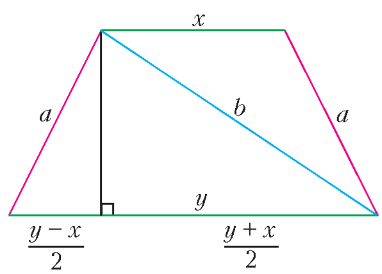

Рис. 3

градусов). Тогда первое и последнее звенья параллельны друг другу. Но оба они проходят через вершину A, а следовательно, совпадают! Иными словами, шарик вернулся в вершину A по тому же звену, что и вылетел из нее. Это значит, что в какой-то момент шарик просто стал двигаться назад по уже пройденной траектории, что возможно только если один из ударов о борт был под углом 90 градусов. Но это противоречит условию – ведь первый удар был не в вершину, и, значит, первый угол был отличен от 90 градусов, а тогда и все углы отличны от 90 градусов.

Поэтому правильный ответ в этой задаче – так не бывает!

Приносим свои извинения за не вполне корректную формулировку и советуем внимательно проверять полученные результаты. Например, многие очень быстро решают следующую задачу: «Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 и высотой 6, опущенной на гипотенузу». По формуле площади треугольника площадь должна равняться половине произведения основания на высоту, т.е. 30. Но на самом деле такого треугольника не существует – проверьте, что самое большое возможное значение высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу длины 10, равно 5.

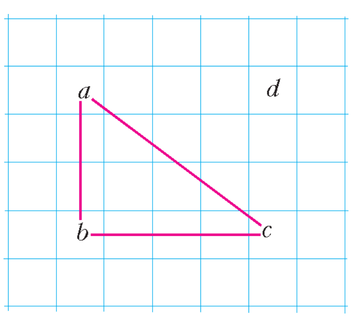

Рис. 4

18. Да. Рассмотрим произвольную четверку клеток, центры которых образуют прямоугольник со сторонами 3 и 4. Пусть в этих клетках написаны числа a, b, c и d (рис. 4). Тогда верны равенства $a+b+c=b+c+d=a+b+d=a+c+d=0$, откуда получается, что $a = b = c = d$. Но тогда $3a = 0$. Значит, во всех клетках написаны нули.

19. *Указание*. Проверьте, что тройка a, b, c из условия – это числа 101^2, $101 \cdot 103$ и 103^2 (в таком порядке).

20. 12. Сначала докажем, что если открыто меньше половины кабинетов, то комендант сможет открыть еще хотя бы один кабинет. Пусть комендант открыл $n \le 12$ кабинетов. Это означает, что не больше 12 кабинетов открыто не своим ключом, т.е. среди оставшихся $25-n \ge 13$ ключей не более двенадцати могут подойти только к уже открытым кабинетам. Значит, есть хотя бы один ключ, который откроет один из пока еще запертых кабинетов.

Приведем пример, когда комендант откроет только 13 дверей. Пусть ключ с номером n, где $14 \le n \le 25$, открывает (помимо кабинета n) еще и кабинет с номером $26-n$ (но не наоборот). Тогда комендант может открыть кабинеты с 1 по 12 этими ключами, 13-й кабинет он откроет ключом №13, а оставшиеся двенадцать кабинетов с 14 по 25 так и останутся заперты.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

1. Используя квадрирование Колмогорова, можно утверждать, что если проделать 500 шагов разбиения, то сумма периметров квадратиков, пересекающихся с главной диагональю, равна $4 \cdot 500 = 2000$, что больше 1993.

2. Если разбиваемый квадрат имеет сторону длины $2n-1$, то число квадратов в нем можно посчитать по формуле $\frac{1}{3}n^2\left(2n^2+1\right)$.

3. Существует разбиение квадрата на три класса равных квадратов, в котором по 14 квадратов каждого из трех размеров 1×1, 2×2 и 3×3, и всего 52 квадрата (рис.5). Вообще, квадрат можно разрезать на любое число классов равных квадратов.

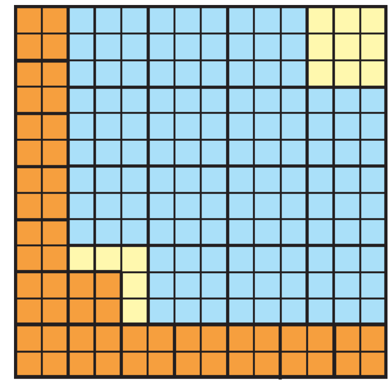
Рис. 5

ЗАДАЧИ НА УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ СИЛ

1. T = 600 Н. **2.** $F_д = 180$ Н. **3.** x = 0,2 м. **4.** m = 25 г. **5.** $F_д = 150$ Н. **6.** F = 9 Н. **7.** $\alpha_{min} = 45°$. **8.** $F_{min} = 75$ Н. **9.** T = 25 Н. **10.** $\alpha = \operatorname{arctg} 0,2$.

XXXI ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1. Сложив равенства для слив и яблок по всем корзинам, получим что общее число слив в 5 раз больше общего числа яблок. Аналогично, общее число яблок в 5 раз больше общего числа груш, т.е. в 25 раз больше общего числа слив. Итого, общее число фруктов в 31 раз больше общего числа груш.

2. Нет. Малыш проводит разрез через выбранную Карлсоном точку K и центр O торта (рис.6), если Карлсон выбрал O – проводит любой возможный разрез. Прямая m, проведенная через O перпендикулярно KO, вместе с прямой KO делят торт на 4 одинаковых куска. Оба куска, которые может отсечь Карлсон (отрезком, параллельным m), не меньше этих четвертинок.

