Заключительный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады прошел с 25 по 30 апреля в городе Майкопе. За последние 15 лет столица Республики Адыгея уже в четвертый раз принимает главное мероприятие года для самых талантливых юных математиков со всей России. Олимпиады в Майкопе всегда прекрасно организованы, проходят в дружеской атмосфере совместной работы оргкомитета, жюри, руководителей команд и участников. Особо благодарим за многолетнюю работу в математическом образовании и организации олимпиад декана факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета Дауда Казбековича Мамий.

Изменения в порядке проведения олимпиады позволили в этом году участвовать в заключительном этапе практически всем сильнейшим олимпийцам страны. При этом каждый регион России имел право выставить хотя бы одного школьника. Выросло и общее количество участников олимпиады по сравнению с предыдущими годами – в ней приняли участие 90 девятиклассников, 64 десятиклассника и 98 одиннадцатиклассников. По традиции Всероссийская олимпиада принимала гостей – команды Болгарии и Китая.

На торжественной церемонии закрытия олимпиады присутствовал Президент Республики Адыгея А.К.Тхакушинов, вручивший награды лучшим участникам. Специальных призов удостоились Михаил Григорьев (Казань), Ярослав Сергиенко (Краснодар) и Василий Мокин (Саратов), показавшие лучшие результаты в параллелях 9, 10 и 11 класса.

По результатам Всероссийской олимпиады из числа кандидатов была сформирована национальная команда России на Международную математическую олимпиаду в составе: Василий Мокин (Саратов), Марсель Матдинов (Оренбург, СУНЦ МГУ), Станислав Ерохин (Санкт-Петербург), Виктор Омельяненко (Белгород), Федор Ивлев (Троицк, СУНЦ МГУ), Кирилл Савенков (Санкт-Петербург).

Опрос определил лучшие, по мнению школьников, задачи олимпиады. Он показал, что участникам в этом году больше понравились трудные задачи: в параллели 9 класса призовые места получили задачи 7, 8 и 4, в параллели 10 класса – 8, 7 и 3, в параллели 11 класса – первое место поделили задачи 7, 8, а в «призерах» оказались задачи 3 и 4.

Публикуем условия задач и список победителей и призеров Заключительного этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи заключительного этапа

9 класс

1. Имеется 24 карандаша четырех цветов – по 6 карандашей каждого цвета. Их раздали 6 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?

И.Богданов, О.Подлипский

2. По окружности расставлено 100 попарно различных чисел. Докажите, что можно выбрать 4 подряд стоящих числа таким образом, чтобы сумма двух крайних чисел этой четверки была строго больше суммы средних.

С.Берлов

3. Прямые, касающиеся окружности ω в точках A и B, пересекаются в точке O. Точка I – центр ω. На меньшей дуге AB окружности ω выбрана точка C, отличная от середины дуги. Прямые AC и OB пересекаются в точке D, а прямые BC и OA – в точке E. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ACE, BCD и OCI лежат на одной прямой.

А.Полянский

4. См. задачу М2194 «Задачника «Кванта».

5. Различные действительные числа a и b таковы, что уравнение

$$\left(x^2+20ax+10b\right)\left(x^2+20bx+10a\right)=0$$

не имеет корней. Докажите, что число $20(b-a)$ не является целым.

П.Козлов

6. У каждого из 1000 гномов есть колпак, синий снаружи и красный внутри (или наоборот). Если на гноме надет красный колпак, то он может только лгать, а если синий – только говорить правду. На протяжении одного дня каждый гном сказал каждому «На тебе красный колпак!» (при этом некоторые гномы в течение дня выворачивали свой колпак наизнанку). Найдите наименьшее возможное количество выворачиваний.

И.Богданов

7. Назовем натуральное число n *неудачным*, если его нельзя представить в виде $n=\dfrac{x^2-1}{y^2-1}$ при натуральных x, $y>1$. Конечно или бесконечно количество неудачных чисел?

В.Сендеров

8. В остроугольном треугольнике ABC медиана AM длиннее стороны AB. Докажите, что треугольник ABC можно разрезать на три части, из которых складывается ромб.

С.Волчёнков

10 класс

1. Имеется 40 карандашей четырех цветов – по 10 карандашей каждого цвета. Их раздали 10 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?

И.Богданов, О.Подлипский

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Через центр O окружности, описанной около неравнобедренного остроугольного треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC. Эти прямые пересекают высоту AD треугольника ABC в точках P и Q. Точка M – середина стороны BC, а S – центр окружности, описанной около треугольника OPQ, Докажите, что $\angle BAS = \angle CAM$.

Д.Прокопенко

4. См. задачу М 2193 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. См. задачу М2192 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу М2195 «Задачника «Кванта».

8. В стране некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом из любого города можно долететь в любой другой (возможно, с пересадками). Известно, что если выбрать любой замкнутый маршрут из нечетного числа рейсов и закрыть все эти рейсы, то уже не из любого города можно будет добраться в любой другой. Докажите, что все города можно распределить по 4 республикам так, чтобы любой рейс соединял города из разных республик. (Некоторые республики могут не содержать городов.)

В.Дольников

11 класс

1. Существуют ли такие ненулевые действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, что

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right) = \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right)?$$

Н.Агаханов, И.Богданов

2. В клетчатой таблице $n \times n$ ($n \geq 4$) поставлены n знаков «+» в клетках одной диагонали и знаки «−» во всех остальных клетках. Разрешается в некоторой строке или в некотором столбце поменять все знаки на противоположные. Докажите, что после любого количества таких операций в таблице останется не менее n плюсов.

Р.Карасев

3. См. задачу М2198, а) «Задачника «Кванта».

4. Дано натуральное число $n \geq 3$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение: для любых n точек $A_i = (x_i, y_i)$ на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и любых вещественных чисел c_i ($1 \leq i \leq n$) существует такой многочлен $P(x, y)$, степень которого не больше k, что $P(x_i, y_i) = c_i$ при всех i = 1, …, n.

Ф.Петров

5. См. задачу М2191 «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М2196 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу М2197 «Задачника «Кванта».

