СВЕТОФОР

В этой простой на вид головоломке нужно отцепить палочку с продетой сквозь нее петлей от дощечки с тремя отверстиями. Но сделать это не так легко, как кажется: палочка длинная, а петля короткая. Смастерить головоломку можно в домашних условиях, важно лишь сохранять пропорции деталей, как на рисунках. Так, дырки должны быть достаточно большими, чтобы сквозь них одновременно проходили палочка и петля.

Рассказывают, что автор головоломки Ламберт Брайт узнал о ней от простого американского фермера, который любил ставить своих знакомых в тупик, давая им эту задачку. Брайт немного изменил форму деревянных деталей, так что конструкция стала похожа на светофор. Под этим названием он и представил ее на 20-м съезде любителей головоломок в 2000 году.

Е.Епифанов

Кое-что о ладьях

В «Кванте» №4 за 2009 г. была опубликована следующая интересная задача А.Шаповалова – не столько шахматная, сколько на сообразительность.

В углах доски стоят четыре ладьи. На каждом ходу ладья перемещается до упора в другую ладью или в край доски. Можно ли собрать все фигуры на четырех центральных полях?

Поначалу кажется, что задание невыполнимо – ладьи все время будут находиться на краю доски. И все же задача имеет решение. В следующем номере журнала было показано, что фигуры собираются в центре доски за 42 хода (разумеется, за один ход ладья может передвигаться только по вертикали или горизонтали). Я предлагал эту задачу разным шахматистам (в том числе математикам), и в результате они обнаружили более короткие решения. А рекорд в настоящее время составляет 29 ходов: ♖h8-h2, ♖a8-a2-g2, ♖h2-h8, ♖a1-a8-g8-g3, ♖g2-a2, ♖h8-a8-a3-f3, ♖g3-g8, ♖a2-a8-f8-f4, ♖f3-a3, ♖g8-a8-a4-e4, ♖h1-h8-a8-a4-d4, ♖e4-e8, ♖a3-a8-d8-d5, ♖f4-e4, ♖e8-e5, и ладьи заняли необходимые места – d4, d5, e4, e5. Может быть, кому-нибудь из читателей удастся еще улучшить рекорд?

Данная головоломка – хороший повод, чтобы рассмотреть еще ряд занятных задач, связанных с ладьями. Хорошо известно, что на доске 8×8 можно расставить восемь ладей, не угрожающих друг другу (но не больше), причем существует 8! таких расстановок. Соответственно, на доске $n\times n$ имеется $n!$ расстановок n «мирных» ладей. Вот одно из многочисленных обобщений этой задачи.

Сколькими способами можно расставить восемь ладей на черных полях доски, чтобы они не угрожали друг другу?

Перекрасим мысленно все черные поля в два цвета – красный и синий. При этом черные поля нечетных вертикалей сделаем красными, а четных – синими. В результате из восьми «мирных» ладей, стоящих на черных полях, четыре окажутся на красных полях, а остальные четыре – на синих. Красные поля образуют как бы отдельную доску 4×4, поэтому число расстановок ладей на них равно $4! = 24$. То же самое можно сказать и о синих полях. Значит, число всех расстановок равно 24^2.

На доске восемь ладей, не угрожающих друг другу. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых (расстояние измеряется между центрами полей, на которых расположены ладьи).

Рассмотрим семь пар ладей, стоящих на соседних вертикалях. Разности координат по вертикали у этих пар равны одному из чисел от 1 до 7, поэтому либо две из них равны (и тогда расстояния в соответствующих парах ладей совпадают), либо среди них содержатся все числа от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали (и на 1 по горизонтали) – пара A. Аналогично, на соседних горизонталях либо найдутся две пары ладей с равным расстоянием, либо есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по горизонтали (и на 1 по вертикали) – пара B. Тогда расстояния между ладьями в парах A и B равны $\sqrt{5}$, т.е. они одинаковые, хотя сами пары различны.