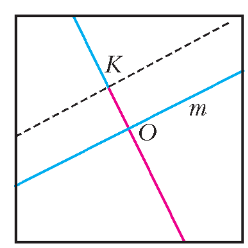

Рис. 6

3. а) Одну. Проведем окружность с центром на стороне угла, проходящую через его вершину. Если она пересечет другую сторону угла, угол был острым.

б) Проведем окружность с центром в вершине O нашего угла. Пусть она пересекает стороны угла в точках A и B. Начиная с точки A, будем откладывать циркулем на этой окружности дуги, равные дуге AB. Если, отложив 360 таких дуг, мы обойдем окружность ровно 31 раз, то $\angle AOB = 31°$.

4. Построим из участников самый длинный ряд так, чтобы знакомые стояли рядом. Все трое знакомых крайнего (обозначим его A) должны быть в ряду (иначе ряд можно удлинить). Обозначим через B и C тех знакомых, которые не стоят рядом с A. Если, между A и B (A и C) стоит четное число человек, то они вместе с A и B (A и C) образуют искомую группу. Если же оба эти числа нечетны, то и между B и C стоит нечетное число человек, и они вместе с A, B и C образуют искомую группу

5. 1. Из четырех последовательных квадратов (за 3 операции) можно получить число 4:

$$(n+1)^2-n^2=2n+1,\quad (n+3)^2-(n+2)^2=2n+5,$$

$$(2n+5)-(2n+1)=4.$$

Получим так 24 четверки из чисел $6^2, 7^2, \ldots, 101^2$, а 20 четверок попарным вычитанием превратим в нули. Из чисел 4, 9, 16, 25 получим 14 = (25 – 4) – (16 – 9). Осталось заметить, что 4 – (14 – 4 – 4 – 4) – 1 = 1.

10–11 классы

1. Аналогично решению задачи 1 базового варианта для 8–9 классов, общее число бананов в 2009 раз больше числа лимонов, которое в 2009 раз больше числа ананасов. Поэтому общее число фруктов в 2009^2 + 2009 + 1 раз больше числа ананасов. Так как $2009 \equiv -6 \pmod{31}$, то

$$2009^2 + 2009 + 1 \equiv (-6)^2 - 6 + 1 \equiv 0 \pmod{31}.$$

3. Можно.

Первое решение. Подойдут четыре правильных шестиугольника, малая диагональ которых равна ребру октаэдра. В каждом таком шестиугольнике закрасим треугольник, образованный диагоналями шестиугольника, а грани октаэдра раскрасим в шахматном порядке (рис.7). Наложим шестиугольники закрашенными треугольниками на закрашенные грани и загнем белые треугольные части шестиугольников на соседние грани.

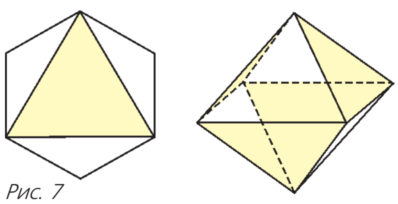

Рис. 7

Второе решение. Окрасим 8 граней октаэдра в шахматном порядке. Белые грани разрежем на половинки правильных шестиугольников, как показано на рисунке 8 слева, а черные – как показано на рисунке 8 справа. При любой стыковке соседних граней половинки шестиугольников склеиваются в целые шестиугольники.

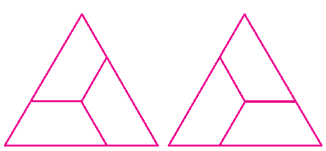

Рис. 8

Сложный вариант

8–9 классы

1. Разрежем оба куска, получившихся при первом разрезании. Получатся 4 куска, чьи веса относятся как $1 : a : a : a^2$. Достаточно выбрать такое a, чтобы $1 + 2a = a^2$. Положительный корень этого уравнения $a = 1 + \sqrt{2}$.

2. 1 : 2. Проведем среднюю линию MN треугольника ACP (параллельную AP) . По теореме Фалеса $OM/PN = BO/BP$, поэтому $OM = PN = \frac{1}{2}PC$.

3. а) –997. *Оценка*. Если два соседних произведения равны, то первое число левого равно последнему числу правого, т.е. равны числа через 10 мест. Так как 10 и 999 взаимно просты, то, шагая по 10, мы обойдем все числа. Но среди чисел есть разные, значит, и среди произведений – тоже. Итак, есть хотя бы одно произведение, равное 1.

Вот *пример*, где ровно одно произведение равно 1, а остальные 998 – по –1: если номер числа оканчивается на 9, ставим –1, иначе ставим 1. Тогда единственное положительное произведение – с 999-го места по 9-е.

б) 995. *Пример*. Две –1 рядом, остальные 1. Тогда отрицательными будут только те произведения, куда одна –1 входит, а другая – нет, т.е. ровно 2.

Оценка. Произведение всех произведений равно 10-й степени произведения всех чисел, т.е. равно 1. Значит, среди произведений четное число минус единиц, т.е. не меньше двух.

4. Может.

Рассмотрим число

$$n = \sum_{k=0}^{99} 10^{10^k} = 10 + 10^{10} + \ldots + 10^{10^{99}}.$$

Его десятичная запись состоит из ста единиц и большого числа нулей. Возведем это выражение в куб следующим образом: рассмотрим три таких выражения, перемножим их, раскрыв скобки, но не будем приводить подобные. Получим 100^3 слагаемых, каждое из которых является степенью числа 10.

Если бы все слагаемые были разными, то при суммировании мы получили бы число, десятичная запись которого состоит из 100^3 единиц и некоторого количества нулей, т.е. сумма цифр равнялась бы 100^3. К сожалению, некоторые слагаемые будут одинаковыми. Но если мы докажем, что одинаковых слагаемых каждого типа меньше десяти, то при сложении не будет происходить переносов в следующий разряд и сумма цифр числа будет действительно равна 100^3.

