...зеленый и голубой усиливают свой цвет в полутени, а красный и желтый выигрывают в цвете в своих освещенных частях, и то же самое делает белый.

Леонардо да Винчи

Свет состоит из лучей всех цветов не только по выходе из призмы, но даже тогда, когда он еще не дошел до призмы, до всякого преломления.

Исаак Ньютон

Утверждения Ньютона – чудовищное предположение. Да и как то может быть, чтобы самый прозрачный, самый чистый цвет – белый – оказался смесью цветных лучей?

Иоганн Вольфганг Гёте

Любой цвет от смачивания водой делается гуще. Почему? Надо подумать.

Михаил Ломоносов

Сам факт зависимости показателя преломления от частоты называется дисперсией <от лат. dispersion – рассеяние>, так как именно из-за нее свет раскладывается призмой в спектр.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знаком вам цвет?

Повседневно мы используем понятие цвета, не особенно задумываясь над его точным определением. Но стоит лишь попытаться установить его меру, как мы столкнемся, скорее всего, с теми же трудностями, что испытывали наши предшественники. Долгое время ученые обходили эту проблему, а как только они за нее брались, так на них обрушивался град критики.

Порывшись в справочниках, мы найдем, например, такие высказывания: «цвет – свойство тел вызывать определенное зрительное ощущение в соответствии со спектральным составом и интенсивностью отражаемого или испускаемого ими видимого излучения»; «длина волны света в вакууме... задает количественную меру того, что субъективно воспринимается как цвет монохроматического луча». Стало легче?

Тем не менее, несмотря на впечатление неконкретности и даже некоего произвола, можно утверждать, что категория цвета прочно вошла и в науку, и в практику. Многоцветье спектров – мощный инструмент анализа при контроле за плавкой металлов и в изучении структуры и состава звезд, незаменимый помощник инженеров-строителей, дизайнеров и колористов. А оптическая аналогия послужила основанием для выбора названия одной из характеристик мельчайших частиц материи – кварков и глюонов, также снабдив их «цветом».

Таким образом, наблюдая за радугой или зарей, полярными сияниями или мыльными пузырями, вспоминайте не только о поэтических образах, но и о существовании «разноцветной» физики.

Вопросы и задачи

1. Как ответить на вопрос М.В.Ломоносова, поставленный в эпиграф?

2. Почему цвета некоторых материалов при дневном и электрическом освещении различны?

3. Если луч белого света направить на треугольную призму, стоящую на столе, не под углом к горизонту, а горизонтально, то часть цветных полосок, наблюдаемых на экране за призмой в первом случае, может исчезнуть. Каких и по какой причине?

4. При повышении температуры вещества происходит как расширение диапазона непрерывного спектра, так и смещение его максимума. В какую именно сторону: красного или фиолетового цвета?

5. Линза дает изображение прямоугольника, верхняя половина которого выкрашена в красный цвет, а нижняя – в синий. Прямоугольник расположен перпендикулярно главной оптической оси линзы. Почему не удается найти такое положение экрана, чтобы на нем одновременно было резкое изображение обеих половин прямоугольника?

6. Если смотреть на разноцветную светящуюся рекламу, например из газоразрядных трубок, то красные буквы всегда кажутся выступающими вперед по отношению к синим или зеленым. Чем это можно объяснить?

7. Почему призматический спектр чаще применяют для изучения состава коротковолнового излучения, а в случае длинноволнового излучения целесообразнее пользоваться дифракционным спектром?

8. Цветное стекло растерто в порошок, который кажется совершенно белым. Как узнать, каков истинный цвет стекла?

9. Получаемый на земле непрерывный спектр излучения Солнца содержит более двух десятков темных линий, т.е. фактически представляет собой спектр поглощения. Чем это объяснить?

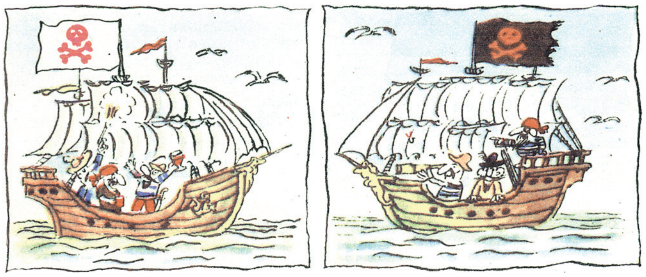
10. Что происходит с солнечным спектром во время наблюдения полного солнечного затмения?

11. Какая бумага – синяя, красная, черная – скорее зажигается солнечными лучами, собранными при помощи вогнутого зеркала или линзы?

12. Если смешать синюю и желтую краски, то получится зеленая краска. Но если светом синей и желтой ламп осветить лист чертежной бумаги, то она будет иметь белый цвет (синий и желтый цвета являются дополнительными). Нет ли здесь противоречия?

13. При наблюдении растений в свете синей лампы (вариант: через синие очки) зеленые листья кажутся малиново-красными. Как это объяснить?

14. На пакете с фотопленкой написано: «Обрабатывать при красном свете». Получится ли на этой пленке пиратс-



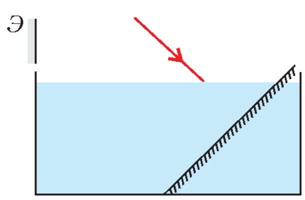
кий флаг, изображенный на рисунке слева? А справа?

