

журнал©
Квант СЕНТЯБРЬ 2010 №5
ОКТАБРЬ 2010

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредитель —
Российская академия наук
Издатель —
ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

В.В.Козлов

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбиллин (заместитель главного
редактора), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан (заместитель главного
редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,
Я.Е.Шнайдер**

Товарный знак «Журнал «Квант»
является собственностью
ООО НПП ОО «Бюро Квантум»
© 2010, РАН,
журнал «Квант»

- 2 Инверсия в цилиндрических зеркалах метро. *В.Арнольд*
8 Темная энергия во Вселенной. *В.Рубаков*
16 Теоремы софиста Горгия и современная математика.
Д.Фон-Дер-Флаасс

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 7 «Небесные врата»

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 24 Задачи М2191–М2198, Ф2198–Ф2204
25 Решения задач М2169–М2175, Ф2175, Ф2176, Ф2182–Ф2188

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Цвет

К М Ш

- 34 Задачи
35 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
36 Как всегда, на высоте! *Г.Филипповский*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 40 О работе, точке приложения силы и точильном круге.
В.Птушенко
42 Увеличительная линейка. *В.Дроздов*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 43 О теплопередаче и не только. *А.Красночуб*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 47 Два этюда о динамике. *Е.Соколов*

ОЛИМПИАДЫ

- 50 Заключительный этап XXXVI Всероссийской олимпиады
школьников по математике
53 Заключительный этап XLIV Всероссийской олимпиады
школьников по физике
57 XIV Международный турнир «Компьютерная физика»
59 Московская студенческая олимпиада по физике 2010 года
60 Ответы, указания, решения

Информация (31, 52)
«Квант» улыбается (35)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Рубакова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

The McGraw-Hill Companies

Этот номер журнала «Квант» вышел
при финансовой поддержке компании
The McGraw-Hill Companies



В 2009 году в издательстве МЦНМО вышла книга В.И.Арнольда «Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора)». Одну из глав этой книги мы и предлагаем вашему вниманию — разумеется, с рисунками автора. В конце главы подробно рассказывается об инверсии и ее свойствах. Содержание этого раздела выходит за рамки школьной программы, но может оказаться полезным тому, кто захочет глубже разобраться в обсуждаемом вопросе.

Инверсия в цилиндрических зеркалах метро

В.АРНОЛЬД

ВСЕ ВИДЕЛИ СВОЕ ОТРАЖЕНИЕ В ПЛОСКОМ зеркале — отражение левши является правшой, но в остальном изображение сходно с прообразом.

Но кто видел свое отражение в кривом зеркале, тот знает, какое оно смешное.

Рассмотрим, для простоты, цилиндрическое зеркало. Спрашивается, как выглядят отражения различных предметов в нем?

Много цилиндрических зеркал (и стоящих вертикально цилиндров-стоек, и горизонтальных поручней) имеется в каждом вагоне метро. Изображения окружающего мира в этих цилиндрических зеркалах совершенно необычны. Каковы они?

Проще всего разобраться с отражением одного точечного источника света. Его отражение в цилиндрическом зеркале тесно связано с математической инверсией

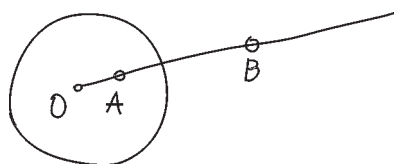


Рис.1. Инверсия переводит точку A в точку B

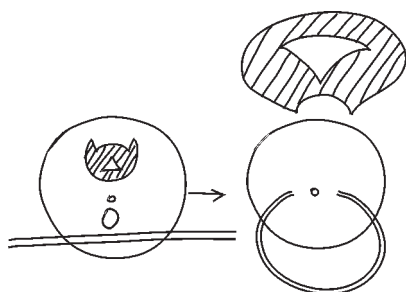


Рис.2. Инверсия кошки выводит ее из клетки, а инверсия прямой закругляет ее

— операцией, сопоставляющей каждой точке A евклидовой плоскости, на которой фиксирована окружность радиуса r с центром O , точку B , «симметричную относительно этой окружности», лежащую на том же выходящем из центра O луче, что и отражаемая точка A , но на тем большем расстоянии от центра O , чем ближе к центру была точка A (рис. 1, 2):

$$OA \cdot OB = r^2.$$

Каждый луч, выходящий из точки A и пересекающий заданную окружность, отражается от нее по закону «угол падения равен углу отражения» (рис.3).

Для плоского зеркала все лучи, выходящие из источника A отражаются в виде лучей, проходящих при продолжении в зазеркалье через одну и ту же

точку A^* . Получается такой же пучок лучей $\{A^*A'\}$, поэтому мы и видим отражение точки A в зазеркальной точке A^* (рис.4).

Для кривого зеркала прямолинейные лучи, отраженные в разных точках, уже не обязательно проходят через общую точку, даже если их продолжить за зеркало.¹

Чтобы в этом разобраться, достаточно разобрать какой-нибудь пример, например — отражение зеркалом-окружностью пучка параллельных лучей, приходящих из одной и той же бесконечно удаленной точки A .

Явные вычисления лучей, отраженных в различных точках кругового зеркала, не очень сложны (для знающих тригонометрию). Но нарисовать эти лучи еще проще (рис.5). Дуги CD и CD' имеют одинаковую длину (вследствие закона «угол падения равен углу

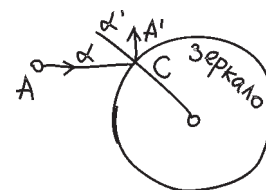


Рис.3. Отражение луча AC в виде луча CA' (углы α и α' равны)

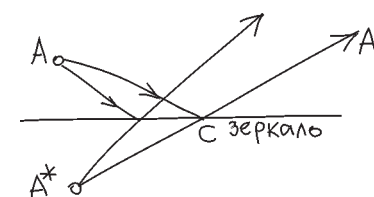
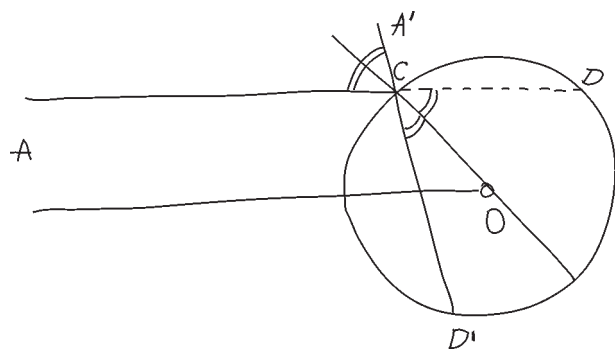


Рис.4. Отражение луча AC в виде луча CA' в прямом зеркале и точка A^* в зазеркалье

¹ Исключение — лучи, параллельные оси параболического зеркала, они собираются, после отражения в параболу, в одну точку.

Рис.5. Построение отраженного окружностью луча CA'

отражения» в точке отражения C). Это позволяет быстро построить отраженные лучи.

Нарисовав эти отраженные лучи достаточно аккуратно, я получил следующую картинку (рис.6).