Посмотрим, сколько одинаковых слагаемых одного типа может получиться. Каждое из таких слагаемых получается из произведения трех чисел: первое число с 10^p нулями берется из первой скобки, второе с 10^q нулями – из второй, а третье с 10^r нулями – из третьей. Заметим, что слагаемое с таким же количеством нулей можно получить, только перемножая эти же три числа, взятые в другом порядке (подумайте, почему!). Но всего есть максимум 3! = 6 способов выбрать три данных числа из трех скобок, поэтому одинаковых слагаемых каждого типа может быть максимум 6.

Значит, при суммировании слагаемых не будет происходить переносов в следующий разряд, и сумма цифр числа n^3 будет равняться 100^3.

5. Решение аналогично решению задачи М2189 «Задачника «Кванта» и будет опубликовано позже.

6. См. решение задачи 5 для 9 класса LXXIII Московской математической олимпиады в этом номере журнала.

7. 40. *Оценка.* На одной вертикали может быть не более двух блох, прыгающих по вертикали (иначе блохи, находящиеся в клетках одного цвета, встретятся). То же верно для горизонталей. Итого на 20 горизонталях и вертикалях – не более 40 блох.

Пример. Ясно, что блохи с клеток разных цветов не смогут встретиться. Поэтому достаточно указать только 20 «белых» блох (расположение «черных» блох можно получить, например, симметрией относительно средней линии).

На рисунке 9,*а* нарисована одна «вертикальная» блоха В и все запрещенные положения «горизонтальных» блох, (т.е. те, начиная с которых, «горизонтальная» блоха может оказаться с В на одной клетке). Как видим, запрещенные клетки образуют два прямоугольника, построенных на проходящих через В диагоналях. На рисунке 9,*б* размещены 10 «вертикальных» блох и все запрещенные ими положения «горизонтальных». Мы видим, что в каждой горизонтали осталась хотя бы одна незапрещенная белая клетка, куда можно посадить «горизонтальную» блоху.

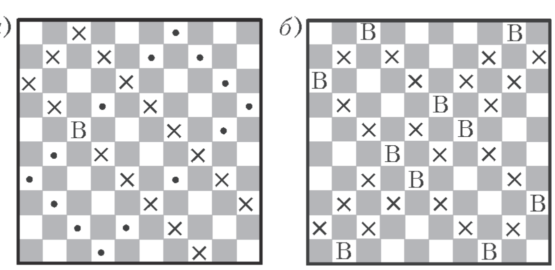

Рис. 9

10–11 классы

1. Можно. Если прямая не параллельна осям координат, то парная к ней пересекается с ней на оси Oy. Для прямой, параллельной одной из осей, парная пересекается с ней на биссектрисе первого координатного угла.

2. а) Можно. См. решение задачи 1 сложного варианта для 8–9 классов.

б) Нельзя. Допустим противное: после нескольких разрезаний удалось разбить все куски на две равные кучки. Без ограничения общности можно считать, что мы резали на каждом шагу *все* имеющиеся куски. После k шагов получились куски, чьи веса относятся как $1 : a : a : a^2 : \ldots : a^k$, причем 1 и a^k соответствует ровно по одному куску. Подставив вместо a несократимую дробь $\frac{m}{n}$ и умножив все веса на подходящую константу, получим целые веса $n^k, mn^{k-1}, \ldots, m^k$, mn^{k-1}. Но m и n взаимно просты, поэтому вес одной кучки кратен m, а другой, где есть кусок веса n^k, – не кратен. Противоречие.

3. Можно. Пусть

$$f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

По индукции проверим, что $g^n(x) = g\left(g^{n-1}(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

Взяв $n = 2010^2 - 1$, получим, что $g^n(1) = \frac{1}{2010}$, откуда $f\left(g^n(1)\right) = 2010$.

4. Достаточно распределить участников съезда не более чем по 100 секциям: потом число секций можно поднять до 100, деля их на произвольные части.

Если есть популярный фильм, который видели больше 100 человек, выделим их всех в отдельную секцию. Если теперь есть популярный фильм, который видели больше 99 из оставшихся, выделим их в следующую секцию и т.д. У нас закончатся либо люди, либо популярные фильмы. Если закончились люди, то 101 секция образоваться не могла, так как в них вошло бы не менее 101 + 100 + 99 + … + 2 + 1 > 5000 человек. Пусть закончились популярные фильмы. Тогда уже есть 100 – k секций и среди оставшихся участников каждый фильм видело не более k человек. Выделим k комнат для еще k секций. Берем любой фильм, распределяем видевших его по разным комнатам и поручаем им рассказывать об этом фильме. Так же поступаем с видевшими следующий фильм, и так пока люди не кончатся.

6. Прямые AI, BI, CI, DI – биссектрисы углов четырехугольника. Поэтому сумма углов AIB и CID равна $180°$. Если один из этих углов, скажем AIB, острый, то другой – угол CID – тупой, и тогда $IM > \frac{1}{2}AB$ (это становится очевидным после построения окружности с диаметром AB), а $IN < \frac{1}{2}CD$, что противоречит условию. Значит, $\angle AIB = \angle CID = 90°$. Следовательно, $\angle A = \angle B = 180°$, т.е. $BC \parallel AD$.

Устный тур для 11 класса

2. Предположим противное – таких школьников нет.

Пусть в одном из залов больше рядов, чем в другом. Тогда школьники, сидящие на первых местах этого зала, не смогут рассесться в разные ряды второго зала – противоречие. Значит, общее число рядов в каждом зале одинаково.

