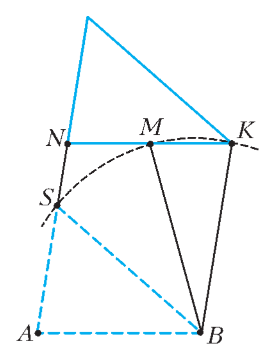

Рис. 8

Замечание. Можно доказать, что любой тупоугольный треугольник также можно разрезать требуемым образом. Действительно, если угол B тупой и $AB \geq BC$, то медиана AM точно длиннее стороны AB, и при этом $AN < AB$.

10 класс

1. Трое.

3. Пусть для определенности $AB > AC$ (рис.9). Обозначим через L середину отрезка AB. Заметим, что $\angle AOL = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$. Отсюда $\angle BAO = 90° - \angle AOL = 90° - \angle ACB = \angle CAD$.

Стороны треугольника OPQ соответственно перпендикулярны сторонам треугольника ABC, поэтому ΔOPQ подобен ΔABC: он получается

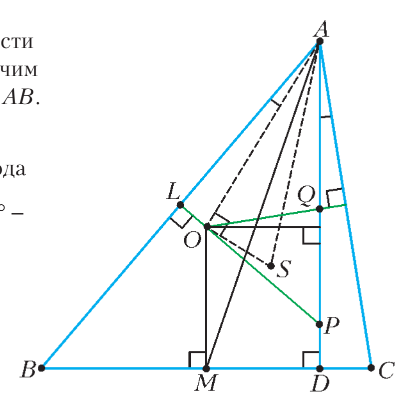

Рис. 9

из ΔABC последовательным выполнением поворота на $90°$ и гомотетии с некоторым коэффициентом k. Так как OS и AO – соответственные отрезки в треугольниках OPQ и ABC, то $OS \perp AO$ и $OS = kAO$. Далее, отрезок MD равен высоте треугольника OPQ, проведенной к стороне PQ, поэтому $MD = kAD$. Значит, прямоугольные треугольники AOS и ADM подобны, поэтому $\angle SAO = \angle MAD$.
Окончательно,

$$\angle BAS = \angle BAO + \angle SAO = \angle CAD + \angle MAD = \angle CAM.$$

8. Рассмотрим граф G, вершинами которого являются города и две вершины соединены ребром, если между городами есть авиалиния. Тогда нам известно, что граф связен, но при удалении всех ребер любого нечетного цикла это условие нарушается; доказать же нужно, что вершины графа можно правильно раскрасить в 4 цвета. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Пусть в графе нет циклов нечетной длины. Тогда его вершины можно правильно раскрасить двумя красками.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму для связного графа. *Расстоянием* между двумя вершинами X и Y назовем наименьшую длину пути, соединяющего эти вершины.

Зафиксируем некоторую вершину A и покрасим все вершины, находящиеся на нечетном расстоянии от A, в красный цвет, а остальные вершины – в синий цвет. Докажем, что указанная раскраска – искомая. Предположим противное: пусть имеется ребро, соединяющее, скажем, красные вершины B и C. Рассмотрим кратчайшие пути $A = B_0, B_1, \ldots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0, C_1, \ldots, C_{2m-1} = C$, ведущие из A в B и в C. Взяв наибольший индекс i такой, что $B_i = C_i$, получим цикл нечетной длины $B_i, B_{i+1}, \ldots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, \ldots, C_i = B_i$. Противоречие.

Пусть в графе есть цикл; удалим одно из ребер этого цикла. При этом, очевидно, граф останется связным. Продолжим этот процесс до тех пор, пока циклов в графе не останется. Обозначим через V множество всех удаленных ребер, а через W – множество всех оставшихся. Заметим, что оставшийся граф по-прежнему связен. Это значит, что не существует нечетного цикла, все ребра которого принадлежат V; в самом деле, если бы такой цикл существовал, то при удалении из G всех его ребер остались бы все ребра множества W и граф остался бы связным.

Теперь рассмотрим два графа G_V и G_W, вершинами которых являются вершины графа G, а множества ребер – это V и W соответственно. Тогда в графе G_W циклов нет (значит, его вершины можно правильно раскрасить в цвета 0 и 1), а в G_V по доказанному нет нечетных циклов (значит, его вершины можно правильно раскрасить в цвета 0 и 2). Присвоим теперь каждой вершине сумму ее цветов в этих раскрасках. Тогда, если две вершины соединены ребром в графе G, то они соединены ребром в одном из графов G_V или G_W; значит, как нетрудно видеть, их цвета различны, т.е. полученная раскраска (в цвета 0, 1, 2, 3) является правильной.

11 класс

1. Не существуют.