Полученное однопараметрическое семейство отраженных прямых на плоскости имеет огибающую (пока-

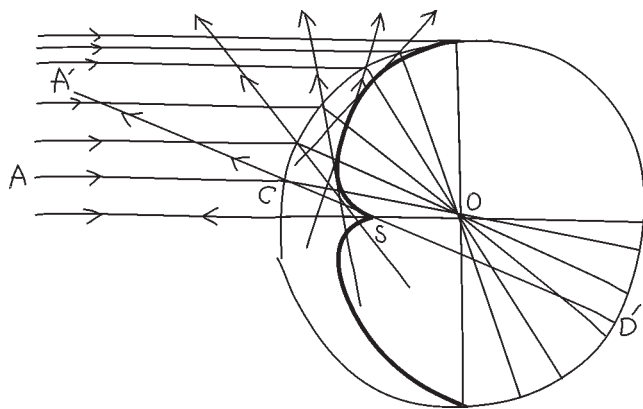


Рис.6. Семейство отраженных окружностью лучей, приходящих из бесконечности, и его огибающая кривая

занную на рис. 6 жирной линией). Это – кривая, в точках которой прямые отраженного семейства лучей пересекаются с бесконечно близкими отраженными прямыми того же семейства лучей. Эти прямые (продолженные отраженные лучи) касаются построенной огибающей кривой. Можно еще сказать, что эта кривая образована «фокальными точками» отраженного семейства лучей (фокальные точки в оптике – это точки пересечения бесконечно близких лучей семейства при их продолжении).

Огибающая семейства лучей называется каустикой («жгущей»), так как на ней свет семейства концентрируется (фокусируется), его энергия больше, чем в остальных местах. Именно при помощи каустики системы зеркал Архимед, согласно легенде, сжег вражеские корабли, осаждавшие Сиракузы.²

² Аристофан в «Облаках» приписывает Сократу еще более раннее использование каустик в деловых вопросах: он советует своему клиенту выбрать на заседании суда солнечное место и, купив в аптеке линзу, сжечь каустикой солнечных лучей свое долговое обязательство, демонстрируемое суду противником. Аристофан, правда, указывает, что эта прикладная математика и привела Сократа к смертельному приговору сограждан.

Во всяком случае, большая часть отраженных лучей идет так, как если бы они исходили из точек каустики, так что изображение нашей исходной бесконечно удаленной точки A будет казаться размазанной вдоль каустики линией, а не точкой.

Дело, однако, обстоит сложнее, потому что яркость изображения вдоль каустики вовсе не постоянна – некоторые ее места ярче (и именно их использовал для своей системы лучей Архимед).

А именно, каустика нашего семейства отраженных лучей рисунка 6 – не гладкая кривая: она имеет особую точку S (нетрудно посчитать, что она делит пополам радиус).

Вблизи этой точки семейство (продолженных) лучей концентрируется еще сильнее, чем даже в остальных точках каустики.³ Поэтому, хотя изображение светящейся (бесконечно удаленной) точки A и размазано вдоль каустики, особенно ярко светится именно ее особая точка S (а остальные точки недостаточно внимательный зритель может и не заметить).

Вследствие всего этого наблюдаемое экспериментатором изображение точки A будет не линией, а единственной точкой S – точкой наибольшей концентрации отраженных лучей, продолженных в зазеркалье.

Тригонометрические вычисления, которые я оставляю читателю, подтверждают и эти выводы, и их устойчивость: например, для источника света A , расположенного в другом месте, тоже получается каустика продолженных в зазеркалье лучей с особой точкой возврата, которая и воспринимается наблюдателем как изображение A^* точки A в кривом зеркале.

Эта точка A^* , как и S в рассмотренном выше примере с бесконечно удаленной точкой A , лежит на том же луче с началом в центре O зеркала, что и отражаемая точка A . Но положение этой точки на соответствующем радиусе окружности зависит от расстояния точки A от центра окружности (когда это расстояние бесконечно, отраженная точка делит радиус пополам, а когда точка A лежит на отражающей окружности, точка A^* вырождается в A).

Вычисление положения изображения A^* на луче OA при данном расстоянии $OA = X \cdot R$ приведено на рисунке 7.

Радиусы отражающей окружности имеют длины

$$OR = OC = R.$$

Малый центральный угол α доставляет катеты треугольника OCP :

$$OP = R \cos \alpha, \quad CP = R \sin \alpha.$$

Прямоугольный треугольник ACP доставляет асимптотическое выражение малого угла φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{CP}{AP} = \frac{R \sin \alpha}{R(X - \cos \alpha)} \sim \frac{\alpha}{X - 1}, \quad \varphi \sim \frac{\alpha}{X - 1}.$$

³ Можно посчитать, что эта особенность – полукубическая точка возврата (в окрестности которой каустика задается в подходящей гладкой системе криволинейных координат уравнением $y^2 = x^3$). Такая особенность типична (для систем лучей общего положения) и устойчива (не исчезает при малом шевелении семейства), ее и использовали Сократ и Архимед.

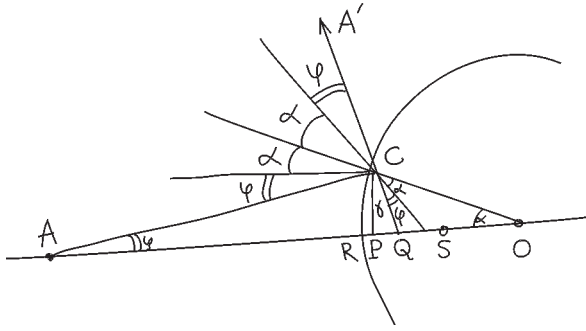


Рис.7. Пересечение в зеркале бесконечно близких прямых AR и AC

Прямоугольный треугольник OCP доставляет для угла PCQ выражение $\gamma = (\pi/2) - (\varphi + 2\alpha)$, $\varphi + 2\alpha \sim \frac{2X-1}{X-1} \alpha$.

Прямоугольный треугольник CPQ доставляет для катета против угла γ выражение

$$PQ = CP \operatorname{tg} \gamma = CP \frac{\cos(\varphi + 2\alpha)}{\sin(\varphi + 2\alpha)}$$

Найденные выше асимптотики величин CP и $\varphi + 2\alpha$ доставляют для поведения расстояния от P до Q при $\alpha \rightarrow 0$ выражение

$$PQ \sim \frac{R \sin \alpha}{\frac{2X-1}{X-1} \alpha} \rightarrow R \frac{X-1}{2X-1}$$

Расстояние от отраженной точки Q до середины S радиуса OR стремится при этом к

$$QS = PS - PQ \rightarrow \frac{R}{2} - R \frac{X-1}{2X-1} = \frac{R}{2(2X-1)}$$

Отражаемая точка A отстоит от середины S радиуса OR на расстояние

$$AS = AO - SO = R(X-1/2) = \frac{2X-1}{2} R$$

Мы заключаем, что расстояния от точки S до отражаемой точки A и до ее отражения Q взаимно обратны:

$$QS \cdot AS = R^2/4$$

Тем самым мы доказали следующий (удивительный) результат.