Пусть в одном из залов (скажем, в первом) длина самого короткого ряда больше, чем в другом, и равна m. Тогда школьники с местами 1, 2, …, m из первого зала не смогут рассесться в разные ряды второго зала. В самом деле, школьники с первыми местами из первого зала садятся в разные ряды второго зала, и поскольку всего рядов поровну, одно место каждого кратчайшего ряда второго зала будет кем-то из них занято; школьники со вторыми местами аналогично займут еще по одному месту каждого кратчайшего ряда второго зала и так далее, т.е. мест в кратчайшем ряду второго зала не может оказаться меньше m.

Если же длины кратчайших рядов равны, то аналогично равны и количества кратчайших рядов.

Рассуждая далее точно так же, получим, что одинаковы длины следующих по величине рядов и их количества и так далее (строгое доказательство можно оформить по индукции). В результате получим, что набор длин рядов и их количеств в обоих залах одинаков, что противоречит условию.

3. 1001.

Докажем по индукции, что наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_N, равно $\sqrt{N}$. База для $N = 1$ очевидна. Покажем, что из верности нашего утверждения для N следует его верность для $N + 1$.

Для начала найдем наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, при условии, что хорда, на которой построена окружность ω_2, стягивает дугу величины 2φ. Радиус ω_2 при этом равен $\sin\varphi$. По предположению индукции, наибольшее возможное расстояние между центром ω_2 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, равно $\sin\varphi\sqrt{N}$. Расстояние между центрами ω_1 и ω_2 равно $\cos\varphi$. Отсюда наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, равно $\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{N}$.

Осталось подобрать угол φ таким образом, чтобы значение $\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{N}$ было максимальным. Заметим, что

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{N} = \sqrt{N+1}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{N+1}} + \frac{\sin\varphi\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}}\right) =$$

$$= \sqrt{N+1}\cos\left(\varphi - \arccos\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) \le \sqrt{N+1},$$

причем при $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{N+1}}$ достигается равенство. Шаг индукции доказан.

Радиус первой окружности равен 1. Поэтому наибольшее возможное расстояние между двумя точками, принадлежащими ω_1 и ω_N, равно $1 + \sqrt{N}$. Подставляя N = 1000000, находим ответ.

4. Все кроме двух.

Набросок решения. На рисунке 10 – пример на 62 клетки (стартуем из середины). Докажем теперь, что в любом случае останутся как минимум две не обойденные клетки. Закрасим внутренние границы клеток, которые ладья не пересекала. Будем считать их ребрами графа. Рассмотрим клетки, примыкающие к правому краю доски, и их границы, идущие от края доски. Если ни одна из этих границ не закрашена, то ладья прошла по правому краю и сделала поворот в угловых клетках. Но это были либо два поворота направо, либо два поворота налево, а клетки – разного цвета. Противоречие.

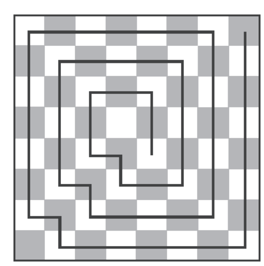

Рис. 10

Значит, среди границ правых клеток есть ребро R с концом на краю доски. Аналогично, такое ребро L есть среди границ левых крайних клеток. Если ребра R и L соединены в графе маршрутом, то маршрут разбивает доску на две части, в каждой есть как минимум 6 клеток (по одной с каждой не крайней вертикали). В одной из этих частей ладья не побывала, значит, она обошла не более 58 клеток. Пусть R и L не соединены. Пойдем от края по ребру R и будем идти по графу, не поворачивая назад. Есть три возможности: а) попадем в вершину, где уже были; б) попадем в вершину на краю доски; в) попадем в вершину v внутри доски, из которой других ребер не выходит. На самом деле случай (в) невозможен: тогда бы мы обошли 4 примыкающие к v клетки буквой *П*, сделав два левых или два правых поворота в двух соседних клетках, а они – разного цвета. В случаях (а) и (б) пройденный маршрут разбивает доску на 2 части (в случае (а) есть цикл, в случае (б) маршрут замыкается в цикл краем доски). Аналогично находим такой маршрут, стартуя от края по ребру L. Он добавит еще одну часть. Ладья побывала только в одной из частей, значит, в каждой из оставшихся найдется хотя бы по одной не обойденной клетке.

5. Люда не может помешать Саше.

Первое решение. Сначала Саша называет число $k = 4$. Пусть Люда назвала число, большее $\operatorname{tg} 18°$. Тогда Саша берет на окружности вершины прямоугольника *ABCD* и делит дугу *AB* точками на 10 равных частей (это все будут точки касания сторон 13-угольника с окружностью). Тогда 4-я сторона касается в точке *A*. Уменьшая дугу *AB* почти до $0°$, Саша может сделать 4-ю сторону сколь угодно длинной. Наоборот, раздвигая дугу до $180°$, Саша делает 4-ю сторону сколь угодно близкой к $\operatorname{tg} 18°$.

Пусть Люда назвала число не больше $\operatorname{tg} 18°$. Тогда Саша впишет равнобедренный остроугольный треугольник *ABC* с основанием *AB* и разделит дугу *AB* на 11 равных частей. Тогда 4-я сторона касается в доп. точке. Сближая *A* и *B*, Саша получает все значения меньше $2\operatorname{tg}(180/11)°$.

Набросок второго решения. Сначала Саша называет число $k = 4$. Пусть радиус круга равен 1. Если длина 4-й стороны s больше 1, то Саша делает так: описывает ромб, у которого касательная больше 1, но чуть-чуть меньше нашей стороны. Два угла этого ромба будут острые, два – тупые. Далее, берет две соседние точки касания, соединенные меньшей дугой (концы тупого угла), и описывает около нее равнозвенную ломаную из 9 звеньев, концы ее на сторонах ромба лежат так, чтобы как раз две его стороны стали равны длине s.

