Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2011 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2191» или «Ф2198». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2191–М2198,а предлагались на заключительном этапе XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2191–М2198, Ф2198–Ф2204

М2191. Дано натуральное $n > 1$. Докажите, что найдутся такие n последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие $2n + 1$, и не делится ни на одно другое простое число.

И.Богданов

М2192. Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке P, а окружность ω – в точке Q. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой.

Л.Емельянов

М2193. В каждой клетке квадрата 100×100 записано некоторое натуральное число. Прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки, назовем *хорошим*, если сумма чисел во всех его клетках делится на 17. Разрешается одновременно закрашивать все клетки в некотором хорошем прямоугольнике. Одну клетку запрещается закрашивать дважды. При каком наибольшем d можно закрасить хотя бы d клеток при любом расположении чисел?

П.Зусманович, Ф.Петров

М2194. В буфете лежат 100 яблок суммарной массой 10 кг, каждое массой не меньше 25 г. Буфетчице нужно разрезать их на части и раздать 100 детям, каждому по 100 г. Докажите, что она может это сделать так, чтобы масса любого куска яблока была не меньше 25 г.

К.Кноп, И.Богданов

М2195. Даны $n \geq 3$ попарно взаимно простых чисел. Известно, что при делении произведения любых $n - 1$ из них на оставшееся число получается один и тот же остаток r. Докажите, что $r \leq n - 2$.

В.Сендеров

М2196. Могут ли 4 центра вписанных в грани тетраэдра окружностей лежать в одной плоскости?

И.Богданов, О.Подлипский

М2197. Многочлен $P(x)$ степени $n \geq 3$ имеет n вещественных корней $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, причем $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots < x_n - x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y = |P(x)|$ на отрезке $[x_1; x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1}; x_n]$.

И.Богданов

М2198*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 – середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно.

а) Докажите, что прямые $M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4$ пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что точка пересечения прямых из пункта а) лежит на прямой OK.

И.Богданов, П.Кожевников

Ф2198. На гладком горизонтальном столе лежит плашмя тонкий обруч массой M. На его обод намотана легкая нерастяжимая нить, за свободный конец нити мы тянем с силой F, направленной по касательной к обручу. С каким ускорением движется конец нити, за который мы тянем?

А.Простов

Ф2199. Тело, находящееся на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, бросают горизонтально. Найдите, при каком угле α траекторией тела будет периодическая кривая. Коэффициент трения тела о наклонную плоскость равен μ.

Ю.Радар

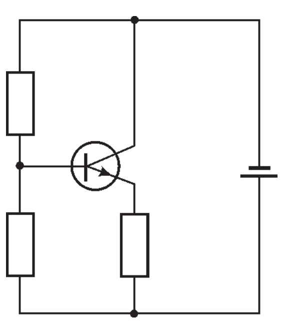
Ф2200. С порцией одноатомного газа проводят циклический процесс, состоящий из изотермического расширения в 9 раз, охлаждения в 3 раза при неизменном объеме и адиабатического сжатия до первоначального состояния (можете проверить – получается!). Найдите термодинамический КПД этого цикла

Р.Циклов

Ф2201. Из множества одинаковых вольтметров собрана обычная «бесконечная» цепь, подключенная к батарейке. Первый из вольтметров показывает больше всех – его стрелка отклоняется почти на всю шкалу. Погрешность приборов составляет 1%. Сколько приборов показывают напряжения, превышающие порог погрешности?

З.Рафаилов

Ф2202. На рисунке приведена схема включения обычного транзистора. Напряжение батарейки равно 6 В. Сопротивления резисторов в цепи базы – по 100 кОм, в цепи эмиттера – 10 кОм. Потенциал вывода базы (относительно «минуса» батарейки) +2,7 В, потенциал эмиттера +2,1 В. Во сколько раз ток коллектора транзистора больше тока базы?



Э.Базов

Ф2203. Из одинаковых тонких проволочек спаяли кубик – проволочки являются его ребрами. К максимально удаленным двум вершинам кубика подключили источник, который обеспечивает протекание заданного тока во внешней цепи («источник тока»), и вычислили магнитную индукцию поля этих проволочек в центре кубика. Во сколько раз изменится это поле после перерезания одной из проволочек? При решении считайте, что токи остальных ребер после перерезания не меняются (вообще-то это неверно!).

А.Кубиков

Ф2204. Одна часть катушки индуктивности содержит 200 витков, намотанных на стержень из феррита – вещества с большой магнитной проницаемостью. В нашем случае это стержень длиной 10 см и диаметром 8 мм, магнитная проницаемость которого равна 1000 (бывает и в несколько раз больше или меньше, но так была устроена магнитная антенна моего первого радиоприемника). Длина намотки составляет 2 см. Вторая часть катушки содержит 20 витков, эта часть намотана на бумажный цилиндрик, который можно передвигать по ферритовому стержню, меняя расстояние между частями катушки. Части катушки соединяют последовательно. Оцените, во сколько раз можно изменять индуктивность, передвигая по стержню «малую» катушку.