15. При слабом освещении синий цвет иногда может казаться ярче красного, однако при хорошем освещении различие в их яркости часто бывает обратным. Почему относительная яркость красного и синего цветов зависит от уровня освещенности?

16. Отчего сигналы опасности подаются красным светом, хотя глаз наиболее чувствителен к желто-зеленому свету?

17. Почему виднеющийся на горизонте лес или дальние горы кажутся подернутыми голубоватой дымкой?

Микроопыт



Наполните неглубокий сосуд водой, вставьте в него плоское зеркало, как показано на рисунке, и пустите на поверхность воды луч солнечного света. На экране *Э* (стене или потолке) возникнет яркая картинка. Что она собой представляет и как она образовалась?

Любопытно, что...

...кусок красного стекла кажется красным и в отраженном и в проходящем свете. А вот у цветных металлов эти цвета различаются – так, золото отражает преимущественно красные и желтые лучи, но тонкая просвечивающая золотая пластинка пропускает зеленый свет.

...ученые XVII века не считали цвет объективным свойством света. Например, Кеплер полагал, что цвет – это качество, которое должны изучать философы, а не физики. И лишь Декарт, хотя и не мог объяснить происхождение цветов, был убежден в существовании связи между ними и объективными характеристиками света.

...созданная Гюйгенсом волновая теория света была большим шагом вперед – так, она дала используемые до сих пор объяснения законов геометрической оптики. Однако главная ее неудача заключалась в отсутствии категории цвета, т.е. она была теорией бесцветного света, несмотря на уже сделанное к тому времени Ньютоном открытие – обнаружение дисперсии света.

...призма – главный инструмент в ньютоновских опытах – была им куплена в аптеке: в те времена наблюдение призматических спектров было распространенным развлечением.

...многие предшественники Ньютона считали, что цвета зарождаются в самих призмах. Так, постоянный оппонент Ньютона Роберт Гук думал, что в солнечном луче не могут содержаться все цвета; это так же странно, считал он, как утверждать, что «в воздухе органных мехов содержатся все тоны».

...опыты Ньютона привели его и к печальному выводу: в сложных приборах с большим количеством линз и призм разложение белого света сопровождается появлением у изображения пестрой цветной каймы. Явление, названное «хроматической аберрацией», удалось впоследствии преодолеть, соединяя несколько слоев стекла с «уравновешивающими» друг друга показателями преломления, что привело к созданию ахроматических линз и подзорных труб с четкими изображениями без цветных бликов и полос.

...идея о том, что цвет определяется частотой колебаний в световой волне, впервые была высказана знаменитым математиком, механиком и физиком Леонардом Эйлером в 1752 году, при этом максимальная длина волны соответствует красным лучам, а минимальная – фиолетовым.

...первоначально Ньютон различал в солнечном спектре только пять цветов, но позже, стремясь к соответствию между числом цветов и числом основных тонов музыкальной гаммы, добавил еще два. Возможно, здесь сказалось пристрастие к древней магии числа «семь», согласно которой на небе было семь планет, а потому в неделе – семь дней, в алхимии – семь основных металлов и так далее...

...Гёте, считавший себя выдающимся естествоиспытателем и посредственным поэтом, горячо критикуя Ньютона, замечал, что выявленные в его опытах свойства света не истинны, поскольку свет в них «замучен разного рода орудиями пыток – щелями, призмами, линзами». Правда, в этой критике вполне серьезные физики позже узрели наивное предвосхищение современной точки зрения на роль измерительной аппаратуры.

...теория цветового зрения – о получении всех цветов при помощи смешения трех основных – ведет начало от речи Ломоносова 1756 года «Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее...», не замеченной, однако, научным миром. Полвека спустя эту теорию поддержал Юнг, а уж его предположения в 1860-х годах детально развил в трехкомпонентную теорию цвета Гельмгольц.

...если какие-либо пигменты отсутствуют в фоторецепторах сетчатки, то человек не ощущает соответствующих тонов, т.е. становится частично цветослепым. Таким был английский физик Дальтон, по имени которого и назван этот недостаток зрения. А обнаружил его у Дальтона не кто иной, как Юнг.

...явление, упомянутое в первом эпиграфе и в условии задачи 15, носит название эффекта Пуркине – в честь исследовавшего его знаменитого чешского биолога, также показавшего, что различные среды глаза обладают неодинаковым преломлением, и объяснившего возникновение некоторых зрительных иллюзий.

...оптические спектры атомов или ионов – не только богатый источник информации о строении атома, в них заключены сведения и о характеристиках атомного ядра, прежде всего связанных с его электрическим зарядом.

Что читать в «Кванте» о цвете

(публикации последних лет)

1. «Калейдоскоп «Кванта» – 2005, №5, с.32; 2008, №5, с.32;
2. «Загадка «тени от прозрачной пластинки» – 2006, №1, с.30;
3. «Как увидеть невидимку» – 2006, №4, с.9;
4. «Сюрпризы зеленого стекла» – 2007, №5, с.10;
5. «Самая светлая революция и ее творцы» – 2008, №6, с.2;
6. «Опыты с компакт-диском» – 2009, №4, с.44;
7. «Красное небо, синяя луна» – 2010, №1, с.39.