Если длина 4-й стороны s меньше или равна 1, Саша делает так. Рисует горизонтальную касательную над кругом так, чтобы ее середина была над центром, длина равна s. После этого вправо продолжает девятизвенной ломаной, у которой одно звено чуть больше половины длины s, а остальные звенья очень маленькие, затем проводит еще звено – большое и влево от исходной стороны звено – большое, их соединяет нижней горизонтальной касательной. Тогда девять звеньев маленькие, а длина трех звеньев очевидно больше 1.

6. Для доказательства того, что $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ делится на $[1, 2, \ldots, n]$, нам достаточно доказать, что для любого простого p и натурального k среди чисел вида $a_i - a_j$, где $1 \le i < j \le n$, чисел, делящихся на p^k, не меньше, чем среди чисел вида $i - j$. В самом деле, для целого числа $b = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ степень вхождения p в b равна сумме степеней вхождения p в b_i, которая в свою очередь равна сумме по всем натуральным k количества таких b_i, которые кратны p^k.

Для каждого p^k рассмотрим набор $d_0, d_1, \ldots, d_{p^k-1}$, где d_j – количество таких a_i, которые имеют остаток j при делении на p^k (т.е. $d_0 + d_1 + \ldots + d_{p^k-1} = n$). Тогда количество чисел среди $a_i - a_j$, делящихся на p^k, есть

$$\frac{1}{2}\left(d_0(d_0-1) + d_1(d_1-1) + \ldots + d_{p^k-1}\left(d_{p^k-1}-1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(d_0^2 + d_1^2 + \ldots + d_{p^k-1}^2 - n\right).$$

Осталось доказать, что $d_0^2 + d_1^2 + \ldots + d_{p^k-1}^2$ при фиксированной сумме $d_0 + d_1 + \ldots + d_{p^k-1} = n$ принимает наименьшее значение тогда, когда эти остатки распределены достаточно равномерно (т.е. все d_i равны или $\left[\frac{n}{p^k}\right]$, или $\left[\frac{n}{p^k}\right]+1$), например, при $a_i = i$. Это нетрудно сделать, скажем, методом «шевелений».

LXXIII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

6 класс

1. 21 кусок.

Заметим, что количество частей всегда на 1 больше количества разрезов. Значит, красных колец 4, желтых 6, а зеленых 10. Таким образом, всего разрезов 4 + 6 + 10 = 20, а частей 21.

2. Оба гномы.

Предположим, что *А* эльф. Тогда он сказал правду, а *Б* солгал. Но ни гномы, ни эльфы не лгут, говоря про эльфов. Значит, *А* гном. Говоря про золото, он солгал. Поэтому *Б* сказал про *А* правду. Это мог сделать только гном.

3. Например, он может сложить башню из четырех кубиков, «завернуть» ее в квадрат 4×4, а низ и верх заклеить квадратами 1×1.

4. В 10 долларов.

Поскольку Буратино получил 50 конфет, он совершил ровно 50 операций. При этом все полученные евро он вновь обменял на доллары. Поэтому на каждые 3 операции первого типа приходилось по 2 операции второго типа, т.е. Буратино 30 раз получал по 3 доллара и 20 раз отдавал по 5 долларов. Значит, он потратил $20\cdot 5 - 30\cdot 3 = 10$ долларов.

5. На рисунке 11 доска разрезана на 35 прямоугольников.

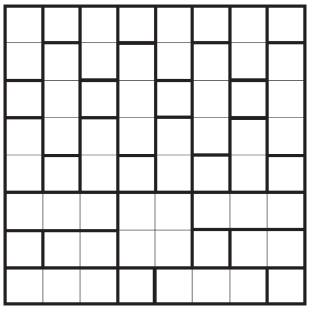

Рис. 11

6. Раскрасим чашки через одну в синий и красный цвет. Пусть Мартовский Заяц вначале пил из красной чашки. Докажем, что вначале Соня пила из синей чашки. В самом деле, если бы она пила из красной, то после любого поворота стола опорожнялись бы две чашки одного цвета. Поскольку и тех, и других по 15, а выпиваются они парами, в конце остались бы две чашки разного цвета, которые никаким поворотом стола нельзя было бы одновременно поместить перед Соней и Мартовским Зайцем. Теперь ясно, почему Заяц мог всегда поворачивать стол, ставя перед собой чашку через одну от только что выпитой, – при этом перед ним по очереди предстали бы все красные, а перед Соней – все синие чашки.

7 класс

1. Например, $(1\cdot 3+3)$: 3 + 3 + 3 + 3 = 11.

2. а) Да; б) нет (так как у каждого колеса не более трех спиц, а всего у колес не менее 7 спиц).

3. 21 конфета.

Указание: докажите сначала, что все съели поровну конфет.

4. 13 судей.

Число голосов, поданных за Петуха и Ворону, не может быть больше 15 + 13 = 28. Аналогично, за Ворону и Кукушку в сумме не может быть подано больше 18 + 13 = 31 голоса, а за Кукушку и Петуха – не больше 20 + 13 = 33 голосов. Сложив эти три количества поданных голосов, мы получим удвоенное число всех голосов (каждый голос вошел в два из трех слагаемых). Таким образом, общее число членов жюри не больше (28 + 31 + 33)/2 = 46. С другой стороны, из первого объявления Дятла оно не меньше 59 − 13 = 46. Тем самым, членов жюри ровно 46, а все неравенства на самом деле обращаются в равенства. Наконец, число проголосовавших за Ворону можно найти как разность общего числа членов жюри и суммы проголосовавших за Кукушку и Петуха: 46 − 33 = = 13 голосов.