8. В школе-интернате преподается 9 предметов и учатся 512 детей, расселенных в 256 двухместных номерах (детей, живущих в одном номере, назовем *соседями*). Известно, что у любых двух детей наборы предметов, которые им интересны, различны (в частности, ровно одному ребенку не интересно ничего). Докажите, что всех детей можно построить по кругу так, чтобы любые два соседа стояли рядом, а для любых двух несоседей, стоящих рядом, одному из них интересны все предметы, интересные другому, и еще ровно один предмет.

Д.Фон-Дер-Флаасс

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Григорьев Михаил – Казань, лицей 131,
Кузин Михаил – Москва, школа 25,
Шабанов Лев – Ангарск, школа 10 с углубленным изучением отдельных предметов,
Гордеев Алексей – Пермь, школа 9 им. А.С. Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,
Игошина Виктория – Ижевск, ЭМЛ 29;

по 10 классам –

Сергиенко Ярослав – Краснодар, лицей НОУ ВПО Институт современных технологий и экономики,
Пахарев Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Егоров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Миронов Михаил – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Макаров Даниил – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Малясова Виктория – Ростов-на-Дону, экономический лицей 14,
Циглер Александр – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики,
Королев Николай – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при Казанском государственном университете;

по 11 классам –

Мокин Василий – Саратов, Лицей прикладных наук,
Матдинов Марсель – Москва, СУНЦ МГУ,
Омельяненко Виктор – Белгород, лицей 38,
Ерохин Станислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Балицкий Алексей – Железногорск, школа 11 с углубленным изучением отдельных предметов,
Ивлев Федор – Москва, СУНЦ МГУ,
Савенков Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Диплом призера

по 9 классам получили

Рухович Алексей – Москва, школа «Интеллектуал»,
Крачун Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Турбин Максим – Челябинск, лицей 31,
Ахмедов Максим – Москва, школа 25,
Понфиленко Анастасия – Москва, гимназия 1514,
Рябцева Мария – Ульяновск, гимназия 79,
Калмынин Александр – Иркутск, лицей-интернат 1,
Зайков Александр – Краснодар, гимназия 36,
Андреева Анна – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Крохмаль Николай – Белгород, лицей 38,
Лахтанов Иван – Москва, школа 25,
Закиров Артем – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,
Скутин Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,

Гальковский Егор – Санкт-Петербург, лицей 533,
Деев Родион – Саратов, ФТЛ 1,
Коновалов Андрей – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Южаков Александр – Курган, гимназия 31,
Новиков Владислав – Уфа, лицей 60,
Косинов Никита – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Кравцов Дмитрий – Белгород, лицей 38,
Целищев Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Жевнерчук Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Прудников Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Френклах Давид – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Кибкало Владислав – Саров, гимназия 2,
Симонов Кирилл – Пермь, школа 9 им. А.С. Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,
Салихов Аяз – Казань, лицей 131,
Измайлов Рамиль – Казань, лицей-интернат 7,
Бусыгин Игорь – Ижевск, ЭМЛ 29,
Осипов Павел – Томск, школа 54,
Иванов Даниил – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Кочнев Роман – Снежинск, гимназия 127,
Лагутина Ксения – Ярославль, гимназия 2;

по 10 классам –

Цыбышев Алексей – Самара, гимназия 1,
Гольцова Надежда – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики,
Ионов Андрей – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Мукосеева Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Бесман Дмитрий – Курган, школа 48,
Янушковский Владимир – Москва, лицей «Вторая школа»,
Шкляев Михаил – Королев, лицей научно-инженерного профиля,
Решетников Иван – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Бурова Ольга – Москва, лицей «Вторая школа»,
Гонин Роман – Московская обл., Раменское, гимназия,
Гаража Александра – Москва, школа «Интеллектуал»,
Осипов Матвей – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Балобанов Арсений – Москва, СУНЦ МГУ,
Заводов Алексей – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Чикин Владимир – Нижний Новгород, лицей 36,
Калашников Иван – Пермь, школа 146 с углубленным изучением математики, физики и информатики,
Киселев Евгений – Ярославль, школа 58 с углубленным изучением предметов естественно-математического цикла,
Юркин Виктор – Курган, Курганский областной лицей-интернат для одаренных детей,
Просанов Роман – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Хомутов Никита – Краснодар, лицей НОУ ВПО Институт современных технологий и экономики,
Титов Дмитрий – Усть-Лабинск, школа 2;

по 11 классам –

Бернштейн Антон – Новосибирск, гимназия 1,
Калиниченко Иван – Москва, лицей «Вторая школа»,
Томас Павел – Москва, СУНЦ МГУ,
Кушнир Андрей – Иркутск, лицей 2,
Куприянов Александр – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики,
Ястребов Игорь – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Климовицкий Иосиф – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бердников Александр – Новосибирск, гимназия 1,
Бондаренко Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Исаак Евгений – Курган, школа 38,
Устинов Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Тыщук Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бояров Игорь – Москва, СУНЦ МГУ,
Козачинский Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Беляков Сергей – Москва, СУНЦ МГУ,
Доледенок Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Ефимов Алексей – Уфа, школа 68,
Сапаркин Лев – Казань, лицей-интернат 2,
Ладан Екатерина – Набережные Челны, гимназия 26,
Пологова Анна – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
Ламтюгин Алексей – Ульяновск, школа 21,
Кондаков Иван – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики,
Горбань Степан – Москва, СУНЦ МГУ,
Лысенко Николай – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Смыкалов Владимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Малых Софья – Киров, КФМЛ,
Машников Олег – Курган, школа 42,
Холодняк Алексей – Майкоп, гимназия 5,
Кононов Яков – Улан-Удэ, Российская гимназия 59,
Харациди Олег – Набережные Челны, гимназия 26,
Попов Максим – Нижнекамск, лицей-интернат 24,
Воронов Сергей – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики,
Староверов Владислав – Москва, СУНЦ МГУ.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

ИНФОРМАЦИЯ

Вниманию наших читателей!