Материал подготовил А.Леонович

Задачи

1. *КОЕ – ЧТО = 857.* На сколько *КТО – ТО* больше, чем *КОЕ – КТО*? (Как обычно, одинаковыми буквами обозначаются одинаковые цифры, а разными – разные.)

А.Хачатурян

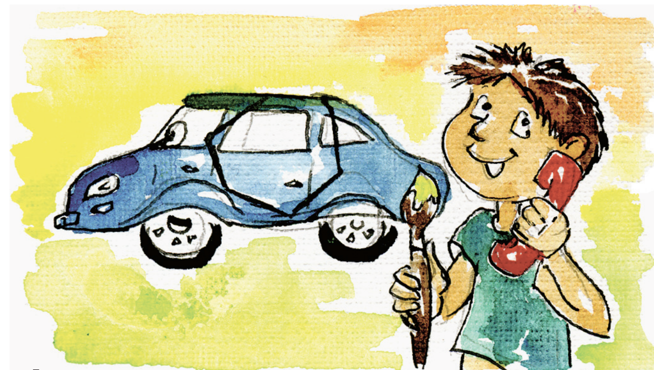
2. В некотором году количество четвергов равно количеству суббот. Обязательно ли и количество пятниц в этом году такое же? А если год високосный?

А.Канель-Белов

3. – Я нарисовал многоугольник и провел в нем все диагонали. Оказалось, что через середину каждой диагонали проходит какая-нибудь другая диагональ, – сказал Петя.
– Это параллелограмм, – сказал Вася.
– Нет.
– Тогда правильный многоугольник.
– Тоже нет.
А вы можете нарисовать такой многоугольник?

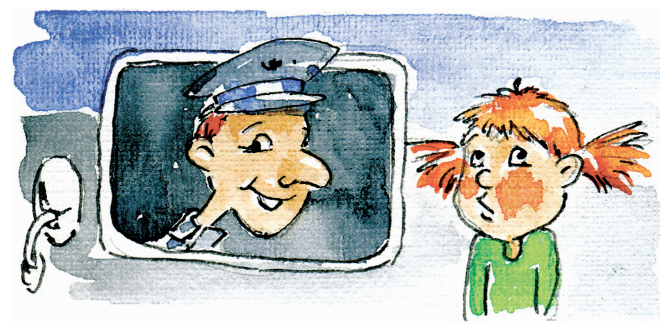
А.Шаповалов

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



4. Зачем машинист длинного товарного поезда, прежде чем тронуться, сдает немного назад?

Фольклор



5. На острове живут лжецы (всегда лгут), правдецы (всегда говорят правду) и хитрецы (врут через раз). Однажды встретились три незнакомых друг с другом мудрых островитянина и между ними произошел такой разговор.
А: Я не знаю, есть ли среди нас лжецы.
Б: Я не знаю, есть ли среди нас правдецы.
В: Я не знаю, есть ли среди нас хитрецы.
А: Я даже не знаю, есть ли среди вас лжецы.
Б: Я даже не знаю, есть ли среди вас правдецы.
В: Я даже не знаю, есть ли среди вас хитрецы.
Кто из них кто?

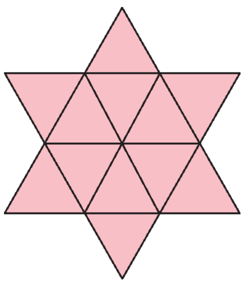
А.Хачатурян

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина
«Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу:* math@kvant.info *(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.



6. В единичные треугольники фигуры впишите числа от 1 до 12 так, чтобы сумма четырех чисел в каждом треугольнике со стороной 2 была равна 20.

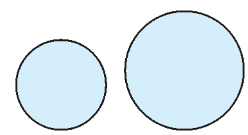
Н.Авилов

7. Квартира представляет собой квадрат 3×3, разделенный стенами на квадратики 1×1 – комнаты. Между каждыми двумя соседними по стене комнатами есть дверь, но сейчас все двери заперты. Какое наименьшее число дверей нужно открыть, чтобы кот, сидевший в одной из комнат, мог гулять по всей квартире?

Н.Стрелкова

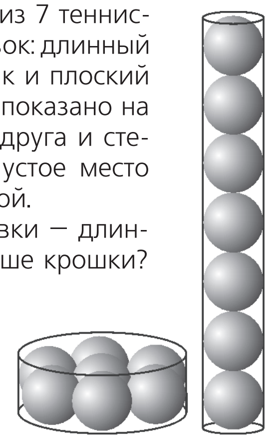
8. Два одинаковых точечных шара движутся с разными скоростями по одной окружности в одну сторону. Запущенные с этими скоростями каждый в отдельности, они делали бы в минуту 7 и 12 оборотов соответственно. При совместном движении они сталкиваются, обмениваясь после удара своими скоростями. Докажите, что шары будут встречаться в конечном числе точек, расположенных в вершинах некоторого правильного многоугольника, и найдите число этих точек.

Г.Гальперин



9. На плоскости даны два непересекающихся круга. Найдется ли вне этих кругов такая точка *A*, что любая прямая, проходящая через *A*, обязательно «заденет» хотя бы один них (т.е. пересечет или коснется)?