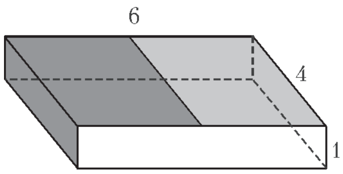

Рис. 12

5. а) См. решение задачи 3 для 6 класса.

б) На рисунке 12 показано, как можно параллелепипед $1\times4\times6$ оклеить двумя квадратами 4×4 и одним квадратом 6×6. Большим квадратом оклеены три грани: передняя, нижняя и задняя, а каждым из меньших квадратов – половина верхней грани и одна из двух боковых.

6. На доске 7×7.

Пример расстановки кораблей на доске 7×7 изображен на рисункке 13. Остается доказать, что на доске 6×6 корабли расставить нельзя.

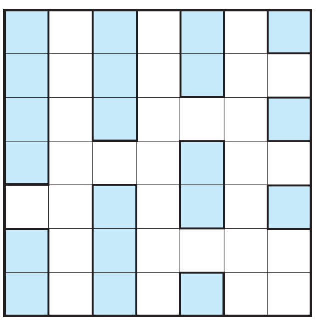
Рис. 13

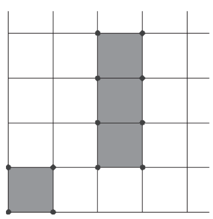
Рис. 14

Доказательство 1. Будем считать не клетки, а узлы доски, занимаемые кораблями. Корабль 1×4 занимает $2\cdot5=10$ узлов, корабль 1×3 занимает 8 узлов, корабль 1×2 – 6 узлов, корабль 1×1 – 4 узла (рис.14); причем по правилам расстановки один узел не может принадлежать более чем одному кораблю. Значит, все корабли занимают $10+2\cdot8+3\cdot6+4\cdot4 = 60$ узлов, и выставить их все на доску с меньшим числом узлов невозможно. Но всего на доске 6×6 имеется лишь $(6+1)^2 = 49 < 60$ узлов.

Доказательство 2. Разрежем доску 6×6 на 9 квадратов 2×2. Каждый такой квадрат при расстановке по правилам может содержать клетки только одного корабля. Но всего кораблей 10, поэтому их на такой доске разместить нельзя. (Отметим, что это рассуждение доказывает, что на доску 6×6 все 10 кораблей нельзя было бы поставить, даже если все они имели бы размеры 1×1.)

8 класс

1. См. решение задачи 1 КМШ в третьем номере журнала за этот год.

2. 60 г.

Все монеты без центральной можно разбить на 9 троек (рис.15), а все внутренние монеты без центральной – на 3 тройки (рис.16). Значит, монеты на границе весят столько же, сколько 9 − 3 = 6 троек, т.е. 60 г.

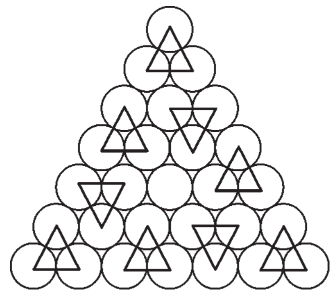
Рис. 15

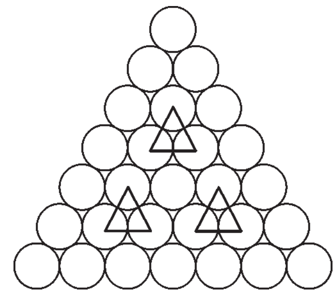
Рис. 16

3. 1 : 2.

См. решение задачи 2 сложного варианта для 8–9 классов XXXI Турнира городов в этом номере журнала.

5. Так как средняя линия MN треугольника ABC (рис.17) параллельна стороне AB, $\angle BAN + \angle MNA = 180°$, а значит, $\frac12\angle BAN + \frac12\angle MNA = 90°$. С другой стороны, поскольку угол AIN прямой, $\frac12\angle BAN + \angle INA = 90°$. Стало быть, $\angle INA = \frac12\angle MNA$, т.е. точка I лежит на биссектрисе угла MNA.

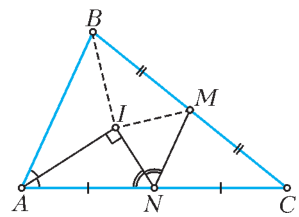

Рис. 17

Таким образом, из условия $\angle AIN = 90°$ получаем, что центр I вписанной окружности треугольника ABC равноудален от прямых AC, BC, AB и MN (т.е. вписанная окружность треугольника ABC касается его средней линии MN). Обращая переходы в предыдущем абзаце, получаем, что и $\angle BIM = 90°$. А именно:

$$\angle IBM + \angle BMI = \frac12\angle ABM + \frac12\angle BMN = 90°,$$

поэтому

$$\angle BIM = 180° - (\angle IBM + \angle BMI) = 90°.$$

6. Предположим, что клеток без стрелочек нет. Для замкнутого пути по клеткам квадрата определим *индекс* как число оборотов (по часовой стрелке), которые делает на нем стрелочка, т.е. пройдем по этому пути, на каждом шаге прибавляя к числу (равному нулю в начале пути) $1/4$, если стрелочка повернулась по часовой стрелке, вычитая $1/4$, если против, и не меняя число, если направление стрелки не изменилось[1]; индекс – это число, которое мы получим, сделав полный круг[2].