а) б)

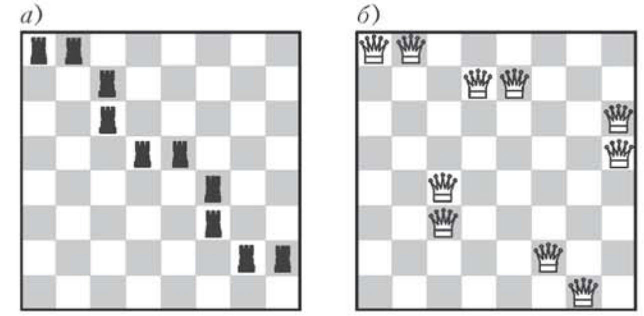

Рис.1

Опытные читатели, конечно, сообразили, что эта задача – на тему принципа Дирихле: если в n клетках сидят $n+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой не меньше двух из них.

Итак, расставить n мирных ладей на доске $n\times n$ можно $n!$ способами. А если допустить одну угрозу?

Какое наибольшее число ладей можно расставить на доске $n\times n$, чтобы каждая из них находилась под ударом не более одной из остальных?

Докажем, что это число не превышает $4n/3$. Пусть расставлено k ладей, удовлетворяющих условию. На всех занятых ими полях напишем сначала 0, а затем с каждой из n вертикалей последовательно проделаем следующую операцию. Если на ней стоят две ладьи, то к каждому из двух соответствующих чисел прибавим 1, а если стоит одна ладья, то прибавим 2. Теперь ту же операцию проделаем последовательно с каждой из n горизонталей. В результате на k полях с ладьями будет записано число 3 или 4, и сумма s всех чисел не меньше $3k$. С другой стороны, поскольку на каждой вертикали и горизонтали мы добавили не более двух единиц, s не больше $4n$. Отсюда $3k \le s \le 4n$, и $k \le 4n/3$. Таким образом, наибольшее число ладей не превосходит $[4n/3]$, причем эта оценка достижима. Так, для $n = 8$ имеем $[4n/3] = 10$, соответствующее расположение десяти ладей показано на рисунке 1,*а*, причем ладьи распределились на пять пар, и каждая угрожает только ладье своей пары.

Аналогичные рассуждения для обычной доски показывают, что и ферзей, обладающих тем же свойством – каждый под ударом не более одного, – можно расставить не более десяти. Но можно ли ровно десять? Заменить ладей ферзями на рисунке 1,*а* не удается, многие попадают под удар. Но есть другой вариант – рисунок 1,*б* (конечно, он годится и для ладей). Здесь десять ферзей тоже разбиты на пять пар. Для ферзей в общем случае задача не решена.

Можно ли расставить на доске 16 белых и 16 черных ладей, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и двух главных диагоналях ладей разного цвета было поровну? Можно ли так расставить 15 белых и 15 черных ладей?

а) б)

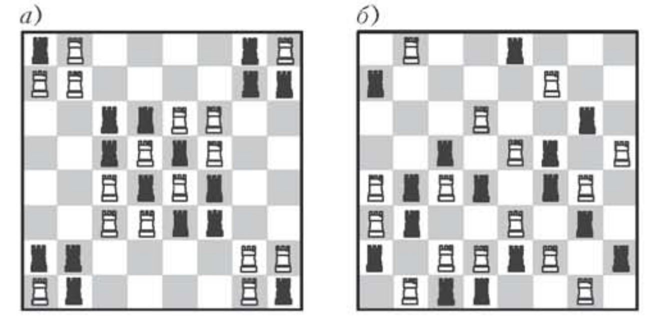

Рис.2

В первом случае необходимая расстановка показана на рисунке 2,*а* (на каждой вертикали и горизонтали стоят по две белые и черные ладьи, а на главных диагоналях – по четыре). Второй случай сложнее, но ответ тоже положительный (рис.2,*б*). Здесь на вертикалях и горизонталях доски стоит по одной, две или три белые и черные ладьи, а при этом на всех диагоналях ладей тоже поровну – по одной, две, три или... 0.

Е.Гик