Рассмотрим произвольные ненулевые числа $a_1, \ldots, a_{10}$. Заметим, что числа a_k и $\frac{1}{a_k}$ имеют одинаковые знаки. Значит,

$$\left|a_k + \frac{1}{a_k}\right| = |a_k| + \frac{1}{|a_k|} > \max\left(|a_k|, \frac{1}{|a_k|}\right) \geq \left|a_k - \frac{1}{a_k}\right| \geq 0.$$

Перемножая эти неравенства, получаем, что

$$\left|a_1 + \frac{1}{a_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right| > \left|a_1 - \frac{1}{a_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right|,$$

т.е. требуемое равенство невозможно.

2. Пронумеруем строки числами 1, …, n сверху вниз, а столбцы – теми же числами слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров ее строки и столбца; при этом будем считать, что клетки диагонали из плюсов имеют координаты $(i,\ i)$ (i = 1, …, n).

Заметим, что если четыре клетки лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, то любая операция либо не меняет знаков в этих клетках, либо меняет знаки ровно в двух клетках из четырех. В частности, четность количества плюсов в этих четырех клетках не меняется; значит, если среди них вначале был ровно один плюс, то и потом плюсов будет не менее одного.

1	1		4	4
5	2	2		5
1	1	3	3	
	2	2	4	4
5		3	3	5

Рис. 10

Теперь выберем в нашей таблице n непересекающихся таких четверок; по сказанному выше, после любых операций в каждой из них найдется как минимум один плюс, следовательно, всего плюсов будет не менее n. При i = 1, 2, …, n − 2 выберем четверку клеток $\{(i,i),(i,i+1),(i+2,i),(i+2,i+1)\}$, а также выберем четверки $\{(n-1,n-1),(n-1,n),(1,n-1),(1,n)\}$ и $\{(n,n),(n,1),(2,n),(2,1)\}$. Легко видеть, что они удовлетворяют всем требованиям. На рисунке 10 отмечены такие четверки при n = 5.

4. $k = [n/2]$.

Лемма. *Для любых точек* $A_i = (x_i, y_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ *на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, найдется такой многочлен* $P(x,y)$ *степени не больше* $[n/2]$, *что* $P(x_n, y_n) = 1$ *и* $P(x_i, y_i) = 0$ *при* i = 1, …, n − 1.

Доказательство. Заметим, что существуют такие $d = [n/2]$ прямых, что точка A_n не лежит ни на одной из них, а каждая из точек $A_1, \ldots, A_{n-1}$ лежит хотя бы на одной (при нечетном n это прямые $A_1A_2, A_3A_4, \ldots, A_{n-4}A_{n-3}, A_{n-2}A_{n-1}$, а при четном n – прямые $A_1A_2, A_3A_4, \ldots, A_{n-3}A_{n-2}, A_{n-2}A_{n-1}$). Пусть $k_ix + l_iy + m_i = 0$ – уравнение i-й прямой (i = 1, …, d). Тогда многочлен

$$Q(x,y) = \frac{(k_1x + l_1y + m_1)\ldots(k_dx + l_dy + m_d)}{(k_1x_n + l_1y_n + m_1)\ldots(k_dx_n + l_dy_n + m_d)}$$

является искомым.

Покажем, что число $k = [n/2]$ подходит. При каждом i = = 1, …, n найдем согласно лемме многочлен $P_i(x,y)$, обращающийся в ноль во всех точках $A_1, \ldots, A_n$, кроме A_i, причем $P_i(x_i, y_i) = 1$. Тогда многочлен $P(x) = c_1P_1(x,y) + \ldots$ $\ldots + c_nP_n(x,y)$ принимает требуемые значения во всех точках $A_1, \ldots, A_n$.

Осталось показать, что при $k < [n/2]$ утверждение неверно. Рассмотрим точки $A_i(i, i^2)$ (i = 1, …, n), лежащие на параболе $y = x^2$, и положим $c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0, c_n = 1$. Поскольку парабола пересекается с прямой не более чем по двум точкам, точки A_i удовлетворяют условию. Предположим, что существует многочлен $P(x,y)$ степени, не превосходящей k, для которого $P(x_i, y_i) = c_i$. Положим $Q(x) = P(x, x^2)$; тогда степень $Q(x)$ не превосходит $2k$. По нашему предположению, $Q(1) = Q(2) = \ldots = Q(n-1) = 0$ и $Q(n) = 1$. Таким образом, ненулевой многочлен $Q(x)$ имеет n − 1 корень, т.е. его степень не меньше n − 1; тогда и $2k \geq n - 1$. Это и значит, что $k \geq [n/2]$.

8. Мы докажем утверждение задачи в более общем виде, для $n \geq 2$ предметов и 2^n детей, произвольно разбитых на 2^{n-1} пар соседей. Заметим, что существует ровно 2^n наборов из n

предметов; значит, каждый набор предметов интересен ровно одному ученику.

Индукция по n. При $n = 2$ легко проверить утверждение непосредственно. Пусть $n > 2$; рассмотрим любых двух соседей, выберем какой-нибудь предмет, интерес к которому у них различен (скажем, физику), и разобьем всех детей на две группы по 2^{n-1} детей: в группу A попадут те, кому физика интересна, а в группу B – все остальные.