Индекс относительно пути вдоль границы квадрата равен 1. Начнем теперь уменьшать наш путь – «откусим» сначала его левый верхний уголок (рис.18 и 19). Заметим, что индекс

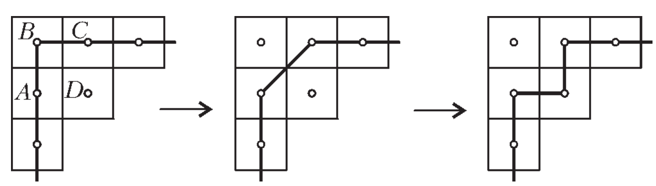

Рис. 18

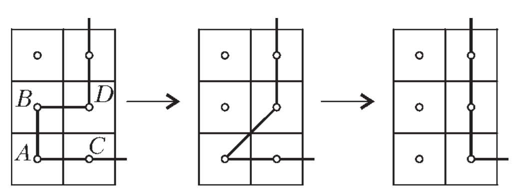

Рис. 19

[1] *Здесь мы пользуемся тем, что в соседних клетках стрелочки не смотрят в противоположных направлениях: если бы на каком-то шаге нашего пути стрелка поменяла направление на противоположное, неясно было бы, надо нам прибавлять 1/2 или вычитать.*

[2] *Так как при этом мы возвращаемся в клетку, с которой начинали, вектор делает целое число оборотов, т.е. индекс – целое число.*

при такой операции не меняется (так как среди стрелочек, выходящих из точек A, B, C и D, нет противоположных). Откусывая так по углу, через некоторое время мы продеформируем наш путь до пути, состоящего из одной клетки – а индекс такого пути равен 0. Противоречие.

Комментарии. 1. На самом деле мы доказали и более общий факт. А именно, если в клетках какой-то фигуры расставлены стрелочки так, что индекс относительно границы фигуры не равен 0, то внутри фигуры обязательно есть пустая клетка. Более того, можно показать, что если индекс относительно границы равен k, то внутри есть хотя бы $|k|$ пустых клеток.

2. Эта задача представляет собой дискретный аналог следующего известного топологического факта. Пусть на круге задано векторное поле, т.е. в каждой точке круга задан вектор, причем вектор зависит от точки непрерывно. Тогда если на окружности эти векторы направлены по касательной (рис.20), то внутри найдется точка, вектор в которой равен нулю.

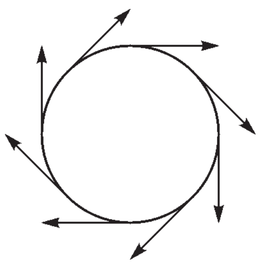

Рис. 20

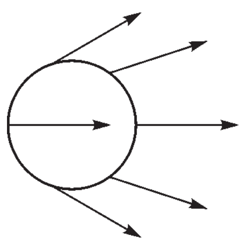

Рис. 21

Доказательство этого факта проходит в духе решения задачи. А именно, определяется индекс векторного поля относительно кривой[3], проверяется, что для граничной окружности он равен 1, а для маленького контура вокруг точки с ненулевым вектором индекс равен 0 (рис.21). После чего доказывается, что, если нулей у векторного поля нет, при уменьшении контура индекс не меняется.

Таким образом, имеет место теорема: если на границе некоторой области векторное поле имеет ненулевой индекс, то внутри области поле имеет хотя бы одну *особую точку* – точку, вектор в которой равен нулю.

Более подробно намеченное выше рассуждение изложено в пункте V.3.4 книги Р.Куранта, Г.Роббинса «Что такое математика» (где оно применяется для доказательства замечательной теоремы Брауэра о существовании неподвижной точки непрерывного отображения диска в себя). А полное формальное доказательство можно узнать, прочитав книгу Н.Стинрода, У.Чинна «Первые понятия топологии».

Более того. Определим индекс особой точки векторного поля как индекс относительно маленького пути вокруг этой точки. Тогда аналогичными рассуждениями можно показать, что индекс векторного поля относительно границы области равен сумме индексов особых точек внутри области (ср. с последним утверждением в комментарии 1). Дальнейшим развитием этого сюжета является знаменитая теорема Пуанкаре–Хопфа, связывающая эйлерову характеристику с суммой индексов особых точек.

9 класс

1. Волк будет страдать от голода.

2. $90°$.

Поскольку $\angle MAE = \angle MPE = \angle CPM = \angle MBC = 90°$, четырехугольники $AEPM$ и $BMPC$ вписанные. Стало быть,

$$\angle BPA = \angle BPM + \angle MPA = \angle BCM + \angle MEA =$$
$$= 180° - \angle EMA - \angle CMB = \angle EMC = 90°.$$

3. Среднее количество товарищей у тараканов больше среднего количества тараканов у жителя города.

Пусть в городе проживает n жителей, и пусть у i-го жителя a_i тараканов. Тогда среднее число тараканов у жителя города равно $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$, а среднее число товарищей у таракана равно $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

Докажем, что

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Избавившись от знаменателей, получим

$$n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2. \qquad (*)$$

Правая часть равна

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$$

Осталось заметить, что, поскольку $a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_ia_j$ для любых i и j, исходное неравенство верно.

Значит, среднее количество товарищей у тараканов больше либо равно среднему количеству тараканов у жителя города. Однако равенство не достигается, потому что в $(*)$ оно возможно только для $a_1 = \ldots = a_n$, что противоречит условию.

Комментарии. 1. Доказанное неравенство является частным случаем неравенства Коши–Буняковского.

2. Задача объясняет «закон подлости»: мы обычно ездим в автобусах, более переполненных, чем в среднем, и стоим в очередях, более длинных, чем обычно.

4. 2005.

См. решение задачи 3б) сложного варианта для 8–9 классов XXXI Турнира городов в этом номере журнала.

5. 9.