Наблюдатель видит в цилиндрическом зеркале инверсию окружающего мира относительно вдвое более тонкого цилиндра (рис.8), касающегося оси отражающего цилиндра (в наших плоских обозначениях – инверсию в окружности с центром S радиуса R/2).



Рис.8. Отражение в цилиндрическом зеркале – инверсия в (жирной) окружности

Можно было бы подумать, что, глядя на цилиндрическое зеркало (например, на поручни в метро), мы увидим инверсное изображение окружающих предметов.

Что этого не может быть, ясно уже из описания расположения инвертирующей окружности (или цилиндра) по отношению к отражающей окружности на плоскости (или цилиндрическому зеркалу в пространстве). А именно, инвертирующий цилиндр направлен от оси отражающего цилиндра в определенном направлении, в то время как, вследствие симметрии отражающего цилиндра относительно вращений вокруг его оси, все направления ухода от оси вращения должны быть равноправными и никакое из них не может оказаться предпочтительным.

В действительности приведенные выше вычисления устанавливают, что отражение каждого источника света является результатом применения описанной инверсии к точке источника только для точек луча, проходящего через центр отражающей окружности и глаз наблюдателя (формально это выражалось в предположении в вычислении малости угла φ).

На этом центральном луче зрения изображения A^* , B^* , C^* , D^* точек A, B, C, D (рис.9) действительно

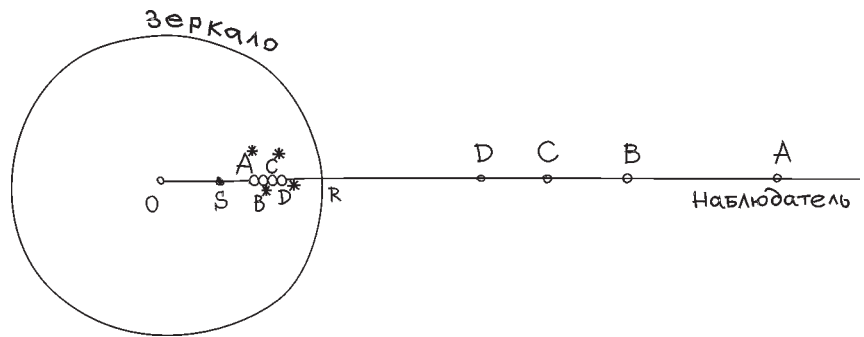


Рис.9. Изображения A^* , B^* , C^* , D^* точек A, B, C, D центрального луча

инверсны изображаемым точкам, поэтому и вблизи центрального луча зрения отражение приблизительно описывается инверсией. Но по мере удаления от центрального луча зрения отражение описывается инверсиями относительно все более повернутых инвертирующих окружностей, так что в целом результат к одной инверсии не сводится.

Добавление. О свойствах инверсии

Хотя многие читатели, вероятно, знают об этих замечательных фактах, я кратко опишу их здесь.

Теорема. Инверсия переводит окружности, не проходящие через ее центр, в окружности, а проходящие через центр – в прямые (рис.10).

Доказательство второго утверждения особенно просто, когда окружность C пересекает инвертирующую окружность (рис.11).

Прямоугольные треугольники OB^*A^* и OAB подобны, поэтому $OB^*/OA^* = OA/OB$, так что $OA \cdot OA^* = OB \cdot OB^*$.

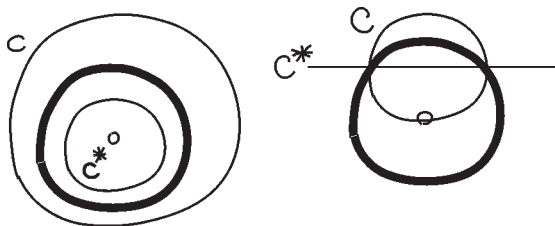


Рис.10. Инверсия переводит окружность c в окружность c^* , а окружность C в прямую C^*

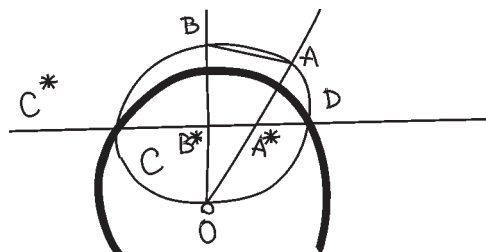


Рис.11. Инверсия окружности C , проходящей через центр O инвертирующей (жирной) окружности

Для случая $A = D$ мы находим $OB \cdot OB^* = R^2$. Это доказывает совпадение образа окружности C при инверсии с прямой C^* (соединяющей обе точки пересечения окружности C с инвертирующей окружностью).

Случай, когда окружность C слишком мала, чтобы пересечь инвертирующую окружность, сводится к разобранному случаю растяжением (гомотетией с центром O). Когда окружность C подвергается такой гомотетии, растягиваясь в α раз, ее образ при инверсии тоже подвергается гомотетии с центром O , а именно сжатию в α раз.

Поэтому сжатый образ – прямая, а значит, и до сжатия образ был прямой (только не пересекающей инвертирующую окружность).

Утверждение теоремы об образе окружности c , не проходящей через центр инверсии, особенно легко доказать в том случае, когда эта окружность c не содержит в ограниченном ею круге центр инверсии O (рис.12).

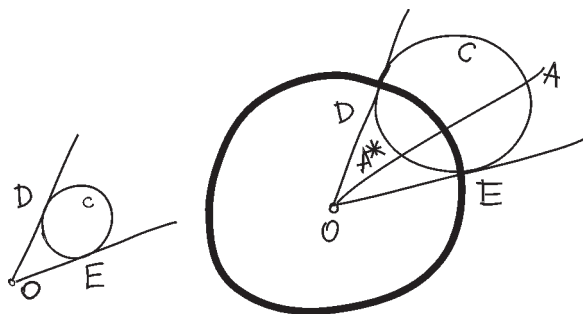


Рис.12. Инверсия окружности c , не окружающей центр инверсии O

В этом случае к окружности c можно провести из точки O две касательные. Их длины одинаковы: $OD = OE$. Растягивая (или сжимая) плоскость гомотетией с центром O , мы можем превратить окружность c в гомотетичную специальную окружность, для которой длины касательных $OD = OE = R$ совпадают с длиной

R радиуса инвертирующей окружности (так что специальная окружность будет пересекать инвертирующую жирную окружность в точках D и E под прямыми углами).

По теореме о секущей OA^*A специальной окружности c мы находим

$$OA^* \cdot OA = OD^2 = R^2.$$

Это тождество означает, что точки A и A^* специальной окружности c переходят при нашей инверсии друг в друга, так что образ специальной окружности совпадает с ней самой.

Возвращаясь к исходной окружности сжатием специальной окружности, мы видим, что образ этой сжатой (исходной) окружности при инверсии получается из специальной окружности гомотетичным растяжением. Значит, этот образ c^* – тоже окружность.