А.Зильберман

Решения задач М2169–М2175, Ф2175, Ф2176, Ф2182–Ф2188

М2169. *Каждая сторона остроугольного треугольника ABC меньше соответствующей стороны треугольника $A'B'C'$. Докажите, что $R < R'$, где R и R' – радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно.*

Так как сумма углов любого треугольника равна $180°$, все три неравенства $\angle BAC > \angle B'A'C'$, $\angle CBA > \angle C'B'A'$, $\angle ACB > \angle A'C'B'$ не могут быть выполнены. Пусть для определенности $\angle BAC \geq \angle B'A'C'$. Тогда $\sin\angle BAC \geq \sin\angle B'A'C'$, поскольку $\angle BAC$ острый. Так как $BC < B'C'$, то

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} < \frac{B'C'}{2\sin\angle B'A'C'} = R'.$$

Замечание. Эту задачу можно обобщить. Пусть многоугольник M, вписанный в окружность радиуса R, таков, что центр окружности лежит внутри M. Тогда для вписанного многоугольника M', полученного из M увеличением длин сторон, радиус описанной окружности больше R. Это утверждение, вообще говоря, неверно для произвольного вписанного многоугольника (скажем, утверждение задачи неверно для тупоугольного треугольника ABC).

П.Кожевников

М2170. *Окружность пересекает график функции $y = x^3 - 2009x$ в шести точках. Найдите сумму абсцисс этих точек.*

Ответ: 0.

Пусть $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$ – уравнение окружности. Подставив $y = x^3 - 2009x$ в это уравнение, мы получим уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = (x-a)^2 + \left(x^3 - 2009x - b\right)^2 - R^2 = 0$. Уравнение $f(x) = 0$ шестой степени, причем, как легко видеть, у многочлена $f(x)$ коэффициент при x^6 равен 1, а коэффициент при x^5 равен 0. Уравнению $f(x) = 0$ удовлетворяют абсциссы $x_1, x_2, \ldots, x_6$ шести точек пересечения графика с окружностью (различные точки графика имеют различные абсциссы, поэтому $x_1, x_2, \ldots, x_6$ различны), значит, многочлен $f(x)$ раскладывается на множители: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_6)$. Исходя из этого разложения, получаем, что коэффициент при x^5 равен $-(x_1 + x_2 + \ldots + x_6)$.[1] С другой стороны, как мы уже знаем, этот коэффициент равен 0.

И.Богданов

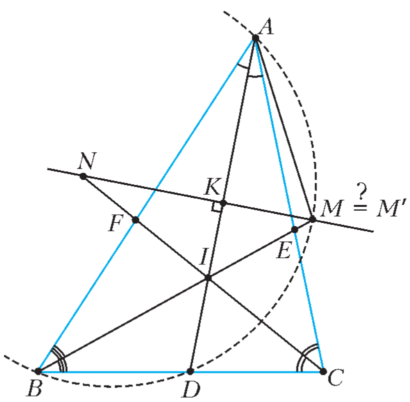
[1] *Фактически эти рассуждения повторяют доказательство теоремы Виета для многочлена.*

М2171. *Можно ли разбить при каком-то натуральном k все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?*

Ответ: нельзя.

Предположим противное. Ясно, что $k \ge 10$, так как в наборе цифр от 1 до 9 нет повторяющихся. Рассмотрим наибольшую степень десятки 10^n, не превосходящую k. Последовательность цифр числа 10^n целиком войдет в одно из составленных чисел. Но тогда такая же последовательность из единицы и n последующих нулей должна повториться во втором числе. Эта последовательность цифр не могла появиться из объединения двух или более чисел (так как натуральные числа не начинаются с нулей), значит, она содержалась в одном числе, отличном от 10^n. Но наименьшее число, отличное от 10^n и содержащее такой набор цифр, – это 10^{n+1}. Мы получили противоречие с тем, что 10^n – максимальная степень десятки, не превосходящая k.

Н.Агаханов



М2172. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.*

Для решения задачи достаточно установить, что $\angle MAI = \angle MNI$ (см. рисунок). Пусть K – середина отрезка AD. Заметим, что

$$\angle MNI = \angle KNI =$$
$$= 90° - \angle KIN = 90° - (\angle ACI + \angle CAI) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(180° - (\angle ACB + \angle BAC)\right) = \frac{1}{2}\angle ABC .$$

Остается установить, что $\angle MAI = \frac{1}{2}\angle ABC$. Пусть M' – точка пересечения окружности, описанной около треугольника ABD, с серединным перпендикуляром к отрезку AD (точка M' лежит на дуге AD, не содержащей точку B). Тогда $AM' = DM'$, $\cup AM' = \cup DM'$, а значит, и $\angle M'BD = \angle M'BA$, как опирающиеся на равные дуги. Это означает, что точка M' лежит на биссектрисе угла ABC и, следовательно, M' совпадает с M. Итак, точки A, M, D и B лежат на одной окружности, откуда $\angle MAI = \angle MBD = \frac{1}{2}\angle ABC$, что и требовалось.

Замечание. Схема другого (вычислительного) решения состоит в проверке равенства $KI \cdot KA = KN \cdot KM$. Все присутствующие в равенстве отрезки выражаются через KI: $KN = KI \operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2}$, $KM = KI \operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2}$, $KA = \frac{p}{p-a}KI$, где p – полупериметр треугольника ABC, $a = BC$ (последнее равенство легко выводится из известной формулы $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$).