Фольклор



10. Фирма выпускает наборы из 7 теннисных мячиков в двух видах упаковок: длинный цилиндр толщиной в один мячик и плоский цилиндр высотой в 1 мячик, как показано на рисунке. Мячики касаются друг друга и стенок так, чтобы не болтались. Пустое место заполняется пластиковой крошкой.

а) На заполнение какой упаковки – длинной или плоской – уходит больше крошки?

б*) Сколько граммов крошки уходит на заполнение плоской упаковки, если на заполнение длинной требуется 90 граммов?

Указание. Для решения пункта б) вам понадобится интересный факт, который знал еще Архимед: шар занимает ровно 2/3 объема цилиндра, в который он вписан (шар касается стенок, дна и крышки цилиндра).

Г.Гальперин, А.Шаповалов

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

1. На табло горит верное равенство, только один пиксель сломан (либо горит, а должен быть погашен, либо погашен, а должен гореть):

Какой пиксель сломан?

Участники сообщества www.braingames.ru

2. Разгадайте шуточную загадку:
1 см бумаги – 9 метров,
2 см бумаги – 27 метров,
а 3 см бумаги – сколько метров?

А.Тарасов

3. Вы находитесь на поляне, окруженной рвом шириной 10 м и глубиной 5 м. В вашем распоряжении только лестница длиной 2 м и неограниченный запас веревки толщиной 3 мм. Как выбраться?

Фольклор

4. Зачем ведра делают «скошенными» (нижний диаметр немного меньше верхнего), а не цилиндрическими?

Фольклор

Как всегда, на высоте!

(ИЗ МЕМУАРОВ БАРОНА МЮНХГАУЗЕНА)

Хорошо известно, что барон Мюнхгаузен дружен с геометрией. Иначе зачем бы он носил на такой умной голове такую знаменитую «треуголку»? В геометрии Мюнхгаузен старается (впрочем, как и во всем остальном) *всегда находиться на высоте*. Надо сказать, у барона это здорово получается! Поскольку в последнее время некоторые из его мемуаров стали доступны, мы с удовольствием публикуем их с небольшими сокращениями, обозначенными многоточием…

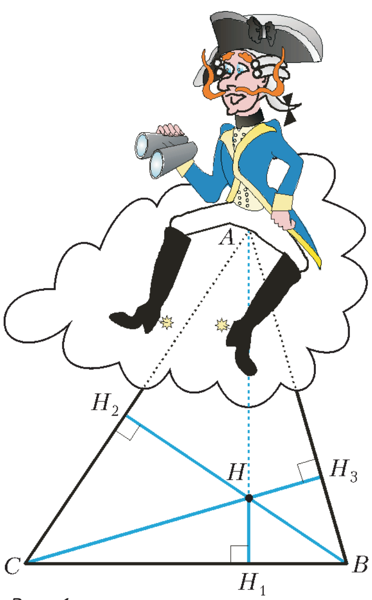


Рис. 1

«Вершина A совершенно скрылась в облаках. Видимость – даже не нулевая, а со знаком «минус». Тем не менее, взбираясь на вершину, я просто обязан был находиться на высоте…»

Задача 1. *Вершина A в треугольнике ABC недоступна. Пользуясь циркулем и линейкой, постройте высоту AH_1 этого треугольника.*

Решение. Проводим высоты BH_2 и CH_3, которые пересекаются в точке H (рис.1). Через эту точку проходит и третья высота (так как высоты треугольника пересекаются в одной точке). Из H проводим перпендикуляр HH_1 к стороне BC. Прямая HH_1 совпадает с искомой.

«После того, как я совершил полукругосветное путешествие, мне вновь очень важно было оказаться на высоте. Однако возможности мои были сильно ограничены. Дело было так…»

Задача 2. *Дана полуокружность с диаметром BC и точка A вне полуокружности. При помощи только линейки проведите высоту AH_1 в треугольнике ABC.*

Решение. Проводим AB и AC, которые пересекают полуокружность в точках K и N соответственно (рис.2). Соединив B и N, C и K, заметим: BN и CK – высоты в треугольнике ABC ($\angle BKC = \angle BNC = 90°$ – вписанные, опираются на диаметр). Тогда прямая, проведенная через вершину A и точку H пересечения BN и CK, совпадает с высотой AH_1.

«Однажды я во весь опор скакал на коне, чтобы сообщить важную новость друзьям. Вдруг на моем

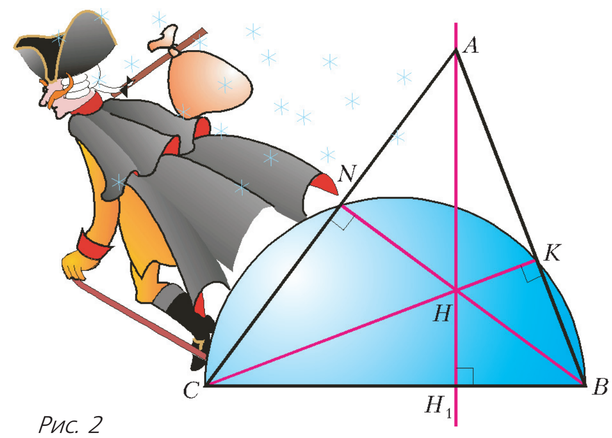


Рис. 2

пути – непроходимое болото треугольной формы. Всем известно, что я могу вытаскивать себя за волосы из болота вместе с конем. Но каждая секунда дорога. Единственная тропинка проходит по высоте. И конечно я, как всегда, должен быть на ней. И побыстрее! А пока что мы с конем – в самом начале тропинки. Как быть?..»