В случае когда окружность c окружает центр O , теорема тоже верна. Но я не знаю столь простого доказательства.

Замечание. Специальная окружность ортогональна инвертирующей.⁴ При инверсии каждая из них переходит в себя. Поэтому угол между ними сохраняется при инверсии.

Оказывается, преобразование инвертирования сохраняет и углы между любыми двумя кривыми (с точностью до знака). Это видно, например, из рисунка 13, где окружность C , проходящая через центр инверсии O , пересекает инвертирующую окружность в точке D (и переходит при инверсии в прямую DE).

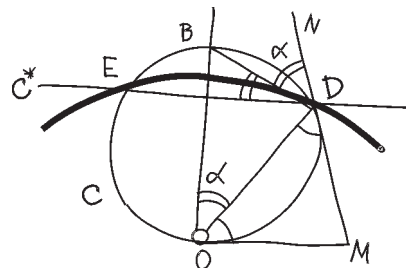


Рис.13. Сохранение угла (с инвертирующей окружностью) при инверсии

Нормали направлений OD (к инвертирующей окружности) и OB (к инверсированной кривой C^*) в точке пересечения D образуют угол $\alpha = \angle DOB$.

Касательные к инвертируемой окружности в точках O и D образуют равнобедренный треугольник, поэтому углы DOM и ODM равны $\pi/2 - \alpha$.

Касательная DB к инвертирующей окружности в точке D проходит через конец B диаметра OB инвертируемой окружности C , так как угол BDO (между касательной и радиусом инвертирующей окружности) прямой.

Следовательно, угол BDN (между касательными к инвертирующей и инвертируемой окружностям в точке их пересечения D) – такой же, как угол $DOB = \alpha$

⁴ Другими словами, пересекается с ней под прямым углом. Говорят, что кривые пересекаются в данной точке под углом α , если касательные к ним в этой точке пересекаются под углом α . (Прим. ред.)

между направлениями, перпендикулярными к инвертирующей и проинвертированной кривой C^* (он равен $\pi - \pi/2 - (\pi/2 - \alpha) = \alpha$).

Итак, углы между инвертируемой и проинвертированной окружностями, с одной стороны, и инвертирующей окружностью, с другой – в точке D одинаковы.

Из этого следует, что инверсия сохраняет углы всех проходящих через точку D кривых с инвертирующей окружностью, а значит, она сохраняет и угол между любыми двумя кривыми, проходящими через точку D .

Разумеется, сохраняются здесь неориентированные углы: инверсия, подобно обычному отражению, меняет ориентацию отображаемой плоскости и переводит «положительные» углы в «отрицательные» (того же модуля).

Наши рассуждения доказывают сохранение (неориентированных) углов в точках инвертирующей окружности. Но любую (отличную от O) точку плоскости можно поместить на эту окружность (радиуса R) надлежащей гомотетией (с центром O).

Гомотетии сохраняют углы, поэтому такими подобными растяжениями и сжатиями плоскости мы выведем сохранение углов пересечения любых кривых в любой (отличной от центра инверсии O) точке из их сохранения в точках инвертирующей окружности, где это сохранение углов уже доказано выше.

Преобразования, сохраняющие углы, называются конформными. Таким образом, инверсия – конформное преобразование плоскости (с выкинутой точкой O), меняющее ориентации.

Задача. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – любой многочлен, рассматриваемый как отображение (в себя) евклидовой плоскости $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ с декартовыми ортонормированными координатами (x, y) для точки $z = x + iy$.

Докажите, что отображение f конформно (в любой некритической точке многочлена f , т.е. там, где его производная отлична от 0).

Решение. Начните с линейного многочлена и используйте затем формулу Тейлора для сведения любого отображения к его (линейному) дифференциалу.

В этих терминах инверсия задается формулой

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}},$$

где $\bar{z} = x - iy$, и ее конформность вытекает из дифференцируемости:

$$\frac{d(1/\bar{z})}{dz} = -\frac{1}{z^2}.$$

Задача. Конформно ли отображение, переводящее точку $z \in \mathbb{C}$ в z^2 , во всех точках плоскости?

Решение. Перпендикулярные прямые – вещественная и мнимая оси $\{y = 0\}$ и $\{x = 0\}$ плоскости $\mathbb{C} = \{z\}$ – переходят в полуоси положительных и отрицательных значений z^2 , которые вовсе не ортогональны.

Это нарушение конформности сильно искажает вид отображаемых фигур (рис.14).

Инверсия – конформное преобразование, поэтому отражаемые фигуры более похожи на себя.

Задача. Образуют ли преобразования инверсии (с разными инвертирующими окружностями) группу?

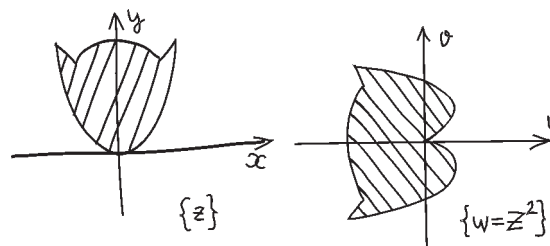


Рис.14. Неконформное преобразование кошки сделало ее гладкий подбородок негладким

Решение. Инверсия меняет ориентации, а ориентаций плоскость имеет только две. Поэтому произведение двух инверсий (сохраняющее ориентацию плоскости) не может быть инверсией.

Сохраняющие ориентацию произведения инверсий (имеющие четное число сомножителей) уже образуют группу. Это – группа «дробно-линейных» преобразований

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

фундаментальная для геометрии Лобачевского (где f с вещественными a, b, c, d и $ad - bc = 1$ образуют «группу движений в модели Пуанкаре»).

В этой модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, в отличие от модели Кэли–Клейна в круге, обсуждавшейся выше, роль прямых играют не все прямые Евклида, а все прямые и окружности, перпендикулярные «абсолюту» $\text{Im } z = 0$ (рис.15).



Рис. 15

Замечательным свойством этой модели является то, что углы Лобачевского в этой модели равны евклидовым углам между соответствующими кривыми верхней полуплоскости.

Удивительно еще и то, что обе модели – Пуанкаре и Кэли–Клейна – эквивалентны: они доставляют просто разные карты одной и той же плоскости Лобачевского.

Задача. Найдите диффеоморфизм верхней полуплоскости на внутренность единичного круга, переводящий модель Пуанкаре в модель Кэли–Клейна.

«НЕБЕСНЫЕ ВРАТА»

«Небесные врата» (Cloud Gate) – так называется скульптура, установленная в Чикаго, в центре парка Миллениум. Жители города называют скульптуру «Боб» или «Капля» – и правда, на каплю она похожа



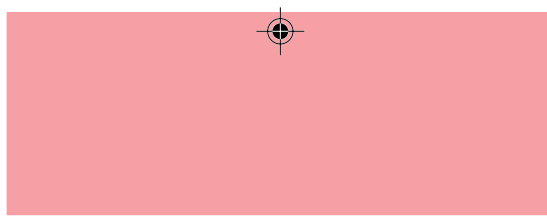
больше всего. Эллипсоидальная «Капля» изготовлена из пластин нержавеющей стали и отполирована до зеркальной гладкости. Она лежит на арках четырехметровой высоты, представляющих собой своеобразные ворота.