Подписка на журнал «Квант» на I полугодие 2011 года принимается во всех почтовых отделениях по ДОПОЛНЕНИЮ к подписному каталогу «Роспечать» (Дополнение вложено в этот каталог). Наш подписной индекс 70465.

Подписку также можно оформить по каталогу «Пресса России» по подписному индексу 88275.

Заключительный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

В этом году заключительный этап олимпиады по физике проходил в городе Белгороде на площадке Белгородского государственного технологического университета им. В.Г.Шухова. Участники олимпиады были приятно удивлены чистотой в городе, европейской ухоженностью университета.

Всего в олимпиаде приняли участие 239 школьников (из 260 прошедших по рейтингу), включая призеров и победителей олимпиады прошлого года.

Задачи для теоретического и экспериментального туров разрабатывались методической комиссией по физике при Центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников. Для проверки работ участников олимпиады было сформировано жюри из представителей Центральной методической комиссии по физике (МФТИ, МГУ, НГУ, МИРЭА, ЦАГИ, БГТУ) и студентов Московского физико-технического института – призеров международных физических олимпиад прошлых лет.

По результатам олимпиады почти 45% участников были награждены дипломами призеров и победителей. По параллелям картина выглядит следующим образом:

Класс	Число участников	Диплом победителя	Диплом призера	Всего
9	72	4	26	30
10	77	5	30	35
11	90	8	33	41
Всего	239	17	89	106

Из числа призеров олимпиады были сформированы сборные команды кандидатов на международные физические олимпиады (МФО) в 2010 и 2011 годах. Так, на последний летний сбор перед МФО этого года были приглашены 9 одиннадцатиклассников:

N	Фамилия	Имя	Отчество	Регион
1	Алексеев	Алексей	Алексеевич	Бийск, Алтайский край
2	Анаскин	Виктор	Алексеевич	Бийск, Алтайский край
3	Антоненко	Даниил	Сергеевич	Ростов-на-Дону
4	Горностаев	Дмитрий	Александрович	Республика Мордовия
5	Карелина	Любовь	Николаевна	Екатеринбург
6	Коновалов	Александр	Александрович	Долгопрудный, Московская область
7	Кононов	Яков	Александрович	Республика Бурятия
8	Стройнов	Евгений	Евгеньевич	Москва
9	Тарасов	Артем	Леонидович	Киров

Эти ребята уже были призерами Всероссийской олимпиады 2009 года, поработали на летних и зимних сборах. Пятеро из них поехали на МФО, а четверо – на Международную олимпиаду «Туймаада» в Якутию. Группа из 23 десятиклассников начинает подготовку к МФО 2011 года, которая пройдет в Таиланде. И, наконец, группа девяти- и десятиклассников (24 человека) летом приступила к подготовке к Международной естественно-научной олимпиаде юниоров, которая пройдет в декабре этого года в Нигерии.

Награждение победителей XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список победителей и призеров олимпиады.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Задача 1. Плотность нефти

В сильно загрязненном водоеме толщина слоя нефти на поверхности воды составляет $d = 1{,}0$ см. На поверхность водоема пустили плавать цилиндрический стакан массой $m = 4{,}0$ г с площадью дна $S = 25\ \text{см}^2$. Стакан был сначала пустым, а его дно находилось выше середины уровня нефти. Затем в стакан долили нефти так, чтобы ее уровни внутри стакана и снаружи сравнялись. В обоих случаях дно находилось на одном и том же расстоянии a от уровня воды (рис.1). Определите плотность нефти ρ_1, зная, что плотность воды $\rho_0 = 1{,}0\ \text{г/см}^3$.

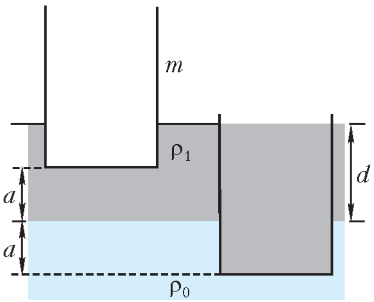


Рис. 1

И.Ерофеев

Задача 2. Маневры кораблей

Два корабля движутся с постоянными и одинаковыми по модулю скоростями $v_1 = v_2 = v$. В некоторый момент рас-

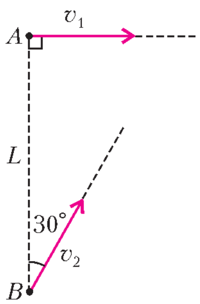


Рис. 2

стояние между ними оказалось равным L, а их взаимное расположение – таким, как показано на рисунке 2.

1) Определите минимальное расстояние l между кораблями при их последующем движении.

2) Найдите время τ, через которое корабли окажутся на минимальном расстоянии друг от друга.

3) В момент, когда корабль B пересекает линию движения корабля A, от борта корабля A отправляется катер, который должен доставить на корабль B пакет с важным сообщением. Определите, через какое минимальное время Δt после отправки катера пакет будет доставлен на борт корабля B, если скорость u катера также равна v.

С.Козел

Задача 3. Плавление льда

В большой плоской льдине, имеющей температуру 0 °С, сделали лунку объемом $V_0 = 1000\ \text{см}^3$ и прикрыли ее пенопластовой (теплоизолирующей) крышкой с небольшим отверстием (рис. 3). Какую максимальную массу m воды, имеющей температуру 100 °С, можно постепенно влить через отверстие в лунку? Известно, что удельная теплоемкость воды $c_0 = 4{,}19\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{С})$, плотность воды $\rho_0 = 1{,}00\cdot10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$, плотность льда $\rho_\text{л} = 0{,}90\cdot10^3\ \text{кг}/\text{м}^3$, а удельная теплота плавления льда $\lambda = 334\ \text{кДж}/\text{кг}$.