П.Кожевников

М2173. *Пусть $p > 3$ – простое число, a и b – целые числа такие, что $a^2 + ab + b^2$ делится на p. Докажите, что $(a+b)^p - a^p - b^p$ делится: а) на p^2; б*) на p^3.*

Если a кратно p, то b – тоже. В этом случае утверждение очевидно.

Далее считаем, что a и b не делятся на p. Пусть натуральное c таково, что $bc \equiv 1 \pmod p$ (такое c найдется; например, в силу малой теоремы Ферма подходит $c = b^{p-2}$). Положим $ac = k$. Тогда

$$a^2 + ab + b^2 \,\vdots\, p \Leftrightarrow (ac)^2 + (ac)(bc) + (bc)^2 \,\vdots\, p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2 + k + 1 \,\vdots\, p .$$

Это возможно только когда p дает остаток 1 при делении на 6: $p = 6m + 1$ (см., например, задачу М1324 «Задачника «Кванта» №1 за 1992 г.).

Заметим, что

$$(a+b)^p - a^p - b^p \,\vdots\, p^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (ac+bc)^p - (ac)^p - (bc)^p \,\vdots\, p^3 \Leftrightarrow (k+1)^p - k^p - 1 \,\vdots\, p^3 .$$

Теперь для решения задачи достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение. *Для простого $p = 6m + 1$ многочлен $f(x) = (x+1)^p - x^p - 1$ делится на многочлен $p\left(x^2 + x + 1\right)^2$ (т.е. $f(x) = p\left(x^2+x+1\right)^2 g(x)$, где $g(x)$ – некоторый многочлен с целыми коэффициентами).*

Так как p – простое, то все коэффициенты C_p^k ($k = 1, 2, \ldots, p-1$) многочлена $f(x)$ делятся на p. Оставшуюся часть (делимость многочлена с целыми коэффициентами $\frac{1}{p}f(x)$ на многочлен $\left(x^2+x+1\right)^2$) можно доказать, рассматривая комплексный корень ε многочлена $x^2 + x + 1$ (см. ниже), или по индукции, как это сделано в «Кванте» № 3 за 2007 г. (см. леммы 1 и 2 в решении задачи М2023).

Итак, докажем, что ε (как и сопряженный корень $\bar{\varepsilon}$) является двукратным корнем $f(x)$, т.е. корнем многочлена $f(x)$ и его производной

$$f'(x) = p\left((x+1)^{p-1} - x^{p-1}\right).$$

Заметим, что $\varepsilon^3 = 1$ (так как $\varepsilon - 1 = (\varepsilon - 1)\left(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1\right) = 0$) и $(\varepsilon+1)^3 = -1$ (так как

$$(\varepsilon+1)^3 + 1 = (\varepsilon+2)\left((\varepsilon+1)^2 - (\varepsilon+1) + 1\right) =$$
$$= (\varepsilon+2)\left(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1\right) = 0).$$

Тогда

$$f(\varepsilon) = (\varepsilon+1)^{6m+1} - \varepsilon^{6m+1} - 1 = (-1)^{2m}(\varepsilon+1) - \varepsilon - 1 = 0\,;$$

$$\frac{1}{p} f'(\varepsilon) = (\varepsilon+1)^{6m} - \varepsilon^{6m} = (-1)^{2m} - 1 = 0\,.[2]$$

В.Сендеров

М2174. *а) Существуют ли четыре равных многоугольника таких, что любые два из них не имеют общих внутренних точек, но граничат по отрезку?*
б) Тот же вопрос для четырех равных выпуклых многоугольников.

а) **Ответ**: существуют.
См., например, рисунок 1.
Замечание. Пяти многоугольников с указанным свойством не существует, иначе полный граф с 5 вершинами был бы планарным [3], что неверно.

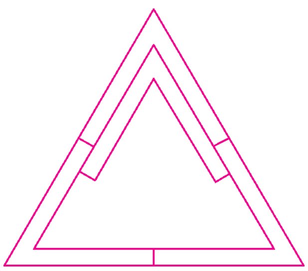


Рис. 1

б) **Ответ**: не существуют.
Предположим, что такие многоугольники P_1, P_2, P_3, P_4 нашлись. Отметим внутри многоугольника P_i точку B_i. Кроме того, отметим внутри общего отрезка многоугольников P_i и P_j точку A_{ij} (мы будем считать, что $A_{ij} = A_{ji}$); легко понять, что эта точка не может принадлежать другим многоугольникам.
Соединим теперь каждую точку B_i с точками A_{ij}. Полученные отрезки, идущие из точки B_i, лежат внутри P_i (здесь используется выпуклость многоугольников); значит, проведенные отрезки могут пересекаться только по общему концу (рис.2). Тогда некоторые из них образуют многоугольник Q, внутри которого лежат все остальные проведенные отрезки. Ясно, что при обходе контура Q точки B_i и A_{ij} чередуются, при этом A_{ij} лежит между точками B_i и B_j.