Автор «Небесных врат» – британский скульптор Аниш Капур. По его словам, он хотел соединить в своем произведении небо и горизонт Чикаго, «чтобы кто-то видел в моей скульптуре отражение плавающих облаков, а кто-то другой – отражение в ней самых высоких зданий в мире. А кроме того, поскольку скульптура сделана в форме ворот, каждый может войти в большое



внутреннее углубление-камеру и наблюдать в нем свое зеркальное отражение примерно так же, как он наблюдает зеркально отраженный город в наружной части скульптуры».

Помещаем фотографии скульптуры «Небесные врата», сделанные нашим постоянным автором Г.Гальпериным. Нам кажется, что они прекрасно дополняют статью В.Арнольда об отражениях в цилиндрических зеркалах.



На юбилейный для «Кванта» год выпало знаменательное событие и у наших друзей: в октябре выходит 1000-й (тысячный!) номер замечательного научно-популярного журнала «Знание – сила». Взаимные поздравления принято сопровождать подарками, и мы решили обменяться опубликованными материалами, адаптируя их каждый для своей аудитории.

Предлагаем вашему вниманию вариант статьи академика Валерия Анатольевича Рубакова, переработанный для журнала «Квант».

Темная энергия во Вселенной

В.РУБАКОВ

ФИЗИКИ ЛЮБЯТ КРАСНОЕ СЛОВЦО. В ИХ СРЕДЕ с некоторых пор принято давать «ненаучные» названия вновь открытым сущностям. Взять хотя бы «странный» или «очарованный» кварки. Вот и темная энергия – не синоним темных сил, а термин, придуманный для обозначения необычного свойства нашей Вселенной.

Открытие темной энергии было сделано астрономическими методами и стало для большинства физиков полной неожиданностью. Темная энергия – пожалуй, главная загадка современного естествознания. Вполне вероятно, что ее разгадка станет важнейшим событием физики XXI века, сравнимым по масштабу с крупнейшими открытиями недалекого прошлого, такими как открытие феномена расширения Вселенной. Не исключено даже, что произойдет настолько радикальное развитие теории, что оно встанет в один ряд с созданием общей теории относительности, открытием кривизны пространства-времени и связи этой кривизны с гравитационными силами. Мы сейчас находимся в начале пути, и разговор о темной энергии – это возможность заглянуть в «лабораторию» физиков в то время, когда их работа идет полным ходом.

Немного истории

«Маловато будет»

То, что в нашей Вселенной «что-то не так», стало ясно космологам уже к началу 90-х годов прошлого века. Чтобы пояснить, о чем идет речь, начнем с того, что напомним о расширении нашей Вселенной. Удаленные друг от друга галактики разбегаются, причем чем дальше находится галактика, тем быстрее она удаляется от нас. Количественно темп расширения характеризуется параметром (постоянной) Хаббла – коэффициентом пропорциональности между скоростью удаления и расстоянием. Значение параметра Хаббла в современной Вселенной довольно хорошо

измерено: темп расширения Вселенной сегодня таков, что галактики, удаленные от Земли на расстояние 1 миллиард световых лет, убегают от нас со скоростью 22000 километров в секунду. Параметр Хаббла зависит от времени; так, в далеком прошлом Вселенная расширялась гораздо быстрее, чем сейчас, и, соответственно, параметр Хаббла был гораздо больше.

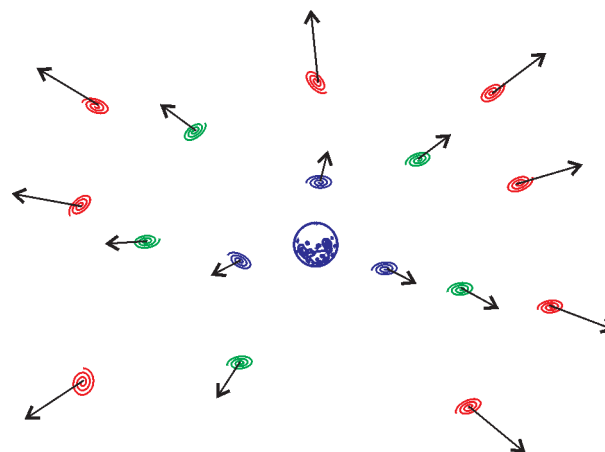


Рис. 1. Расширяющаяся Вселенная. Более далекие галактики удаляются от нас быстрее и выглядят более красными из-за эффекта Доплера. Измерения расстояний до удаленных галактик совместно с измерениями их скоростей позволяют определить значение параметра Хаббла, характеризующего темп расширения Вселенной

В современной теории гравитации – общей теории относительности – параметр Хаббла однозначно связан с двумя другими характеристиками Вселенной: во-первых, с суммарной плотностью энергии всех форм материи, вакуума и т.д., а во-вторых, с кривизной *трехмерного пространства*. Наше трехмерное пространство, вообще говоря, не обязано быть евклидовым; его геометрия может, например, быть аналогична геометрии сферы; сумма углов треугольника может не

равняться 180° . В таком случае «упругость» пространства, с точки зрения расширения Вселенной, играет ту же роль, что и плотность энергии. Итак, в рамках общей теории относительности параметр Хаббла определяет сумму полной плотности энергии во Вселенной и вклада, связанного с возможной неевклидовостью трехмерного пространства.

К началу 90-х годов с неплохой точностью была оценена и плотность энергии «нормальной» материи в современной Вселенной. Нормальная она в том смысле, что испытывает такие же гравитационные взаимодействия, что и обычное вещество. Так, для нормальной материи справедлив закон всемирного тяготения Ньютона. Дело, впрочем, осложняется тем, что большая часть нормальной материи это отнюдь не известное нам вещество (атомы и ионы), а так называемая *темная материя*. Темная материя, по-видимому, состоит из новых, не открытых пока в земных экспериментах элементарных частиц. В отличие от многих известных частиц, они не несут электрического заряда, а потому не излучают свет; состоящая из них материя действительно темная. Сходство с обычным веществом состоит в том, что силы гравитационного притяжения заставляют темную материю собираться в сгустки – галактики и скопления галактик. Она и сама притягивает вещество и свет – именно по эффекту гравитационного притяжения темная энергия и была обнаружена. Более того, измерения гравитационных сил в скоплениях галактик позволили определить массу темной материи в этих скоплениях, а в конечном итоге – в целом во Вселенной. Таким образом и была найдена полная плотность энергии нормальной материи (для нее справедлива знаменитая формула $E = mc^2$).