Задача 3. *Дана прямая l, содержащая сторону BC треугольника ABC, и точка H_1 – основание высоты AH_1. Проведя не более трех линий циркулем и линейкой, постройте прямую AH_1.*

Решение. Берем произвольную точку O вне прямой l и строим окружность ω с центром в O радиуса OH_1 (рис.3). Пусть ω пересекает l в точке T (кроме H_1).

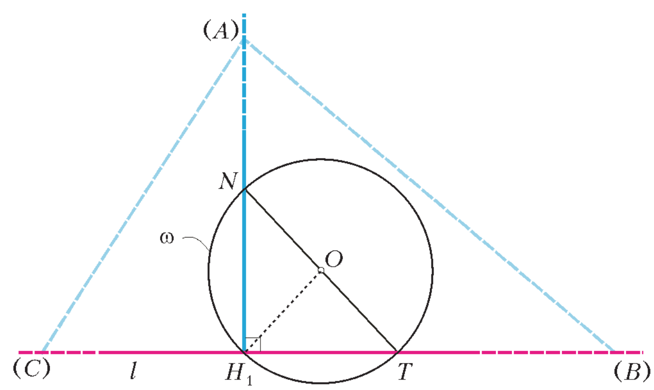


Рис. 3

Вторая линия – прямая TO, которая пересекает ω в точке N. Очевидно, третья линия – прямая NH_1 – совпадает с искомой, так как $\angle NH_1T = 90°$ (вписанный, опирается на диаметр).

«Прогуливаясь со своей собакой Матильдой по высоте AH_1, я заметил, что в какой бы точке высоты мы с ней ни оказались…»

Задача 4. *Докажите, что для любой точки X высоты AH_1 треугольника ABC выполняется равенство: $b^2 - c^2 = CX^2 - BX^2$, где $AC = b$, $AB = c$.*

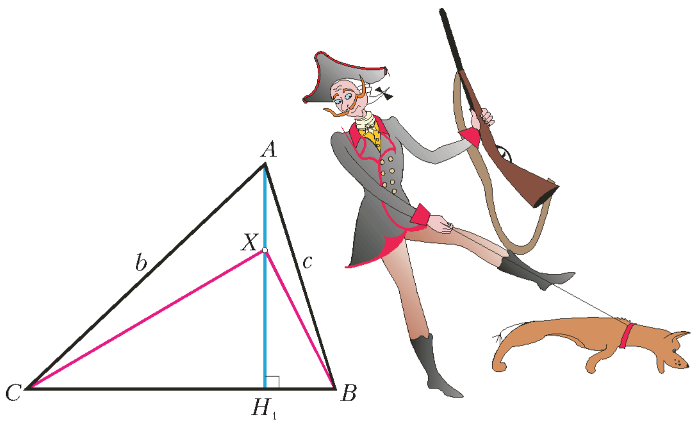


Рис. 4

Решение. По теореме Пифагора для треугольников AH_1C и AH_1B (рис.4) имеем: $b^2 - CH_1^2 = AH_1^2$ и $c^2 - BH_1^2 = AH_1^2$, откуда

$$b^2 - c^2 = CH_1^2 - BH_1^2. \qquad (1)$$

По той же теореме для треугольников CXH_1 и BXH_1: $CX^2 - CH_1^2 = XH_1^2$ и $BX^2 - BH_1^2 = XH_1^2$, откуда

$$CX^2 - BX^2 = CH_1^2 - BH_1^2. \qquad (2)$$

Сравнив (1) и (2), получим требуемое:

$$b^2 - c^2 = CX^2 - BX^2.$$

«Однажды, находясь, как всегда, на высоте, я почувствовал, что одновременно нахожусь и на биссектрисе, но совсем другого треугольника. Удивительное дело! – подумал я...»

Задача 5. *Высоты AH_1, BH_2, CH_3 остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами треугольника $H_1H_2H_3$. Докажите!*

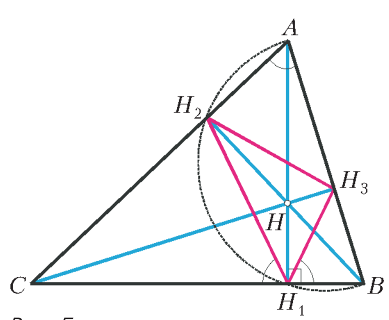


Рис. 5

Решение. Около четырехугольника AH_2H_1B можно описать окружность с диаметром AB, так как $\angle AH_2B = \angle AH_1B = 90°$ (рис. 5). Тогда $\angle H_2H_1B = 180° - \angle A$ и смежный с ним $\angle H_2H_1C = \angle A$. Аналогично показывается, что и $\angle H_3H_1B = \angle A$. Поскольку $AH_1 \perp BC$, то высота AH_1 является биссектрисой угла $H_2H_1H_3$. Точно так же BH_2 и CH_3 являются биссектрисами соответствующих углов треугольника $H_1H_2H_3$.