Отселим группу A в другой интернат, с 2^{n-2} комнатами. При этом те пары, что были соседями раньше, оставим соседями. Остальных же (согласно выбору предмета, они есть; при этом их число, очевидно, четно) разобьем на пары соседей произвольно. Назовем такие пары «новыми».

По предположению индукции, теперь группу A можно расставить по кругу K с выполнением условий. Пусть $(x_1, x_2), \ldots, (x_{2k-1}, x_{2k})$ – все новые пары в порядке обхода этого круга по часовой стрелке (x_{2i-1} находится перед x_{2i}; мы будем считать, что $x_{2k+1} = x_1$). Обозначим через x_i' исходного соседа человека x_i (по построению, x_i' находится в группе B) и объявим пары $(x_2', x_3'), \ldots, (x_{2k-2}', x_{2k-1}'), (x_{2k}', x_1')$ «новыми» парами в группе B. Ясно, что новые пары, вместе со старыми, дают нам разбиение группы B на пары соседей.

Теперь, применив предположение индукции к группе B с этим разбиением, расставим ее по кругу с выполнением условий. Вставим теперь между любыми детьми новой пары (x_{2i}', x_{2i+1}') отрезок круга K от x_{2i} до x_{2i+1}. Нетрудно видеть, что теперь все дети стоят в кругу и расстановка удовлетворяет всем условиям.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLIV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Теоретический тур

9 класс

1. $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3. **2.** 1) $l = \frac{L}{2}$; 2) $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{v}$; 3) $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L}{v}$.

3. $m = \rho_0 V_0 \left(1 - \frac{\rho_0 - \rho_л}{\rho_л}\frac{c_0 \Delta t}{\lambda}\right)^{-1} \approx 1160$ г (здесь $\Delta t = 100$ °С).

4. 1) $t_3 \approx 109$ °С; 2) $t_3 = 380$ °С.

10 класс

1. 1) $\mu \ge \frac{Mm_2}{m_1(m_1 + m_2 + M)} = \frac{1}{2}$; 2) $\mu_{\min} = \frac{1}{2}$;

3) $t = \sqrt{\frac{2L/g}{\frac{M - \mu m_1}{m_1 + M} - \frac{\mu m_1}{m_2}}} \approx 0{,}9$ с (здесь $\mu = \frac{1}{4}$).

2. 1) $\alpha = 0{,}2$; 2) $k_{\min} = \frac{T_{\min 2}}{T_{\min 1}} \approx 9{,}2$.

3. 1) $t_0 = \frac{2v_0}{g \sin\alpha}$; 2) $\mu < \operatorname{tg}\alpha$;

3) $t = \frac{v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}\right)$; 4) $\mu = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$.

4. 1) $\mathscr{E}_1 \approx 16{,}4$ В, $U_{В1} \approx 6{,}4$ В, $I_{В1} \approx 0{,}36$ А;

2) $U_{н2} = U_{В2} \approx 9{,}2$ В, $I_{В2} \approx 1{,}42$ А.

5. 1) $U_C = \frac{2}{3}\mathscr{E}$, $U_{2C} = \frac{1}{3}\mathscr{E}$; 2) $Q = \frac{C\mathscr{E}^2}{2}$.

11 класс

2. Если $\mu < \frac{M}{m_1 + m_2 + M} = \mu_{\min}$, то $L = 0$; если $\mu_{\min} < \mu < \mu_0 = \frac{M}{m_2}\frac{2m_1 + m_2 + 2M}{m_1 + m_2 + M}$, то

$$L = \frac{g}{k}\frac{m_2}{m_1 + M}\left(\mu(m_1 + m_2 + M) - M\right);$$

если $\mu > \mu_0$, то $L \to \infty$. Если $\mu \le \mu_0$, то

$$t = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + M}{k}}\arccos\left(1 - \frac{kL}{Mg}\right).$$

3. 1) $P = \alpha\left(T_1 + T_2 - \left(T + \frac{T_1 T_2}{T}\right)\right)$; 2) $T_m = \sqrt{T_1 T_2} = 489{,}9$ К;

3) $P_{\max} = \alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 \approx 120$ кВт;

4) $\eta = \frac{T_1 - T_m}{T_m} \cdot 100\% = 38{,}7\%$.

МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2010 ГОДА

1. $s = \frac{mv}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi k}{qB}\right)\right)$. **2.** $v = 0$. **3.** $v = \sqrt{3gR}$.

4. $T_{\max} = \varepsilon^{1-\gamma}T$. **5.** $F = f\left(1 + \frac{Q}{q}\right) + \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$.

6. Напряженность равна нулю во всех точках между полуплоскостями и равна $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ снаружи.

7. $\varphi_x = \frac{C\varphi_1\varphi}{C\varphi - C_1\varphi_1}$. **8.** $f = \frac{1}{3}\mu_0 j^2 R^3$. **9.** $\frac{I_0}{9}$, $\frac{I_0}{9}$ и $\frac{4I_0}{9}$.

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59