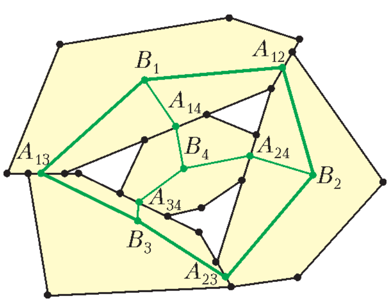


Рис. 2

Покажем, что на контуре Q лежат ровно три из точек B_i. Действительно, если их там не больше двух (скажем, точки B_3 и B_4 лежат внутри Q), то на Q, кроме точек B_1 и B_2, может попасть только точка A_{12}, и замкнутого контура не получится. Если же на контуре Q лежат все точки B_i (скажем, в порядке $B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_1$), то тогда ломаные $B_1A_{13}B_3$ и $B_2A_{24}B_4$ должны пересечься внутри Q (рис .3), что невозможно.

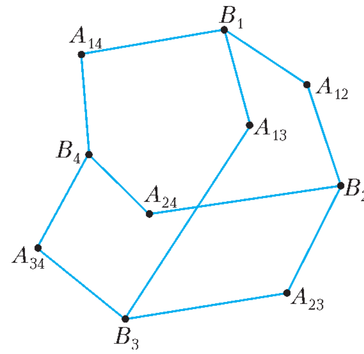


Рис. 3

Итак, пусть на контуре Q лежат точки B_1, B_2, B_3, а B_4 лежит внутри; тогда контур Q есть $B_1A_{12}B_2A_{23}B_3A_{31}$. Значит, и весь многоугольник P_4 лежит внутри Q, ибо он не пересекает контур Q. Более того, P_4 лежит внутри треугольника $A_{12}A_{23}A_{31}$, иначе какая-то внутренняя точка многоугольника P_4 должна попасть в один из треугольников $B_1A_{12}A_{13}$, $B_2A_{12}A_{23}$, $B_3A_{23}A_{31}$; но эти треугольники лежат в P_1, P_2, P_3 соответственно (здесь снова используется выпуклость).
Итак, P_4 лежит внутри треугольника $A_{12}A_{23}A_{13}$, причем вершины треугольника лежат вне многоугольника. Как известно, наибольший отрезок, лежащий внутри треугольника, – это его наибольшая сторона. Значит, все отрезки между точками P_4 короче длиннейшей стороны треугольника $A_{12}A_{13}A_{23}$ (пусть это $A_{12}A_{13}$); но отрезок $A_{12}A_{13}$ лежит в P_1. Из равенства многоугольников получаем, что и в P_4 должен найтись отрезок той же длины – противоречие.

И.Богданов, С.Маркелов

М2175. *Пусть S – множество из n действительных чисел, лежащих в отрезке $[0;\ 1]$ ($n \ge 1$). Для некоторого k ($0 < k < n$) k-элементное подмножество A множества S называется хорошим, если разность между средним арифметическим k чисел, лежащих в A, и средним арифметическим $n - k$ чисел из S, не лежащих в A, не превосходит $\dfrac{n}{2k(n-k)}$. Докажите, что среди всех k-элементных подмножеств множества S доля хороших подмножеств составляет не менее $\dfrac{2}{n}$.*

Положим $l = n - k$, $\alpha = \dfrac{n}{2k(n-k)} = \dfrac{n}{2kl}$. Через $\overline{A}$ будем обозначать множество всех чисел из S, не принадлежащих A. Для каждого k-элементного подмножества $A \subset S$ положим $r(A) = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{x_i \in A} x_i - \dfrac{1}{l}\sum\limits_{x_j \in \overline{A}} x_j$. Заметим, что подмножество хорошее тогда и только тогда, когда $|r(A)| \le \alpha$.
Каждой перестановке $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ поставим в соответствие n подмножеств $A_i = \{y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+k-1}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (здесь и далее считаем $y_{n+j} = y_j$ и $A_{n+j} = A_j$).
Лемма. *Среди подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, хотя бы два – хорошие подмножества.*
Доказательство леммы. Выберем t и s, так что

$$r(A_t) = \max\{r(A_1), \ldots, r(A_n)\},$$

$$r(A_s) = \min\{r(A_1), \ldots, r(A_n)\};$$

[2] *Это можно заметить и без выкладок, нарисовав на комплексной плоскости корни шестой степени из 1 – вершины правильного шестиугольника.*
[3] *Граф называется планарным, если его можно нарисовать на листе бумаги так, что ребра не пересекаюся нигде, кроме вершины.*

без ограничения общности считаем, что $s < t$. Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} r(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(k \cdot \frac{1}{k} - l\right) y_i = 0$, в частности $A_t \geq 0$, $A_s \leq 0$. Оценим разность между соседними $r(A_i)$:

$$\left| r(A_{i+1}) - r(A_i) \right| = \left| \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)(y_{i+k} - y_i) \right| \leq \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) = 2\alpha .$$

Рассмотрим случаи.