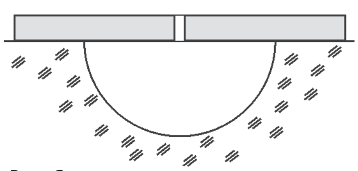


Рис. 3

Фольклор

Задача 4. Электроплитка

Электроплитка имеет две спирали (два нагревательных элемента), которые можно включать в сеть постоянного напряжения либо по отдельности, либо соединяя их последовательно или параллельно. Будем считать, что сопротивления спиралей не зависят от температуры. Оказалось, что если включить в сеть только первую спираль, то электроплитка нагревается до температуры $t_1 = 180$ °С, а если включить только вторую спираль, то плитка нагревается до температуры $t_2 = 220$ °С. До какой температуры t_3 нагреется плитка при:

1) последовательном включении спиралей;

2) параллельном включении спиралей?

Указание. Поток тепла от плитки во внешнюю среду пропорционален разности температур между плиткой и воздухом в комнате. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t_0 = 20$ °С.

С.Козел

Задача 5. Электрический мостик

См. задачу Ф2186 «Задачника «Кванта».

10 класс

Задача 1. Скольжение груза по доске

На длинном гладком горизонтальном столе лежит доска массой m_2 и длиной L, на левом конце которой находится груз массой m_1 (рис.4). Коэффициент трения между грузом и доской μ, трение между доской и столом отсутствует. Груз массой m_1 связан с грузом массой M длинной невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок без трения в оси. Система начинает двигаться из состояния покоя.

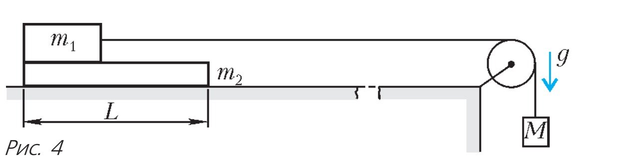


Рис. 4

1) При каких значениях коэффициента трения μ груз на доске и доска будут двигаться как единое целое (без проскальзывания)?

2) Найдите минимальное значение коэффициента трения μ_min, при котором возможно движение без проскальзывания.

3) Пусть $\mu = \mu_\text{min}/2$. В этом случае груз на доске и доска будут двигаться с разными ускорениями. Через какое время t после начала движения груз соскользнет с доски?

Считайте, что $m_1 = M = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $L = 1$ м. Известно, что длина груза много меньше L. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$.

С.Козел

Задача 2. Диссоциация

При нормальных условиях кислород состоит из двухатомных молекул O_2. При повышении температуры часть молекул может диссоциировать, в результате чего из каждой молекулы O_2 образуются два атома О. На рисунке 5 показаны два идентичных циклических процесса *1* и *2* в координатах (ρ, p), где ρ – плотность газа, p – давление. По осям отложены безразмерные величины p/p_0 и ρ/ρ_0, где p_0 и ρ_0 – некоторые масштабные коэффициенты. При проведении первого эксперимента рабочим веществом служил молекулярный кислород (низкие температуры). Второй эксперимент проводился при значительно более высоких температурах, так что часть кислорода находилась в молекулярном, а часть – в атомарном состоянии и степень диссоциации не изменялась в течение эксперимента. Масса газа в обоих экспериментах была одной и той же. Известно, что отношение максимальных температур в этих экспериментах равно $k_\text{max} = T_{\max 2}/T_{\max 1} = 5$.

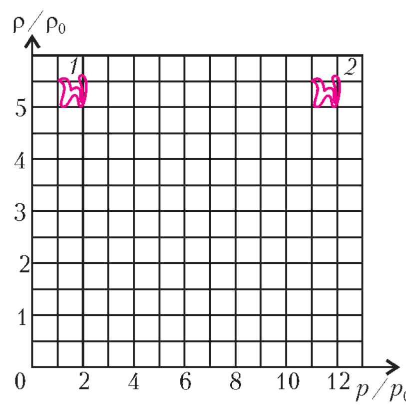


Рис. 5

1) Определите степень диссоциации α (долю диссоциированных молекул) молекул кислорода во втором эксперименте.

2) Определите отношение k_min минимальных температур в этих экспериментах.

А.Малеев

Задача 3. Шайба на наклонной плоскости

Небольшую шайбу толкнули вверх вдоль наклонной плоскости с углом наклона α с начальной скоростью v_0.

1) Через какое время t_0 шайба вернется в исходную точку при отсутствии трения?

2) При каких значениях коэффициента трения μ шайба возвратится назад?

3) Определите время t возврата шайбы в исходную точку при наличии трения.

4) При каком значении коэффициента трения μ время возврата t будет равно t_0?

В.Паверман

Задача 4. Варистор

В некоторых случаях для предохранения электроприборов от больших изменений входного напряжения применяются нелинейные полупроводниковые элементы – варисторы, включаемые параллельно прибору, роль которого на рисунке 6 играет нагрузочное сопротивление $R_н$. Здесь $R_н = 10$ Ом, $R = 10$ Ом – балластное сопротивление, В – варистор, вольт-амперная характеристика которого изображена на рисунке 7, I – показания амперметра А, $\mathscr{E}$ – входное напряжение. В номинальном режиме амперметр показывает силу тока $I = I_0 = 1{,}0$ А.

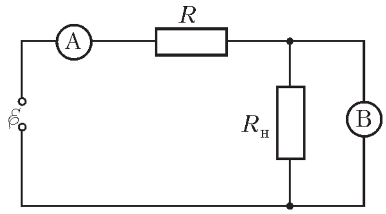


Рис. 6

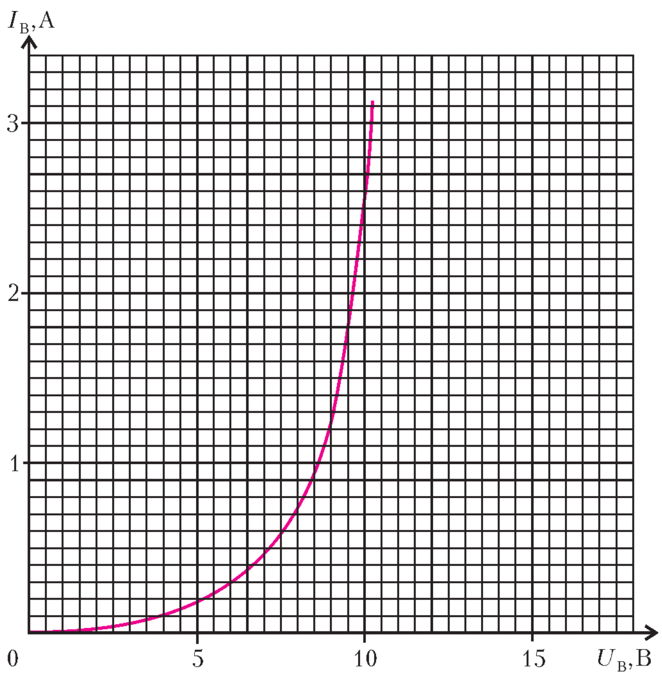


Рис. 7

1) Определите входное напряжение $\mathscr{E}_1$ в номинальном режиме, а также напряжение $U_{В1}$ на варисторе и силу тока $I_{В1}$, текущего через него.