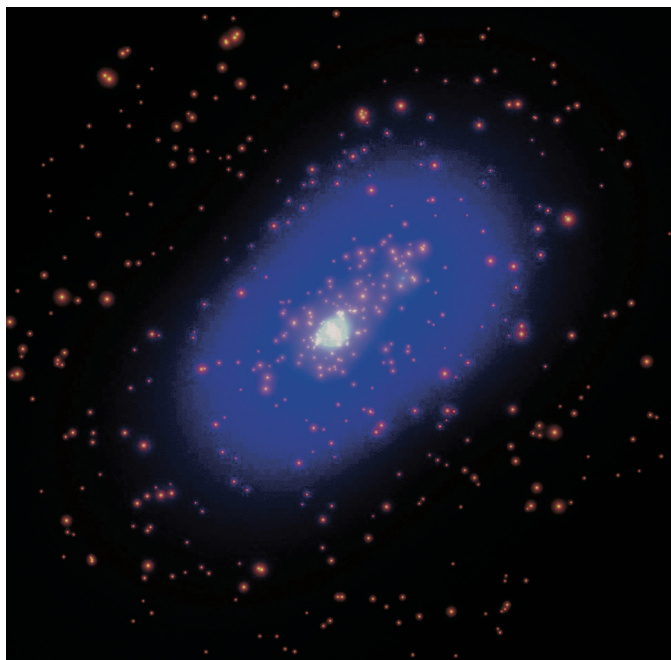


Рис. 2. Распределение массы в скоплении галактик. Яркие пятна – галактики. Масса же сосредоточена в основном в темной материи, распределенной по скоплению более равномерно (это распределение условно показано голубым цветом)

И что же оказалось? Выяснилось, что нормальной материи явно не хватает для объяснения измеренного темпа расширения Вселенной. Причем сильно: «недостача» составляла около $2/3$ (по современным оценкам около 72%). Возможных объяснений этому факту было два: либо трехмерное пространство искривлено и недостающий вклад в параметр Хаббла связан с «упругостью» пространства, либо во Вселенной присутствует новая форма энергии, которую впоследствии и стали называть темной энергией.

Еще одной трудностью старой доброй космологической модели был возраст современной Вселенной. Эта модель давала для возраста значение около 9 миллиардов лет. В то же время возраст старых звездных скоплений оценивался (и сейчас оценивается) как 13–14 миллиардов лет. Неувязочка! Нужно сказать, что с проблемой не вполне справлялась и модель с искривленным пространством, в ней возраст – около 11 миллиардов лет (в модели с темной энергией – около 14 миллиардов лет, все хорошо). Эту трудность, впрочем, всерьез воспринимали немногие, а большинство рассчитывало, что «как-нибудь рассосется».

Куда ни кинь...

С теоретической точки зрения, обе возможности – и неевклидовость пространства, и темная энергия – выглядели крайне неправдоподобными.

Начнем с кривизны трехмерного пространства. В процессе расширения Вселенной пространство разглаживается, его кривизна уменьшается. Если кривизна отличается от нуля сейчас, то в прошлом она была больше, чем сегодня. Однако плотность энергии (массы) материи убывает при расширении Вселенной *еще быстрее*. Это означает, что в прошлом *относительный* вклад кривизны в параметр Хаббла был очень мал, а главным, с большим запасом, был вклад материи. Для того чтобы сегодня расширение Вселенной на $2/3$ обеспечивалось кривизной, необходимо «подогнать» значение радиуса кривизны пространства в прошлом с фантастической точностью – через одну секунду после Большого взрыва он должен был быть равен одной миллиардной доле от тогдашнего размера наблюдаемой Вселенной, не больше и не меньше! Без такой подгонки кривизна сегодня была бы либо на много порядков больше, либо на много порядков меньше, чем необходимо для объяснения наблюдений.

Даже если отвлечься от гипотезы о том, что недостающий вклад в современный параметр Хаббла обеспечивается именно кривизной пространства, проблема кривизны все равно остается: в любом случае необходимо, чтобы кривизна была чрезвычайно мала на ранних стадиях, иначе она была бы слишком велика сегодня. Эта проблема была одним из главных соображений, приведших к представлению об инфляционной стадии эволюции Вселенной. Согласно инфляционной теории (предложенной А. Старобинским и независимо А. Гуттом и сформировавшейся благодаря работам А. Линде, А. Албрехта и П. Стейнхардта), Вселенная на самом раннем этапе своей эволюции прошла через стадию чрезвычайно быстрого, экспоненциального расшире-

ния (раздувания, инфляции). По окончании этой стадии Вселенная разогрелась до очень высокой температуры, и наступила эпоха горячего Большого взрыва.

Хотя инфляционная стадия длилась, скорее всего, малую долю секунды, за это время Вселенная растянулась настолько, что ее размер стал гораздо больше размера той части, которую мы видим сегодня. Для нас важно, что в результате инфляционного растяжения пространства его радиус кривизны упал практически до нулевого значения. Таким образом, инфляционная теория приводит к предсказанию о том, что пространство современной Вселенной с высочайшей степенью точности евклидово. Это, конечно, идет вразрез с гипотезой о том, что Вселенная расширяется сегодня на $2/3$ благодаря кривизне.

С темной энергией дело обстоит аналогичным образом, только еще хуже. Мы будем обсуждать различные гипотезы о природе темной энергии ниже, а здесь ограничимся следующим замечанием. Независимо от того, что представляет собой темная энергия, ее плотность может быть охарактеризована единственным параметром размерности энергии. Для соответствия наблюдательным данным значение этого параметра энергетического масштаба темной энергии должно быть примерно равно $0,002$ электронвольт. В то же время известные фундаментальные взаимодействия – сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное – характеризуются своими энергетическими масштабами. Наименьший из них относится к сильным (ядерным) взаимодействиям и составляет около 200 миллионов электронвольт. Получается нестыковка в 100 миллиардов раз! Хуже всего, что этой нестыковке и вообще чрезвычайно малой величине темной энергии очень трудно найти объяснение.

Из-за трудностей с интерпретацией темной энергии более популярной в течение довольно долгого времени была та точка зрения, что за современный темп расширения Вселенной ответственна все же пространственная кривизна. Многие (хотя и далеко не все) физики никак не могли воспринять всерьез возможность того, что темная энергия действительно существует, и считали пространственную кривизну «меньшим из зол». Вопрос, как обычно, был решен экспериментом.

Вселенная расширяется с ускорением

Перелом наступил в 1998–1999 годах, когда две группы из США (одна под руководством А. Райсса и Б. Шмидта, а другая – С. Перлмуттера) сообщили о результатах наблюдений удаленных сверхновых типа 1a. Из этих наблюдений следовало, что наша Вселенная расширяется *с ускорением*. Такое свойство вполне согласуется с представлением о темной энергии, в то время как неевклидовость пространства к ускоренному расширению не приводит. Тем самым был сделан однозначный выбор в пользу темной энергии, а гипотеза о неевклидовом трехмерном пространстве была отвергнута (мы еще ненадолго вернемся к ней).