Если $r(A_s) < -\alpha < \alpha < r(A_t)$, то среди множеств $A_s, A_{s+1}, \ldots, A_{t-1}$ хотя бы одно хорошее, и среди множеств $A_t, A_{t+1}, \ldots, A_{s-1}$ хотя бы одно хорошее. Если $-\alpha \leq r(A_s) \leq r(A_t) \leq \alpha$, то A_t и A_s – хорошие. Если $r(A_s) < -\alpha \leq r(A_t) \leq \alpha$, то $r(A_{t'})$ положительно для некоторого $t' \neq t$ (так как $\sum_{i=1}^{n} r(A_i) = 0$); следовательно A_t и $A_{t'}$ – хорошие. Случай $-\alpha \leq r(A_s) \leq \alpha < r(A_t)$ аналогичен предыдущему.

Лемма доказана.

Рассмотрим все $n!$ перестановок $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и к каждой из них применим лемму. Фиксированное k-элементное подмножество A соответствует в точности $nk!l!$ перестановкам $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (так как y однозначно определяется следующими тремя параметрами: номер $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, для которого $A = \{y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+k-1}\}$; перестановка чисел $(y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+k-1})$, принадлежащих множеству A; перестановка чисел $(y_{i+k}, y_{i+k+1}, \ldots, y_{i-1})$, принадлежащих множеству $\overline{A}$). Следовательно, количество хороших k-элементных подмножеств не меньше чем $2 \cdot \frac{n!}{nk!l!} = \frac{2}{n} C_n^k$, что и требовалось установить.

А.Бадзян

Ф2175. *Шайба скользит по горизонтальной поверхности, сила трения о которую пропорциональна квадрату скорости шайбы. Начальная скорость шайбы упала вдвое через время T после начала движения. За какое время скорость упадет еще втрое?*

Ускорение шайбы отрицательно. По условию,

$$\Delta v = -kv^2 \Delta t , \text{ или } \frac{\Delta v}{v^2} = -k\Delta t .$$

Преобразуем выражения и получим

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \Delta(kt) .$$

При такой связи между приращениями величин $1/v$ и kt разность между ними должна все время оставаться постоянной, т.е.

$$\frac{1}{v} - kt = C .$$

Пусть при $t = 0$ скорость составляла v_0, тогда легко найти C:

$$\frac{1}{v_0} - k \cdot 0 = C , \quad C = \frac{1}{v_0} .$$

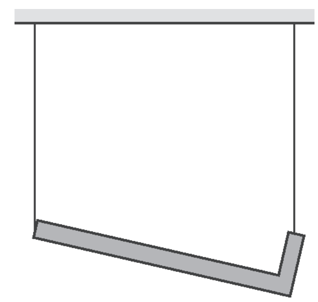
Теперь учтем, что при $t = T$ скорость упала вдвое, а при $T + T_1$ – еще втрое, т.е. до $v_0/6$, и сразу найдем

$$T_1 = 4T .$$

Итак, нужно подождать еще $4T$.

А.Зильберман

Ф2176. *Конструкция в виде буквы Г (см. рисунок) сделана из проволоки постоянного сечения, угол прямой, длина короткого куска в 4 раза меньше, чем длинного. Нити, на которых висит конструкция, вертикальны и одинаковы по длине. Найдите отношение сил натяжения этих нитей.*

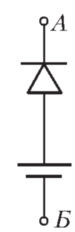


Из условия следует, что концы изогнутой проволоки находятся на одной высоте, тогда для угла наклона длинного отрезка проволоки к горизонту получаем $\alpha = \operatorname{arctg} 0,25$. Центр тяжести проволоки находится на отрезке, соединяющем центры тяжести отрезков проволоки – на средней линии соответствующего треугольника. Если обозначить расстояния (по горизонтали) от точек подвеса до центра тяжести L_1 и L_2 и найти их отношение (нам поможет геометрия), то отношение сил натяжения нитей будет равно

$$T_1 : T_2 = L_2 : L_1 \approx 0,75 .$$

З.Рафаилов

Ф2182. *К последовательно соединенным катушке индуктивностью 1 Гн и конденсатору емкостью 1 мкФ подключают источник (см. рисунок), содержащий батарейку напряжением 1 В и идеальный диод. Через секунду после этого источник отключили от контура и подключили вновь, поменяв полярность (поменяли местами выводы А и Б), еще через секунду снова поменяли полярность – и так 100 раз. Найдите напряжение конденсатора через секунду после последнего переключения. Элементы цепи считать идеальными.*



После первого подключения источника конденсатор начнет заряжаться, вскоре его напряжение достигнет напряжения батарейки, но ток при этом не прекратится, несмотря на наличие диода, – пока катушка обладает запасом энергии, ее ЭДС индукции обеспечит протекание тока в цепи. Ток через катушку упадет до нуля через половину периода колебаний контура, т.е. намного раньше, чем кончится отведенная секунда. Далее ток в цепи отсутствует, и заряд конденсатора не изменяется до самого переключения источника. После этого диод откроется (напряжение конденсатора превышает напряжение батарейки и приложено в такой полярности, что диод откроется). Конденсатор будет заряжаться опять, пока ток через катушку не станет нулевым. Полярность конденсатора при этом изменится на противоположную.