«Быть может, вам покажется странным, но както раз, будучи на высоте и находясь под градом неприятельских ядер, я снова не мог отделаться от мысли, что нахожусь на биссектрисе. Вот как это было...»

Задача 6. *На высоте AH_1 треугольника ABC взята произвольная точка X. Лучи BX и CX пересекают AC и AB в точках N и T соответственно (рис.6). Докажите, что AH_1 – биссектриса угла NH_1T.*

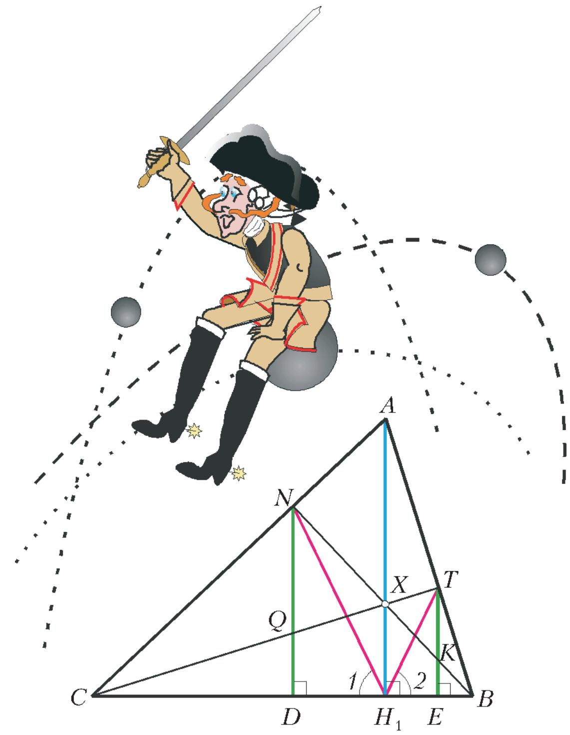


Рис. 6

Решение. Проведем $ND \perp BC$ и $TE \perp BC$. Пусть также $Q = ND \cap CT$ и $K = TE \cap BN$. Из подобия треугольников NXQ и KXT следует: $\frac{NQ}{TK} = \frac{NX}{XK}$. Поскольку $\frac{NX}{XK} = \frac{DH_1}{H_1E}$ (теорема Фалеса), то

$$\frac{NQ}{TK} = \frac{DH_1}{H_1E}. \qquad (1)$$

Согласно теореме Фалеса, $\frac{TK}{TE} = \frac{AX}{AH_1}$ и $\frac{AX}{AH_1} = \frac{NQ}{ND}$. Значит, $\frac{NQ}{ND} = \frac{TK}{TE}$, или

$$\frac{NQ}{TK} = \frac{ND}{TE}. \qquad (2)$$

Сравнив (1) и (2), получаем: $\frac{ND}{TE} = \frac{DH_1}{H_1E}$, т.е. прямоугольные треугольники NDH_1 и TEH_1 подобны, или $\angle 1 = \angle 2$. А это и означает, что высота AH_1 является биссектрисой угла NH_1T.

«Замечу вам, друзья мои, что несколько раз мне приходилось находить длину высоты, на которой я, как всегда, находился. Поведаю вам о двух таких случаях.

Случай I...»

Задача 7. *Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r соответственно. Найдите длину высоты AH_1, если известно, что радиус AO описанной окружности перпендикулярен отрезку OI (где I – центр вписанной в треугольник ABC окружности).*

Решение. Сначала докажем важную лемму.

Лемма. *Биссектриса треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из той же вершины.*

Пусть прямая AH_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K (рис.7). Проведем диаметр AM этой окружности. Тогда $\angle AKM = 90°$, как опирающийся на диаметр, откуда прямые KM и BC параллельны, поскольку обе они образуют угол $90°$ с прямой AH_1. Значит, равны дуги BK и CM, ведь они высекаются параллельными прямыми. Поэтому равны опирающиеся на эти дуги вписанные углы BAK и CAM. Тогда, поскольку биссектриса угла BAC делит этот угол пополам, она и угол KAM делит пополам. Лемма доказана.

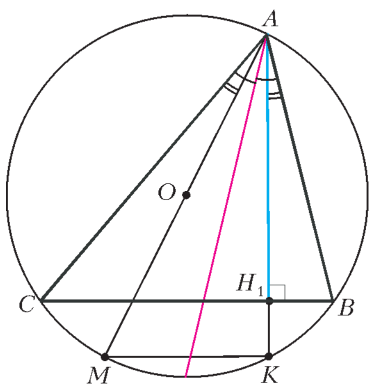


Рис. 7

Вернемся к решению задачи. Из точки I опустим перпендикуляр IT на высоту AH_1 (рис.8). Очевидно, $TH_1 = r$. Заметим, что AI – биссектриса угла A, и по лемме она делит пополам угол OAH_1, т.е. $\angle 1 = \angle 2$ и треугольники AIO и AIT равны по гипотенузе и острому углу. Тогда $AT = AO = R$ и $AH_1 = R + r$.

«Случай II...»