Несколько слов о сверхновых типа 1a. Это – термоядерные взрывы, которыми заканчивается жизнь не-

которых типов звезд. Детальное теоретическое описание этих взрывов до сих пор отсутствует, но на основании наблюдений близких сверхновых были установлены эмпирические закономерности, позволяющие определить их абсолютную светимость, т.е. энергию, которую они излучают в процессе довольно короткой вспышки. Иными словами, сверхновые типа 1a представляют собой «стандартные свечи»: зная абсолютную светимость и измеряя видимую яркость (поток энергии, приходящий на Землю), можно определить расстояние до каждой из них – чем больше расстояние, тем меньше видимая яркость. Одновременно можно установить и скорость удаления от нас каждой из сверхновых (используя эффект Доплера). Сверхновые – очень яркие объекты, их видно на огромных расстояниях. Иначе говоря, удаленные сверхновые, которые мы наблюдаем сейчас, свернулись давным-давно, и поэтому скорость их убегания определялась темпом расширения Вселенной *тогда*, в далеком прошлом. Тем самым наблюдения сверхновых типа 1a позволяют определить темп расширения на сравнительно ранних этапах эволюции Вселенной (7 миллиардов лет назад и даже несколько раньше) и проследить зависимость этого темпа от времени. Именно это и дало возможность установить, что Вселенная расширяется с ускорением.

Сейчас имеется еще несколько наблюдательных результатов, никак не связанных со сверхновыми и независимо свидетельствующих об ускоренном расширении Вселенной. Например, сравнительно быстрое космологическое расширение препятствует формированию вновь образующихся объектов – крупных скоплений галактик. Галактики собираются в скопления под действием гравитационных сил, которыми они притягивают друг друга. Общее растяжение пространства, наоборот, заставляет галактики удаляться друг от друга и тем самым мешает им сгущаться. Ясно, что второй эффект тем сильнее, чем выше темп растяжения. При известной современной скорости расширения (параметре Хаббла) темп расширения *в прошлом* был меньше в ускоряющейся Вселенной по сравнению со Вселенной, расширяющейся с замедлением, и скопления должно было образовываться больше. Подсчет количества крупных скоплений на разных расстояниях от нас (и, стало быть, образовавшихся в разное время) показывает, что скопления формировались действительно весьма охотно, в полном согласии с представлением об ускоренном расширении Вселенной и в противоречии с моделью замедляющейся Вселенной без темной энергии, но с пространственной кривизной. Упомянем еще об изучении особенностей в распределении галактик в пространстве – так называемых барионных акустических осцилляций.

Пространство – евклидово

Окончательное доказательство того, что неевклидовость трехмерного пространства, если она и есть, не играет сколько-нибудь существенной роли в расширении Вселенной, было получено путем измерения свойств реликтового излучения. Реликтовое излучение, прони-

зывающее сегодня нашу Вселенную, было испущено на довольно ранней стадии космологической эволюции. Дело в том, что Вселенная в прошлом была гораздо более плотной и горячей, чем сейчас. В процессе расширения она стала более разреженной и остыла; современная температура реликтового излучения составляет 2,726 кельвина.

На ранних стадиях вещество в горячей Вселенной было в состоянии плазмы – протоны сами по себе, электроны сами по себе. Такая среда непрозрачна для электромагнитного излучения, фотоны все время рассеиваются, поглощаются, излучаются электронами. Когда Вселенная остыла до 3000 градусов, электроны и протоны довольно быстро объединились в атомы водорода, и вещество стало прозрачным для фотонов. Эпоха перехода вещества из плазменного в газообразное состояние и является эпохой последнего излучения реликтовых фотонов. В это время возраст Вселенной составлял 370 тысяч лет (современный возраст – 13,7 миллиардов лет). С тех пор фотоны распространяются по Вселенной свободно, их длина волны увеличивается из-за растяжения пространства, и сегодня эти реликтовые фотоны представляют собой радиоволны.

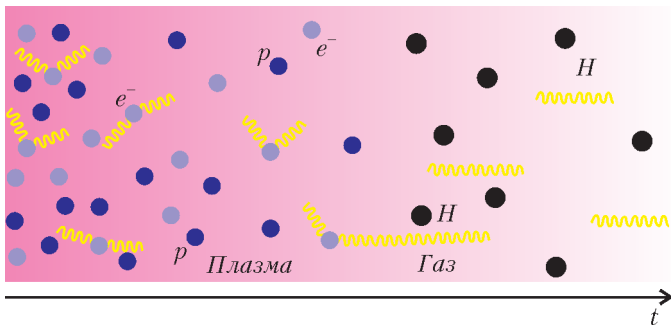


Рис. 3. При температуре 3000 градусов вещество во Вселенной перешло из плазменного состояния в газообразное и стало прозрачным для фотонов. Рекомбинация произошла тогда, когда возраст Вселенной составлял 370 тысяч лет. Желтым цветом схематически изображены фотоны, по горизонтальной оси отложено время

В эпоху излучения реликтовых фотонов Вселенная не была в точности однородной. Имевшиеся тогда неоднородности были зародышами структур – первых звезд, галактик, скоплений галактик. В то время неоднородности плазмы, как обычно для плотных сред, представляли собой звуковые волны. Важно, что в ту эпоху во Вселенной имелся характерный масштаб расстояний, который проявляется сейчас в свойствах излученных тогда реликтовых фотонов. Звуковые волны с большой длиной и, соответственно, малым периодом еще не успели развиться к эпохе излучения реликтовых фотонов, а волны с «правильной» длиной как раз успели попасть в фазу максимального сжатия. Эта правильная длина волны представляет собой «стандартную линейку» эпохи излучения реликтовых фотонов; ее размер надежно вычисляется в теории горячего Большого взрыва.

Неоднородность Вселенной эпохи последнего излучения реликтовых фотонов проявляется в том, что фотоны, излученные в разных местах, имеют немного

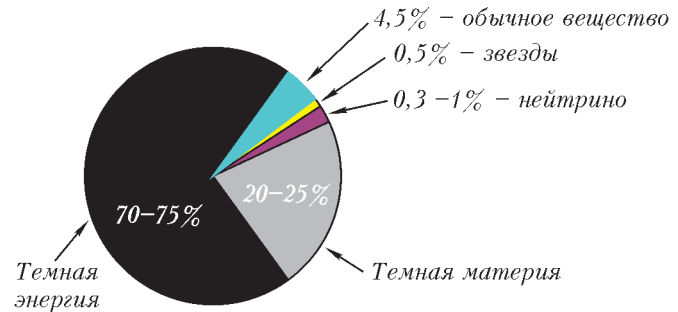


Рис. 4. Баланс энергий в современной Вселенной

разные температуры. Иными словами, температура фотонов зависит от направления на небесной сфере, с которого они к нам приходят. Эффект слабый: относительная разница температур в разных направлениях составляет около $1/10000$. Тем не менее, этот эффект был надежно измерен. Более того, на рубеже XX–XXI веков впервые был измерен угол, под которым видна «стандартная линейка». Ясно, что этот угол зависит от геометрии пространства: если сумма углов треугольника превышает 180° , то и этот угол больше. В результате было выяснено, что наше трехмерное пространство с хорошей степенью точности евклидово. Последующие измерения подтвердили этот вывод. С точки зрения расширения Вселенной, существующие результаты означают, что кривизна пространства вносит пренебрежимо малый вклад (менее 1%) в параметр Хаббла. Темп расширения Вселенной на 70% обусловлен сегодня именно темной материей.