Обозначим через U_N напряжение конденсатора в конце N-й секунды и рассмотрим процесс, происходящий в следующую секунду. Пусть Q – заряд, протекший через батарейку за эту секунду, тогда напряжение конденсатора за это время увеличится на Q/C:

$$U_{N+1} = U_N + \frac{Q}{C}.$$

Элементы цепи идеальны, поэтому энергия конденсатора за эту секунду увеличится на QU_0 (батарейка совершает работу, а энергия катушки в интересующие нас моменты нулевая):

$$\frac{CU_{N+1}^2}{2} = \frac{CU_N^2}{2} + QU_0.$$

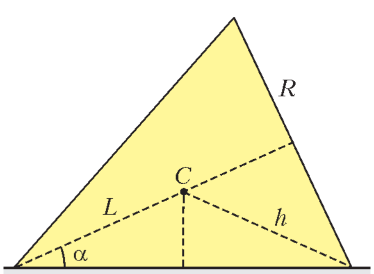
После преобразований получаем, что напряжение конденсатора каждый раз увеличивается на $2U_0$. После 100 переключений получится

$$U = 200U_0 = 200\text{В}.$$

Интересно, что по похожему закону будет возрастать напряжение конденсатора, если заменить батарейку с диодом источником переменного напряжения резонансной частоты. Собственно, его мы и изображали, меняя полярность батарейки в моменты нулевого тока катушки.

У.Былов

Ф2183. *На горизонтальном столе лежит на боку однородный конус массой m с радиусом основания R и углом при вершине 2α. Для того чтобы медленно поставить конус на вершину в положение, при котором его ось вертикальна, нужно совершить работу A. Какую минимальную работу нужно совершить для того, чтобы из исходного положения поставить конус на основание?*



Пусть расстояние от вершины конуса до его центра масс C равно L (см. рисунок). Тогда минимальная работа, которую нужно совершить для того, чтобы медленно поставить конус на вершину в положение, при котором его ось вертикальна, равна

$$A = mg(L - L\sin\alpha).$$

Для того чтобы из исходного положения поставить конус на основание, нужно поднять центр масс конуса на высоту

$$\Delta h = h - L\sin\alpha = \sqrt{(R\operatorname{ctg}\alpha - L)^2 + R^2} - L\sin\alpha,$$

после чего он опрокинется и встанет на свое основание. Выражая из первого уравнения расстояние L и подставляя его во второе уравнение, находим искомую работу:

$$A_1 = mg\Delta h = \\ = mgR\sqrt{1 + \left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{A}{mgR(1-\sin\alpha)}\right)^2} - A\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

А.Якута

Ф2184. *Однородная цепочка закреплена одним концом на вершине гладкой сферической поверхности радиусом R, длина цепочки $L = \pi R/3$ (рис.1). Верхний конец цепочки освобождают. С каким ускорением (по модулю) будет двигаться сразу после освобождения каждый элемент цепочки? В каком месте цепочки сила натяжения сразу после освобождения будет максимальной?*

Рассмотрим малый элемент цепочки длиной $\Delta L = R\Delta\varphi$ и массой $\Delta m = \rho\Delta L = \rho R\Delta\varphi$ соответственно (здесь ρ – линейная плотность цепочки). На него действуют силы

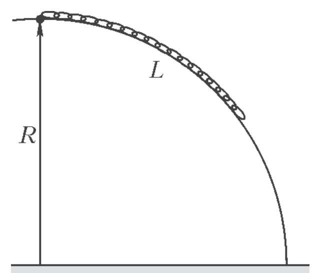


Рис. 1

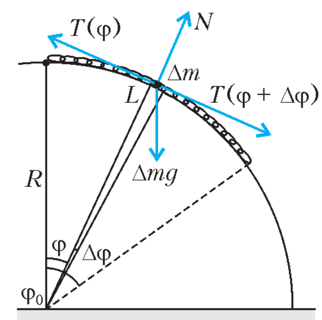


Рис. 2

натяжения $\vec{T}(\varphi + \Delta\varphi)$ и $\vec{T}(\varphi)$, сила реакции опоры (равная по величине силе нормального давления) $\vec{N}$ и сила тяжести $\vec{F}_\text{т} = \Delta m\vec{g}$ (рис.2). Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную:

$$\Delta m a_\tau = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) + \Delta mg\sin\varphi.$$

Касательное ускорение a_τ всех элементов цепочки одинаково, а нормальное ускорение равно нулю, так как сразу после освобождения все ее элементы имеют нулевую скорость. Если просуммировать левые и правые части уравнения, выражающего второй закон Ньютона, по всей длине цепочки и принять во внимание, что на свободных концах натяжение обращается в ноль, то получим

$$\rho Ra_\tau\sum\Delta\varphi = \rho Rg\sum\sin\varphi\Delta\varphi.$$

Силы натяжения исключились в соответствии с третьим законом Ньютона, так как это внутренние силы системы. Переходя к пределу $\Delta\varphi \to 0$, найдем

$$a_\tau\frac{L}{R} = g\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi d\varphi = g(1 - \cos\varphi_0),$$

где $\varphi_0 = L/R$, или

$$a_\tau = g\frac{R}{L}(1 - \cos\varphi_0) = g\frac{R}{L}\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right) = \frac{3}{2\pi}g.$$

При ответе на второй вопрос следует учесть, что в том сечении, где сила натяжения T цепочки наибольшая, $\Delta T = T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) = 0$. Обозначим положение малого элемента цепочки, находящегося в месте с наибольшим натяжением, через $\varphi_{\max}$. Ускорение этого элемента создается только проекцией силы тяжести на касательную:

$$a_\tau = g\sin\varphi_{\max} = g\frac{R}{L}\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right).$$

Отсюда находим

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{R}{L}\left(1-\cos\frac{L}{R}\right) = \frac{3}{2\pi} \approx 0,5, \text{ и } \varphi_{\max} \approx 30^\circ .$$

Таким образом, точка, в которой сила натяжения максимальна, находится приблизительно в середине цепочки.