2) Пусть входное напряжение возросло в 2 раза и стало равным $\mathscr{E}_2 = 2\mathscr{E}_1$. Определите, на сколько увеличилось напряжение на нагрузке и на сколько изменилась сила тока, протекающего через варистор.

Д.Сметнев

Задача 5. Цепь с двумя конденсаторами

1) В электрической цепи (рис.8), состоящей из идеального источника с ЭДС $\mathscr{E}$, двух конденсаторов с емкостями $2C$ и C и резистора с некоторым сопротивлением, замыкают ключ K_1. До каких напряжений зарядятся конденсаторы?

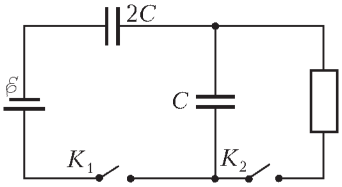


Рис. 8

2) После того как конденсаторы полностью зарядились, замыкают ключ K_2 и размыкают его тогда, когда сила тока через источник уменьшается в 2 раза по сравнению с силой тока через него сразу после замыкания ключа K_2. Найдите количество теплоты Q, выделившееся в цепи за время, прошедшее с момента замыкания ключа K_2 до момента его размыкания.

А.Шеронов

11 класс

Задача 1. Цепочка на сфере

См. задачу Ф2184 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Движение без проскальзывания

На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится длинная доска массой m_1, на правый край которой помещен брусок массой m_2 (рис.9). Брусок соединен со стенкой легкой нерастянутой пружиной жесткостью k. К доске прикреплен груз массой M с помощью легкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок. В начальный момент система покоится. Между доской и бруском существует сухое трение, коэффициент трения между доской и бруском μ. Какой путь L преодолеет брусок к тому моменту времени, когда между ним и доской начнется проскальзывание? Исследуйте, как зависит результат от μ. Найдите время t движения бруска, за которое он преодолеет расстояние L.

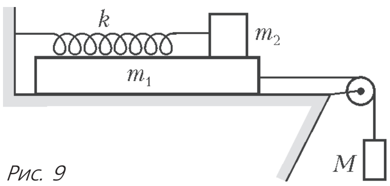


Рис. 9

Д.Александров

Задача 3. Тепловая машина

У тепловой машины, работающей по циклу Карно, температура нагревателя $T_1 = 800$ К, а температура T холодильника зависит от полезной мощности P машины. Холодильник представляет собой массивное теплоизолированное от окружающей среды тело, которое посредством теплопроводности передает холодному резервуару с температурой $T_2 = 300$ К всю тепловую энергию Q_2, полученную за время Δt работы машины (рис.10). Теплопроводность осуществляется по закону $Q_2 = \alpha(T - T_2)\Delta t$, где $\alpha = 1{,}0$ кВт/К.

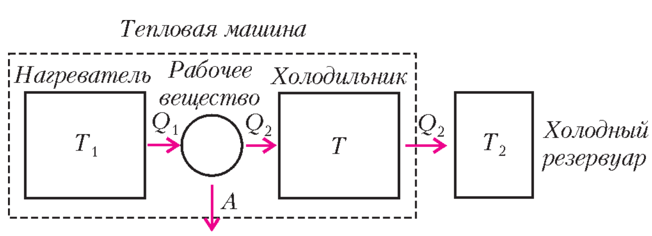


Рис. 10

1) Выразите мощность P тепловой машины через температуры T_1, T и T_2.

2) Вычислите температуру T_m холодильника, при которой мощность машины максимальна.

3) Определите эту максимальную мощность P_{max}.

4) Найдите КПД η тепловой машины при работе с максимальной мощностью.

С.Козел

Задача 4. Движение заряженных частиц

См. задачу 2188 «Задачника «Кванта».

Задача 5. Униполярный индуктор

См. задачу Ф2195 «Задачника «Кванта».

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Фещенко Илья – Москва,
Рухович Алексей – Москва,
Бушмин Иван – Московская область,
Гинзбург Лев – Хабаровский край;

по 10 классам –

Заночкин Андрей – Нижегородская область,
Сопенко Никита – Тамбовская область,
Паринов Данила – Москва,
Чурилов Антон – Тульская область,
Арзамасский Лев – Калининградская область;

по 11 классам –

Горностаев Дмитрий – Республика Мордовия,
Кононов Яков – Республика Бурятия,
Стройнов Евгений – Москва,
Тарасов Артем – Кировская область,
Алексеев Алексей – Алтайский край,
Карелина Любовь – Свердловская область,
Шустикова Анна – Пензенская область,
Анаскин Виктор – Алтайский край.