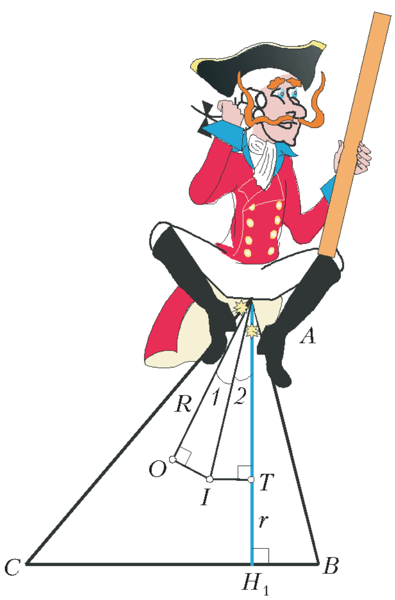


Рис. 8

Задача 8. *AH_1 – высота в прямоугольном треугольнике ABC, проведенная из вершины прямого угла. Площади треугольников ACH_1 и ABH_1 равны S_1 и S_2 соответственно (рис.9). Найдите длину высоты AH_1.*

Решение. Так как $2S_1 = AH_1 \cdot CH_1$ и $2S_2 = AH_1 \cdot BH_1$, то, перемножив левые и правые части этих двух равенств, получим: $AH_1^2 \cdot BH_1 \cdot CH_1 = 4S_1S_2$. Но $BH_1 \cdot CH_1 = AH_1^2$ (известная формула для прямоугольного треугольника, попробуйте доказать ее сами). Тогда $AH_1^4 = 4S_1S_2$, откуда $AH_1 = \sqrt[4]{4S_1S_2}$.

«Помнится, пришлось мне выдержать трудный бой с пиратским кораблем в точке N внутри Бермудского треугольника ABC. Как вы думаете, находился ли я во время боя на высоте?..»

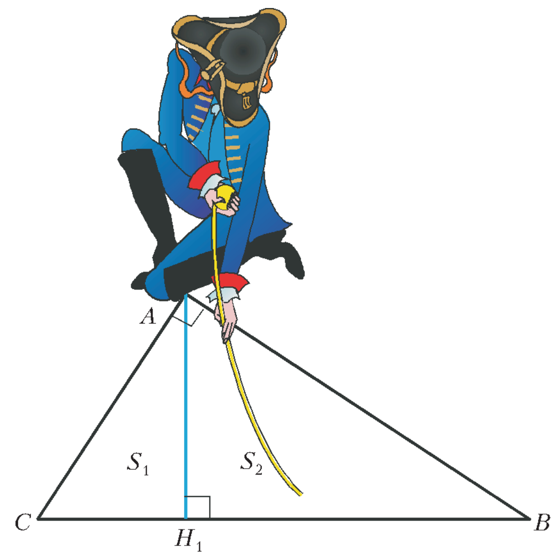


Рис. 9

Задача 9. *На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построен круг. Он пересекает AB и AC в точках K и T соответственно. Касательные к нему в этих точках пересекаются в точке N. Докажите, что N принадлежит высоте AH_1.*

Решение. Проведя BT и CK (рис.10), заметим, что они являются высотами в треугольнике ABC, посколь-

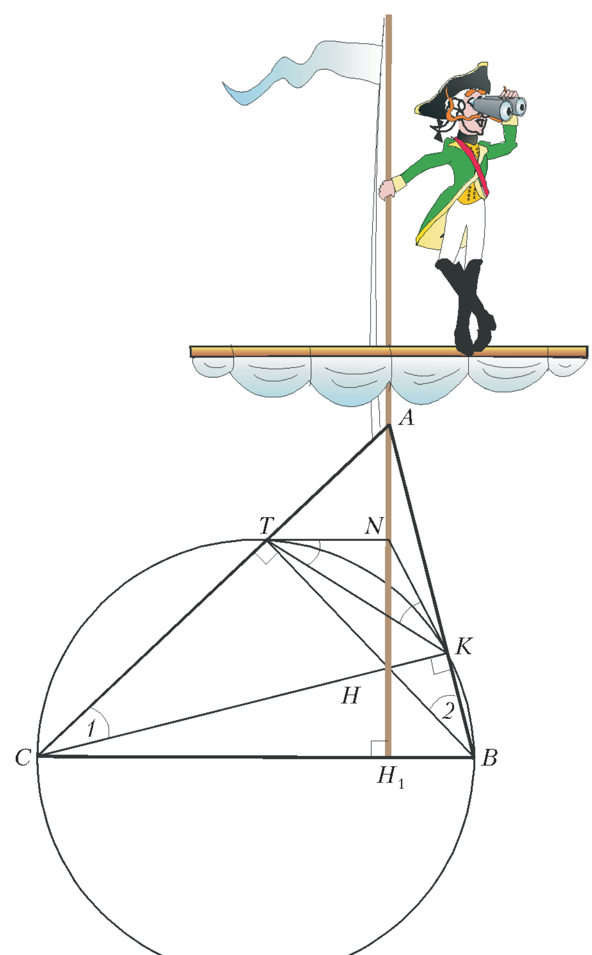


Рис. 10

ку BC – диаметр. Тогда $\angle 1 = \angle 2 = 90° - \angle A$ (соответственно из треугольников ACK и ABT). При этом они вписанные, опираются на дугу TK. Значит, $\angle NTK = \angle NKT = 90° - \angle A$ (углы между касательной и хордой), тогда $\angle KNT = 2\angle A$. Поскольку к тому же $KN = TN$ и $\angle TAK = \frac{1}{2}\angle TNK$, то точка N – центр описанной окружности треугольника ATK. Однако AH – диаметр этой окружности (в четырехугольнике $ATHK$ два противоположных угла равны по $90°$). Следовательно, N – середина AH, а значит, эта точка лежит на высоте AH_1.