В.Плис

Ф2185. *В длинном теплоизолированном цилиндрическом сосуде находится некоторое количество криптона (одноатомный газ, его молярная масса M = = 84 г/моль) при температуре T = 200 К и давлении p = 0,1 Па. Объем сосуда уменьшают на 1%, быстро сдвигая поршень. Скорость движения поршня v = = 1000 м/с. Оцените температуру газа после остановки поршня и установления давления в сосуде.*

При заданной температуре газа скорости атомов невелики:

$$\sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3\cdot 8,3\cdot 200}{0,084}}\text{ м/с} \approx 240\text{ м/с} .$$

При большой скорости поршня можно считать, что он налетает на покоящиеся частицы, и они отскакивают при абсолютно упругом ударе с удвоенной скоростью поршня. Длина свободного пробега при таком низком давлении большая, поэтому удары поршня и частиц можно считать однократными. В результате 1% атомов криптона после остановки поршня имеет скорости 2000 м/с, а энергии остальных атомов соответствуют начальной температуре. Энергия быстрого атома в $(2000/240)^2 \approx 69$ раз больше, суммарная же энергия больше в $(0,99+0,01\cdot 69) \approx 1,68$ раз. После выравнивания средних энергий частиц можно говорить об установившейся температуре газа:

$$T_{\text{уст}} \approx 200\text{ К}\cdot 1,68 \approx 340\text{ К} .$$

А.Повторов

Ф2186. *Электрическая цепь состоит из пяти резисторов и двух идеальных амперметров (рис.1). Сопротивления резисторов R_0, R_1 и R_2 заданы, а сопротивление R_3 неизвестно. Найдите показание амперметра A_2, если известна сила тока I_1, протекающего через амперметр A_1.*

Запишем закон Ома для участка цепи BC (рис.2):

$$I_0R_0 + I_1R_1 = U = I_2R_2 + I_3R_0 .$$

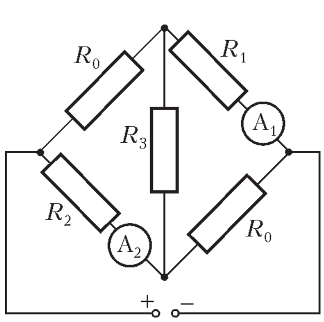


Рис. 1

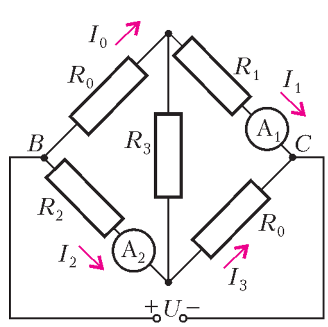


Рис. 2

Сила тока, протекающего через источник, равна

$$I = I_0 + I_2 = I_1 + I_3 .$$

Преобразуем полученные уравнения к виду

$$(I_0 - I_3)R_0 = I_2R_2 - I_1R_1 ,$$

$$I_0 - I_3 = I_1 - I_2 .$$

Отсюда найдем

$$I_2 = I_1\frac{R_0+R_1}{R_0+R_2} .$$

В.Слободянин

Ф2187. *Тонкое кольцо радиусом R заряжено зарядом Q, равномерно распределенным по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная непроводящая нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда γ. Найдите модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.*

Для определенности будем считать, что кольцо и нить заряжены положительно (это не нарушит общности рассуждений, так как нас интересует модуль силы, а в случае если заряды будут разноименными, изменится только направление этой силы). При таком выборе знаков зарядов нить будет отталкиваться от кольца.

Для решения задачи применим следующий прием. Мысленно отрежем от дальнего конца нити (который находится бесконечно далеко от кольца) маленький элемент длиной Δx с зарядом $\Delta q = \gamma\Delta x$ и приклеим ко второму концу нити, который находится в центре кольца. Данная процедура эквивалентна тому, что нить переместилась в сторону кольца на малое расстояние Δx (естественно, оставшись при этом полубесконечной). При таком перемещении нити электростатическое поле, создаваемое кольцом, совершило работу

$$\Delta A = -F\Delta x ,$$

где F – искомая сила отталкивания кольца и нити (знак «минус» появился потому, что направление «смещения» нити противоположно направлению этой силы). С другой стороны, эта же работа сил электростатического поля кольца равна

$$\Delta A = \Delta q\,(\varphi_\infty - \varphi_0) ,$$

где $\varphi_\infty = 0$ и $\varphi_0 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ – потенциалы поля кольца в бесконечно удаленной от него точке (откуда переносился заряд) и в центре кольца (куда переносился заряд). С учетом всех записанных формул получаем

$$\Delta A = -F\Delta x = -\frac{Q\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{Q\gamma\Delta x}{4\pi\varepsilon_0 R} ,$$

откуда находим

$$F = \frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0 R} .$$

Заметим, что задачу можно решить и «в лоб» – с помощью простого интегрирования.