Больше не знают о ней ничего

Какие же свойства темной энергии известны сегодня? Таких свойств немного, всего три. Но то, что известно, может справедливо вызвать изумление.

Первое – это то, что, в отличие от нормальной материи, темная энергия не сгущается, не собирается в объекты типа галактик или их скоплений. Насколько сейчас известно, темная энергия «разлита» по Вселенной равномерно. Это утверждение, как и любое, основанное на наблюдениях или экспериментах, справедливо с определенной точностью. Нельзя полностью исключить того, что где-то во Вселенной плотность темной энергии немного больше, а где-то немного меньше средней плотности, где-то темная энергия чуть-чуть более густая, а где-то чуть-чуть более разреженная. Однако из наблюдений следует, что такие отклонения от однородности, если они и есть, должны быть весьма малы по величине.

О втором свойстве мы уже говорили: темная энергия заставляет Вселенную расширяться с ускорением. Этим темная энергия тоже разительно отличается от нормальной материи. Для нормальной материи справедливо обычное представление о том, как «работают» гравитационные силы: частички вещества, образовавшиеся, скажем, в результате взрыва и разлетающиеся от центра, постепенно замедляют свой разлет из-за гравитационного притяжения к центру. Если бы не темная энергия, так же обстояло бы дело и во Вселенной:

скорость разбегания галактик уменьшалась бы с течением времени. Темная энергия приводит к обратному эффекту – галактики разбегаются все быстрее и быстрее.

Два описанных свойства говорят о том, что темная энергия в определенном смысле испытывает антигравитацию, для нее имеется гравитационное отталкивание вместо гравитационного притяжения. Из-за этого расширение Вселенной ускоряется, из-за этого же темная энергия распределена в пространстве равномерно. Области с повышенной плотностью нормальной материи за счет гравитационного притяжения собирают вещество из окружающего пространства, сами эти области сжимаются и образуют плотные сгустки; именно так сформировались первые звезды, а потом галактики и скопления галактик. Для антигравитирующей субстанции все наоборот: области с повышенной плотностью (если они есть) растягиваются из-за гравитационного отталкивания, неоднородности разглаживаются, и никаких сгустков не образуется.

Третье свойство темной энергии состоит в том, что ее плотность не зависит от времени. Тоже удивительно: Вселенная расширяется, объем растет, а плотность энергии остается постоянной. Кажется, что здесь есть противоречие с законом сохранения энергии. За последние 8 миллиардов лет Вселенная расширилась вдвое, ее объем увеличился в 8 раз, во столько же раз увеличилась энергия в этом объеме. Несохранение энергии налицо. Разумеется, это относится именно к темной энергии: количество частиц нормальной материи в расширяющемся объеме не изменилось, их полная энергия покоя тоже не изменилась, а плотность энергии покоя упала в 8 раз.

На самом деле рост энергии при расширении Вселенной не противоречит законам физики. Темная энергия устроена так, что расширяющееся пространство совершает над ней работу, что и приводит к увеличению энергии этой субстанции в расширяющемся объеме пространства. Правда, расширение пространства само обусловлено темной энергией, так что ситуация напоминает барона Мюнхгаузена, вытаскивающего себя за волосы из болота. И тем не менее, противоречия нет: в космологическом контексте невозможно ввести понятие *полной* энергии, включающей в себя энергию самого гравитационного поля. Так что и закона сохранения энергии, запрещающего рост или убывание энергии какой-нибудь формы материи, тоже нет.

Утверждение о постоянстве плотности темной энергии также основано на астрономических наблюдениях, а потому тоже справедливо с определенной точностью. Чтобы охарактеризовать эту точность, скажем, что за последние 8 миллиардов лет плотность темной энергии изменилась не более чем в 1,4 раза, так что энергия в расширяющемся объеме увеличилась в 6–11 раз. Это мы сегодня можем сказать с уверенностью.

Отметим, что второе и третье свойства темной энергии – способность приводить к ускоренному расширению Вселенной и ее постоянство во времени (или, более общо, очень медленная зависимость от времени) – на самом деле тесно связаны между собой. Такая связь

следует из уравнений общей теории относительности. В рамках этой теории ускоренное расширение Вселенной происходит именно тогда, когда плотность энергии в ней или совсем не меняется, или меняется весьма медленно. Таким образом, антигравитация темной энергии и ее сложные отношения с законом сохранения энергии – две стороны одной медали.

Этим надежные сведения о темной энергии, по существу, исчерпываются. Дальше начинается область гипотез. Прежде чем говорить о них, обсудим вкратце один общий вопрос.

Почему сейчас?

Если в современной Вселенной темная энергия дает наибольший вклад в полную плотность энергии, то в прошлом это было далеко не так. Скажем, 8 миллиардов лет назад нормальная материя была в 8 раз более плотной, а плотность темной энергии была такой же (или почти такой же), как сейчас. Отсюда несложно заключить, что тогда соотношение между энергией покоя нормальной материи и темной энергией было в пользу первой: темная энергия составляла около 15%, а не 72%, как сегодня. Из-за того что в то время главную роль играла нормальная материя, расширение Вселенной происходило *с замедлением*. Еще раньше влияние темной энергии на расширение было совсем слабым.

Замечательно, что такая картина подтверждается данными по сверхновым типа 1a. Наиболее удаленные из них взорвались более 8 миллиардов лет назад, и измерения их скоростей показывают, что расширение Вселенной тогда действительно замедлялось. Результаты других космологических наблюдений также говорят о том, что на ранних этапах эволюции Вселенной темная энергия была несущественна. Об одной серии таких результатов стоит упомянуть. В период от одной секунды до нескольких минут после Большого взрыва, когда температура во Вселенной менялась от 10 миллиардов до сотен миллионов градусов, в космической плазме активно шли термоядерные реакции. В результате образовались дейтерий, изотопы гелия и лития. В некоторых местах во Вселенной этот первичный состав вещества практически не изменился, и его удалось измерить. С другой стороны, его можно надежно рассчитать, при этом результат, разумеется, зависит от темпа расширения Вселенной в ту далекую эпоху. Так вот, результаты расчета согласуются с наблюдениями, если считать, что темная энергия не играла тогда никакой роли. Точнее, вклад темной энергии (как и других новых, гипотетических форм энергии) в полную плотность энергии в период термоядерных реакций ограничен на уровне около 15%. Точность вроде бы не очень высока, но не надо забывать, что речь идет о первых секундах после Большого взрыва!

Итак, влияние темной энергии и вызванное им ускорение расширения Вселенной – явления по космологическим меркам совсем недавние: ускорение началось всего 6,5 миллиардов лет назад. С другой стороны, поскольку плотность нормальной материи убывает со временем, а плотность темной энергии нет, темная