Диплом призера

по 9 классам получили

Гальковский Егор – Санкт-Петербург,
Ивашковский Иван – Москва,
Ширкин Михаил – Московская область,
Сафонова Оксана – Оренбургская область,
Слободсков Игорь – Московская область,
Козлов Даниил – Иркутская область,
Макаров Эдгар – Нижегородская область,
Васильева Александра – Москва,
Кибкало Владислав – Нижегородская область,
Логинов Николай – Нижегородская область,
Синяков Лев – Москва,
Лялин Феликс – Ханты-Мансийский автономный округ,
Широбоков Михаил – Архангельская область,
Косинов Никита – Ульяновская область,
Красник Павел – Алтайский край,
Оголь Артем – Тамбовская область,
Седов Александр – Ульяновская область,
Волчкова Анна – Ямало-Ненецкий автономный округ,
Сухов Николай – Москва,
Варламов Евгений – Республика Коми,
Красавина Татьяна – Вологодская область,
Дедович Сергей – Московская область,
Евсеев Олег – Москва,
Жегин Константин – Москва,
Силин Игорь – Пермский край,
Шишкин Николай – Новгородская область;

по 10 классам –

Головешкин Александр – Москва,
Ноян Алексей – Москва,
Шель Егор – Москва,
Шуранов Дмитрий – Республика Башкортостан,
Акиньщиков Алексей – Новгородская область,
Шкляев Михаил – Московская область,
Земляков Олег – Республика Чувашская,
Тимохин Иван – Москва,
Асташкин Роман – Московская область,
Ионов Андрей – Москва,
Янушковский Владимир – Москва,
Цыбров Федор – Республика Коми,
Декань Валентин – Тверская область,
Лучников Илья – Кировская область,
Прокофьев Вадим – Рязанская область,
Семенов Владимир – Вологодская область,
Безменова Александра – Москва,
Гонин Роман – Московская область,
Крайнов Павел – Костромская область,
Никитенков Павел – Смоленская область,
Циглер Александр – Челябинская область,
Базылик Сергей – Санкт-Петербург,
Бегун Александр – Приморский край,
Голенко Дмитрий – Московская область,
Храмцов Игорь – Ульяновская область,
Билинский Юрий – Республика Башкортостан,
Гамов Артемий – Нижегородская область,
Куликов Сергей – Пензенская область,
Макаров Даниил – Москва,
Ростов Антон – Нижегородская область;

по 11 классам –

Фролов Федор – Вологодская область,
Антоненко Даниил – Ростовская область,
Курочкин Никита – Республика Чувашская,
Попов Федор – Пермский край,
Комендантян Андрей – Самарская область,
Артамонов Дмитрий – Нижегородская область,
Коновалов Александр – Московская область,
Казеев Никита – Санкт-Петербург,
Ковалев Кирилл – Ярославская область,
Давыдов Иван – Санкт-Петербург,
Перевощиков Денис – Кировская область,
Лавров Петр – Пермский край,
Офенгейм Дмитрий – Санкт-Петербург,
Светогоров Александр – Калужская область,
Савадян Артем – Москва,
Гаврилюк Александр – Пермский край,
Бердников Александр – Новосибирская область,
Старичков Никита – Калужская область,
Шуравин Никита – Свердловская область,
Гусач Анастасия – Ростовская область,
Ким Александр – Республика Саха (Якутия),
Раков Артем – Москва,
Смирнов Николай – Новосибирская область,
Садков Виктор – Саратовская область,
Разумов Дмитрий – Нижегородская область,
Костин Петр – Белгородская область,
Кукушкин Павел – Московская область,
Ефимов Вячеслав – Красноярский край,
Николаев Егор – Республика Марий Эл,
Усов Роман – Москва,
Белянчиков Михаил – Кемеровская область,
Новиков Иван – Новосибирская область,
Сергеев Александр – Москва.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

XIV Международный турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» вновь собрал одаренных школьников и талантливых студентов на свой турнир «Компьютерная физика». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальной науке и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые.

Традиционно, турнир проводится в два тура – заочный и очный. Заочный тур XIV Турнира начался в октябре 2009 года рассылкой задания заочного тура «Планетная система» по заявкам в лицеи, школы и гимназии. (Задание было опубликовано в журнале «Квант» № 4 за 2009 год, что значительно увеличило число команд-участниц турнира.) Шесть лучших команд были приглашены на финал – очный тур соревнований.

Очный тур XIV Турнира был проведен с 31 января по 7 февраля 2010 года в городе Протвино на базе Института физики высоких энергий при участии и поддержке МГУ им. М.В.Ломоносова, фонда «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», журналов «Квант» и «Физика в школе» и Издательского дома «Первое сентября». Оргкомитет турнира выражает благодарность всем названным организациям за помощь в проведении турнира и поддержку одаренных школьников и талантливых студентов. Участники очного тура соревновались в решении задачи «Шайба на полусфере».

По итогам двух туров абсолютным победителем XIV Турнира стала команда лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ), получившая переходящий приз «Хрустальный глобус», диплом I степени и памятные знаки. Дипломы II степени в этом году получили ФМЛ 1580 при Москоском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана и Самарский международный аэрокосмический лицей, а диплом III степени – команда из Казахстана. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

В рамках турнира был проведен также конкурс компьютерного творчества, включающий три направления: «Виртуальная физическая лаборатория» (разработанная компанией «Физикон»), конкурс научных проектов и командная интеллектуальная компьютерная игра.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XV Турнире «Компьютерная физика» в январе-феврале 2011 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «Глюон»

Телефон (495)517-8014, факс: (495) 396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: www. gluon.ru

Ниже приводится задание заочного тура следующего турнира.

Задание заочного тура XV Турнира

«Комбинационное рассеяние»

Нелинейные оптические явления возникают в среде в результате возбуждения колебаний на частотах, не совпадающих с частотой падающего электромагнитного излучения. Первым было открыто явление комбинационного рассеяния в 1928 году советскими физиками Г.С.Ландсбергом и Л.И.Мандельштамом при исследовании рассеяния света в кристаллах и индийским физиком Ч.Раманом при исследовании рассеяния света в жидкостях. Это явление заключается в том, что при облучении среды светом с частотой ω в рассеянном свете возникает излучение на частоте $\Omega = \omega \pm \omega_0$, где ω_0 – собственная частота колебаний в среде. В случае среды типа разреженного газа собственная частота колебаний – это частота колебаний электронов в атомах или молекулах. Для разности частот говорят о стоксовом комбинационном рассеянии, а для суммы частот – об антистоксовом комбинационном рассеянии.