П.Поляков

Ф2188. *В свободном пространстве на окружности радиусом R_0 в вершинах вписанного квадрата рас-*

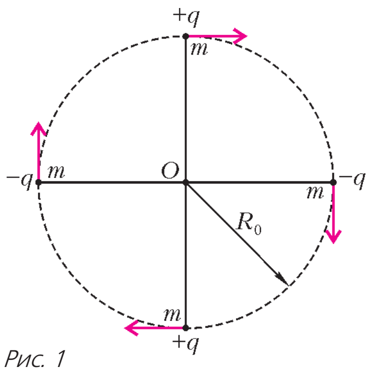


Рис. 1

положены четыре точечные массы m, две из них несут заряд +q, а две другие – заряд −q (рис.1). В начальный момент этим материальным точкам сообщают одинаковые по модулю скорости, направленные по касательным к окружности по часовой стрелке. Известно, что достигаемое в процессе движения минимальное расстояние от любой из точечных масс до центра O начальной окружности равно R_1 ($R_1 < R_0$). Считайте, что в любой момент времени заряды находятся в вершинах квадрата с центром в точке O. Действием гравитационных сил можно пренебречь. По какой траектории движется каждая из частиц? Определите время движения частицы из начального положения до положения с расстоянием R_1 до центра окружности.

В силу симметрии, все материальные точки будут двигаться по одинаковым траекториям, оставаясь в каждый момент времени на окружности некоторого переменного радиуса r в вершинах квадрата со стороной $a = \sqrt{2}r$.

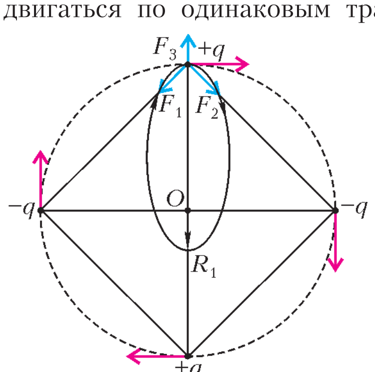


Рис. 2

Рассмотрим одну из материальных точек (рис.2). На нее со стороны остальных частиц действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$. По закону Кулона модули этих сил равны

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2r^2} \quad \text{и} \quad F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4r^2}.$$

Результирующая сила всегда направлена к центру (точка O), а ее модуль равен

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2r^2}\sqrt{2} - \frac{q^2}{4r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right).$$

Отсюда следует, что каждая из материальных точек движется так, как если бы из центра ее притягивал заряд, противоположный по знаку и по абсолютной величине равный

$$Q = q\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right).$$

Формула для $F(r)$ аналогична закону Кулона (или закону всемирного тяготения), так как $F(r) \sim 1/r^2$. Поэтому траектории точек – эллипсы с большой осью $R_0 + R_1$. Точка O находится в одном из фокусов этих эллипсов.

Теперь перейдем ко второму вопросу. Характерное время – это период T обращения по эллиптической орбите. Его можно найти из третьего закона Кеплера. Найдем сначала период T_0 обращения точечной массы m, движущейся под действием силы $F(r)$ по круговой орбите радиусом R_0:

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0}, \quad \frac{mv_0^2}{R_0} = F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right),$$

откуда

$$T_0 = \frac{2\pi}{q}\sqrt{4\pi\varepsilon_0\frac{4mR_0^3}{2\sqrt{2}-1}}.$$

По третьему закону Кеплера,

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0+R_1}{2R_0}\right)^3, \text{ и } T = T_0\left(\frac{R_0+R_1}{2R_0}\right)^{3/2}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для T_0 и учитывая, что из начального положения до положения с расстоянием R_1 до центра окружности частица движется время $\tau = T/2$, находим

$$\tau = \frac{\pi}{q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0\frac{m(R_0+R_1)^3}{2\sqrt{2}-1}}.$$

Х.Матвеев, М.Проскурин

ИНФОРМАЦИЯ

«Свободный полет» продолжается!

Благотворительный фонд «Новая мысль» объявляет конкурс «Свободный полет» на 2011 год.

Учитывая результаты и опыт проведения этого конкурса в 2010 году, решением Оргкомитета в Положение о проведении конкурса внесены некоторые изменения и уточнения. Они касаются структуры и общего объема наградного фонда, а также требований к представляемым на конкурс работам.

Призовые фонды в 2011 году составят:
для участников до 18 лет – 300000 руб.,
для возрастной группы до 35 лет – 600000 руб.

Объем работы (без титульного листа): не более 10 машинописных страниц, включая все необходимые приложения.

Срок приема работ: с 1 февраля до 15 апреля 2011года.

Более подробная информация и необходимые формальные дополнения к условиям проведения конкурса «Свободный полет» в 2011 году размещены на сайте Фонда «Новая мысль» novmysl.finam.ru и будут опубликованы в шестом номере журнала «Квант» за 2010 год.