«Мне удалось найти крупнейшие сокровища флибустьеров, спрятанные в вершинах равнобедренного треугольника. Правда, потрудиться пришлось изрядно: я побывал практически во всех замечательных точках треугольника. Понадобилась даже помощь Аполлония и Эйлера – моих добрых друзей, после чего сокровища были найдены. А я, как всегда, оказался на высоте!..»

Задача 10. *Постройте равнобедренный треугольник ABC (AB = AC) по центру I вписанной в него окружности, точке пересечения медиан M и точке пересечения высот H.*

Решение. Очевидно, все три точки находятся на одной прямой, так как треугольник ABC – равнобедренный. Несложно найти и четвертую «замечательную» точку – центр O описанной около треугольника ABC окружности (рис.11). Действительно, красивая теорема Эйлера утверждает[1], что в любом треугольнике точка пересечения медиан M, точка пересечения высот H и центр описанной окружности O лежат на одной прямой (называемой *прямой Эйлера*), причем $2OM = MH$.

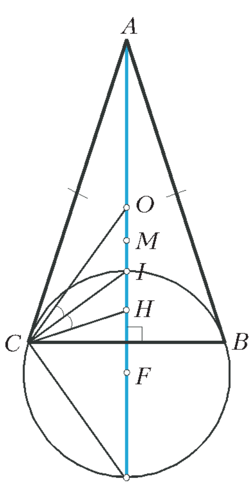


Рис. 11

Известно, что биссектриса угла C является также биссектрисой угла OCH (см. лемму из задачи 7). Отношение отрезков $\frac{CO}{CH}$ равно отношению отрезков $\frac{OI}{IH}$ (по свойству биссектрисы). Оказывается, точки X, для которых отношение $\frac{XO}{XH}$ постоянно (и равно отношению $\frac{OI}{IH}$), – это точки некоторой окружности с центром на прямой OH, которая называется окружностью Аполлония[2]. Чтобы построить эту окружность, построим сначала точку I_a, делящую отрезок OH в этом же отношении внешним образом, т.е. $\frac{OI}{IH} = \frac{OI_a}{HI_a}$. Тогда отрезок II_a будет диаметром нашей окружности. А ее центр F ($IF = FI_a$) будет совпадать с точкой, симметричной точке H относительно основания BC (докажите). Тогда серединный перпендикуляр к HF пересекает окружность Аполлония в вершинах B и C. А окружность с центром O радиуса OC в пересечении с прямой AH_1 дает недостающую вершину A.

Дабы не утомлять внимание читателей, некоторые из историй барона Мюнхгаузена мы сразу представим в виде задач для самостоятельного решения.

Задача 11. *Мог ли барон, находясь, как всегда, на высоте AH_1 треугольника ABC, находиться также на его стороне?*

Задача 12. *Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, T – середина медианы AM_1, Q – точка, симметричная O относительно T. Докажите, что точка Q лежит на AH_1.*

Задача 13. *Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к ней в точках B и C пересекают касательную в вершине A в точках K и T. Докажите, что высота AH_1 совпадает с биссектрисой угла KH_1T.*

Задача 14. *Однажды барон Мюнхгаузен находился, как всегда, на высоте AH_1 и вместе с тем на прямой Симсона[3] треугольника ABC. Для какой точки треугольника это могло быть?*

Задача 15. *На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на хорде строятся окружности. Они пересекают AB и AC в точках K_i и T_i соответственно. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей всевозможных треугольников AK_iT_i.*

(**Ответ.** Высота AH_1 без точек A и H_1.)

Задача 16. *Дан треугольник ABC и описанная около него окружность с центром O. При помощи одной линейки проведите высоту AH_1.*

В заключение отметим, что барон Мюнхгаузен в своих мемуарах предлагает пытливым читателям провести исследование некоторых его историй.

Например, как быть, если в задаче 1 точки H_2 и H_3 тоже скрыты облаками?

А что, если в задаче 2 точка A будет расположена так, как на рисунке 12?

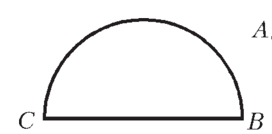


Рис. 12

И так далее!..

Доступ к мемуарам барона Мюнхгаузена получил
Г.Филипповский

[1] *Доказательство этой непростой теоремы приведено, например, в статье И.Шарыгина и А.Ягубьянца «Окружность девяти точек и прямая Эйлера» в «Кванте» №8 за 1981 год.*

[2] *Подробнее об этом можно прочитать в статье Г.Филипповского «Досье» на окружность Аполлония» в «Кванте» №4 за 2004 год.*

[3] *Оказывается, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности треугольника на его стороны (или их продолжения), лежат на одной прямой. Эта прямая называется прямой Симсона. Подробнее о ней и других интересных фактах о геометрии треугольника вы можете прочитать в статье Д.Швецова в «Кванте» №6 за 2009 год.*