Спонтанное комбинационное рассеяние (СКР) наблюдается при взаимодействии излучения с атомами и молекулами, совершающими тепловые колебания. Создание мощных лазерных источников излучения привело к открытию в 1962 году эффекта вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР), которое возникает вследствие раскачки атомных колебаний воздействующим на среду сильным электромагнитным излучением. Соответственно, сигнал вынужденного рассеяния оказывается существенно сильнее сигнала спонтанного рассеяния.

Комбинационное рассеяние представляет собой современный метод изучения структуры и строения среды. Наиболее эффективным является метод когерентного антистоксового рассеяния света (КАРС). Идея этого метода заключается в принудительном возбуждении собственных колебаний среды под действием двух пучков световых волн (волн накачки) с частотами ω_1 и ω_2 такими, что их разность равна собственной частоте колебаний в среде: $\omega_1 - \omega_2 = \omega_0$. В этом случае происходит резонансное раскачивание колебаний атомов в молекулах. Исследуется сигнал комбинационного рассеяния, возникающий при прохождении через среду пробной волны с частотой ω_3. Обычно в качестве пробной волны используется одна из волн накачки, например с частотой ω_1. Излучение в этом случае можно наблюдать на частоте

$\omega = \omega_3 + (\omega_1 - \omega_2) = 2\omega_1 - \omega_2$. Спектр КАРС может быть получен плавной перестройкой одной из частот накачки, как правило ω_2.

Для описания процессов комбинационного рассеяния света предлагается классическая модель нелинейной среды, состоящей из ансамбля атомов – ангармонических осцилляторов. В рамках этой модели потенциал атомного электрона равен

$$U = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \alpha|x|\frac{x^2}{3},$$

где ω_0 – собственная частота колебаний среды, а второй член дает малую нелинейную поправку к гармоническому потенциалу. При моделировании колебаний электрона необходимо учесть силу, действующую на электрон со стороны внешнего электромагнитного поля, а также силу трения, описывающую процесс релаксации в среде и приводящую к затуханию колебаний в отсутствие внешнего воздействия. Эту силу можно записать в виде $F_{тр} = -\gamma m v_т$, где m и $v_т$ – масса и средняя скорость теплового движения электрона. В отсутствие внешнего воздействия атомный электрон совершает тепловые колебания на частоте ω_0. Амплитуда этих колебаний определяется температурой среды. Для описания таких колебаний в модель необходимо ввести дополнительную вынуждающую силу $f_0 \cos\omega_0 t$, амплитуда которой в конечном счете определяется температурой среды. Фактически в нашей модели предполагается, что амплитуда тепловых колебаний определяется балансом работ вынуждающей силы и силы трения за период колебаний: $f_0 = \gamma m v_т$. Средняя скорость теплового движения равна

$$v_т = \sqrt{\frac{\pi h\omega_0}{m\left(e^{\frac{h\omega_0}{2\pi kT}} - 1\right)}},$$

где $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/моль – постоянная Больцмана.

При прохождении через среду электромагнитной волны с интенсивностью I_0 уравнение движения электрона имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma m\frac{dx}{dt} + m\omega_0 x \pm \alpha x^2 = f_0\cos\omega_0 t + eE_0\cos\omega_1 t,$$

где $E_0 = \sqrt{2I_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$, μ_0 – магнитная постоянная, ε_0 – электрическая постоянная. В уравнении член αx^2 имеет знак «+» при $x \ge 0$ и знак «–» при $x < 0$. Под действием падающего излучения электрон совершает вынужденные колебания и переизлучает поглощенную от поля энергию на частоте вынужденных колебаний. В нелинейной среде вынужденные колебания возбуждаются не только на частоте вынуждающей силы, но также и на наборе частот, определяемых нелинейными свойствами среды. Спектральное значение энергии (энергии, приходящейся на единичный диапазон частот) рассеянного света на частоте ω связано со спектральным значением амплитуды колебаний x_ω (см. математическое приложение 2) на данной частоте соотношением

$$P_\omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\omega^4 x_\omega^2,$$

где c – скорость света в вакууме, e – заряд электрона.

Задание

1. Исследуйте зависимость спектрального значения энергии рассеянного излучения в спектроскопии КР от частоты и интенсивности падающего электромагнитного излучения $P_\omega(\omega, I_0)$ в диапазоне $\omega = 2\cdot10^{15} - 10^{16}$ с$^{-1}$, предположив, что у вас есть мощный источник лазерного излучения с интенсивностью $I_0 = 10^{12} - 10^{18}$ Вт/м^2. Повторите открытие вынужденного комбинационного рассеяния, определив значение I_0 (порог), при котором возникает ВКР при комнатной температуре 300 К.

2. Исследуйте зависимость спектрального значения энергии рассеянного излучения $P_\omega(T, I_0)$ в спектроскопии КР от температуры среды, изменяющейся от 30 до 3000 К при $\omega = 3\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ и $I_0 = 10^{12} - 10^{18}$ Вт/м^2.

3. Определите зависимость спектрального значения энергии рассеянного излучения $P_\omega(I_{01}, I_{02})$ в КАРС спектроскопии от равных интенсивностей волн накачки в диапазоне $I_{01,02} = 10^{12} - 10^{18}$ Вт/м^2 при комнатной температуре 300 К, если их частоты равны $\omega_1 = 3{,}5\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 2{,}5\cdot10^{15}$ с$^{-1}$. Сравните КАРС с СКР и ВКР.

Для моделирования предлагаются значения $\gamma = 10^{12}$ с$^{-1}$, $\alpha = 3\cdot10^{11}$ кг/(м·с^2), $\omega_0 = 10^{15}$ с$^{-1}$.

Математические приложения

1. Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка – это сложная процедура, поэтому одно уравнение второго порядка сведем к двум уравнениям первого порядка:

$$mv' + \gamma mv + m\omega_0 x \pm \alpha x^2 = f_0\cos\omega_0 t + eE_0\cos\omega_1 t, \quad x' = v.$$

Здесь v – скорость электрона, x – координата частицы, член αx^2 имеет знак «+» при $x \ge 0$ и знак «–» при $x < 0$. Конечно-разностная схема для численного решения этой системы уравнений проще, чем для исходного уравнения. Для примера, конечно-разностная производная от скорости по времени вычисляется как $v' = (v - v_0)/\Delta t$, где v_0 – скорость частицы в некоторый момент времени t_0, v – скорость частицы через малый интервал времени Δt. Для координаты x конечно-разностная производная строится аналогично.

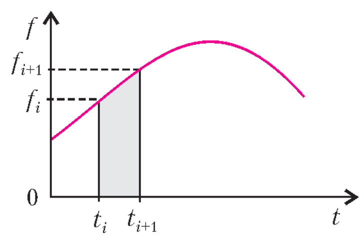
2. Произвольное движение электрона (даже непериодическое), происходящее по закону $x(t)$, можно представить в виде суперпозиции гармонических колебаний на различных частотах ω с различными спектральными амплитудами x_ω. На данной частоте ω квадрат спектральной амплитуды x_ω^2, определяющий спектральное значение энергии излучения, можно вычислить как сумму квадратов спектральных амплитуд:

$$x_\omega^2 = \left(x_\omega^k\right)^2 + \left(x_\omega^s\right)^2,$$

причем

$$x_\omega^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int x(t)\cos\omega t\,dt, \quad x_\omega^s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int x(t)\sin\omega t\,dt.$$

Численное интегрирование целесообразно производить методом трапеций. Интервал интегрирования по времени, в нашей задаче равный периоду возбуждающей волны $T_1 = 2\pi/\omega_1$, разбивается на элементарные интервалы Δt. Выберем некоторое значение времени t_i, находящееся внутри интервала интегрирования. Значение подынтегральной функции в этот момент времени равно (для первого интеграла) $f_i = x(t_i)\cos\omega t_i$. Для момента времени $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ значение функции равно $f_{i+1} = x(t_{i+1})\cos\omega t_{i+}$. Будем считать, что в пределах интервала Δt функция изменяется линейно. Тогда площадь выделенной элементарной трапеции (см. рисунок)



равна $\Delta t (f_i + f_{i+1})/2$. Значением интеграла будет площадь всей фигуры под графиком подынтегральной функции на интервале интегрирования. Эта площадь является суммой площадей всех элементарных трапеций. Для второго интеграла вычисления аналогичны.

Литература

1. А.И.Фишман. *Спектроскопия когерентного антистоксова рассеяния света* (Соросовский Образовательный Журнал, т. 7, № 4, 2001)

2. В.С.Горелик. *Комбинационное рассеяние света* (Соросовский Образовательный Журнал, т. 3, № 6, 1997)

3. Н.Н.Калиткин. *Численные методы*

4. Л.В.Турчак. *Численные методы*

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Кравцов

Московская студенческая олимпиада по физике 2010 года

22 мая в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел городской (II) тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов.

По результатам соревнований первые пять команд приглашены для участия в заключительном (III) туре олимпиады. Это команда МГТУ им. Н.Э.Баумана, набравшая 189 баллов, команда Национального исследовательского института «МИСИС» (127 баллов), команда Российского государственного университета нефти и газа им. И.М.Губкина (92 балла), команда Московского энергетического института (66 баллов) и команда Московского государственного университета путей сообщения (57 баллов).

Победители в личном зачете (все из МГТУ им. Н.Э.Баумана): Р.Логин – первое место, А.Панфилов – второе место, К.Шириазданов – третье место.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Заряд q массой m движется в вязкой среде с коэффициентом сопротивления k в поперечном однородном магнитном поле B с начальной скоростью v. Определите путь, который пройдет заряд, когда вектор его скорости повернется на $360°$.

2. Сплошной кубик с ребром c и массой m скользит одной гранью по горизонтальной поверхности с коэффициентом трения, равным 1. В начальный момент скорость кубика равна v_0, и он наезжает на узкую поперечную полоску шириной $a \ll c$ с коэффициентом трения, равным $5/3$. С какой скоростью будет двигаться кубик после преодоления полоски, если известно, что он не перевернулся?

3. Три цилиндра радиусом R лежат друг на друге на гладкой горизонтальной поверхности. Их оси параллельны поверхности и друг другу. Массы нижнего и верхнего цилиндра равны m, а массой среднего можно пренебречь. В начальный момент времени система потеряла устойчивость и стала двигаться так, что средний цилиндр начал выдавливаться вбок. Определите скорость верхнего цилиндра в момент соприкосновения с нижним, если проскальзывание между цилиндрами отсутствует.

4. Определите максимальную температуру, до которой можно нагреть тело, если в распоряжении имеется тепловой резервуар бесконечной теплоемкости с температурой T и идеальная тепловая машина с максимальной степенью сжатия, т.е. отношением максимального объема идеального газа в тепловой машине к минимальному, равной ε. Коэффициент адиабаты газа γ.

5. Металлическая сфера радиусом R разделена по диаметральной плоскости, и половинки изолированы друг от друга. Одна полусфера заряжена зарядом q, при этом сила взаимодействия между половинками равна f. Определите, какой будет сила взаимодействия, если вторую полусферу зарядить зарядом Q.

6. Определите напряженность электрического поля во всех точках плоскости, проходящей через границы двух параллельных полуплоскостей, направленных в разные стороны, если расстояние между полуплоскостями равно a и они равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда σ. Угол между плоскостью и полуплоскостями равен α.

7. Если металлическое тело емкостью C зарядить до потенциала φ, а затем поднести его к другому металлическому телу, емкость которого равна C_1, и коснуться его, то потенциал второго тела после удаления первого станет φ_1. Определите, до какого потенциала можно зарядить второе тело многократным повторением этой операции.

8. Определите силу взаимодействия на единицу длины между двумя частями цилиндрического проводника радиусом R с током, равномерно распределенным по его поперечному сечению с плотностью j, полученными в результате рассечения цилиндрического проводника плоскостью, проходящей через ось цилиндра.

9. Интенсивность первого главного максимума дифракционной картины решетки равна I_0. Каждую третью щель этой решетки закрыли. Чему стали равны интенсивности первого, второго и третьего главных максимумов новой дифракционной решетки?

Публикацию подготовили В.Голубев, С.Пырлин, М.Яковлев