Допустим, прямых 8. Тогда они имеют не более 28 точек пересечения, но ломаная не может иметь вершин не в точках пересечения прямых, кроме начальной и конечной, т.е. не может иметь более 29 звеньев. Пример для девяти прямых изображен на рисунке 22. (На рисунке изображена окружность, на которой отмечено 9 точек – вершины правильного девятиугольника. Каждая из них соединена с двумя другими прямой. По этим прямым и проходит искомая ломаная, на рисунке обозначенная белым цветом.)

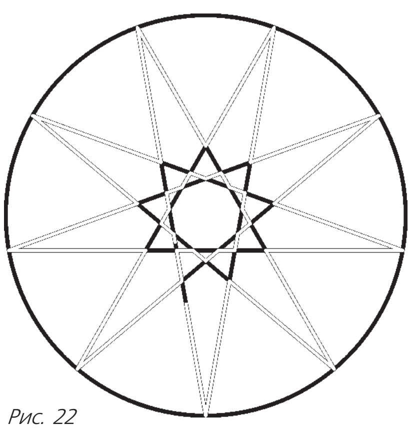

Рис. 22

10 класс

1. Нет, не может.

2. $\sqrt{ab}$.

Указание. Докажите сначала, что прямые MC и AN параллельны (рис. 23). Затем воспользуйтесь подобием треугольников MCN и AND, а также MCB и ANM.

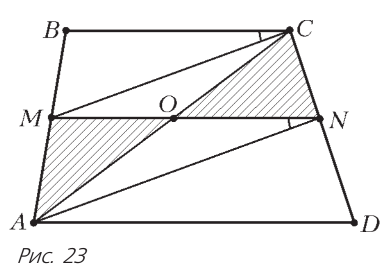

Рис. 23

[3] *Представляя себе векторное поле как отметки скорости ветра, можно сказать, что это число оборотов, которые сделает вокруг своей оси флюгер, если пронести его вдоль этого пути.*

3. Да, можно: $2010 = \operatorname{ctg} \underbrace{\operatorname{arctg} \sin}_{2010^2-2^2 \text{ раз}} \operatorname{arcctg} 2$.

См. решение задачи 3 сложного варианта для 10–11 классов XXXI Турнира городов в этом номере журнала.

4. См. решение задачи 4 сложного варианта для 8–9 классов XXXI Турнира городов в этом номере журнала.

5. $7/2$.

Пусть в треугольнике ABC выполнено неравенство $1 = AB < AC < BC$. Тогда медиана AA' равна высоте, опущенной из вершины B, а медиана BB' – высоте, опущенной из вершины C. Значит, расстояние от точки A' до прямой AC равно половине AA', т.е. $\angle A'AC = 30°$. Аналогично, $\angle B'BA = 30°$. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника. Поскольку $\angle A'B'M = \angle B'BA = \angle B'AM$ (рис.24), треугольники $B'A'M$

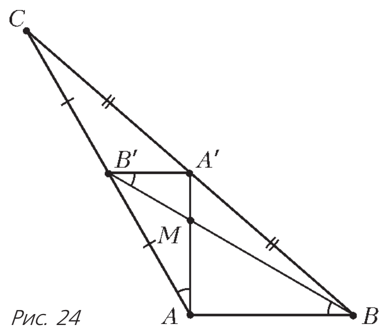

Рис. 24

и $AA'B'$ подобны, т.е. $A'B'^2 = A'M \cdot AA' = 3A'M^2$. Следовательно, угол $A'MB'$ равен либо $120°$, либо $60°$.

В первом случае треугольник ABC равносторонний, что противоречит условию.

Во втором случае имеем $\angle B'A'A = \angle A'AB = 90°$, $\angle BB'A = 30°$ и $AB' = AB$. Таким образом, $AC = 2AB$ и $\angle BAC = 120°$. Теперь по теореме косинусов находим $BC = \sqrt{7}$, и значит, медиана из вершины C равна $\sqrt{21}/2$, а высота из вершины A равна $\sqrt{3/7}$.

6. Сначала докажем, что всего проведено не менее $6n$ отрезков.

Рассмотрим граф, множество V вершин которого состоит из всех отмеченных точек, а множество E ребер состоит из всех пар точек, соединенных отрезками. Тогда по условию $|V| = 4n$, и для любого $W \subset V$, $|W| \geq n+1$, найдутся $x, y \in W$, образующие ребро $(x, y) \in E$.

Возьмем произвольное множество $Q_1 \subset V$, которое не содержит ребер и имеет максимальную мощность среди всех подмножеств множества V, которые не содержат ребер. Ясно, что $|Q_1| \leq n$. Кроме того, ввиду максимальности множества Q_1 каждая вершина из $V \setminus Q_1$ имеет хотя бы одного соседа в Q_1. Значит, в E по крайней мере $3n$ элементов.

Далее, удалим из V множество Q_1. Останется граф G_1 со множеством вершин V_1 и множеством ребер E_1, причем $|V_1| \geq 3n$, и для любого $W \subset V_1$, $|W| \geq n+1$, найдутся $x, y \in W$, образующие ребро $(x, y) \in E_1$. Опять возьмем произвольное множество $Q_2 \subset V_1$, которое не содержит ребер и имеет максимальную мощность среди всех подмножеств множества V_1, не содержащих ребер. Ясно, что $|Q_2| \leq n$. Кроме того, ввиду максимальности множества Q_2, каждая вершина из $V_1 \setminus Q_2$ имеет хотя бы одного соседа в Q_2. Значит, в E_1 по крайней мере $2n$ элементов. Поскольку ребра, найденные на первом шаге поиска, заведомо отличны от ребер, найденных только что, то в E уже не менее $5n$ элементов.

Делаем еще один полностью аналогичный шаг и убеждаемся, что $|E| \geq 6n$.

Для того чтобы доказать, что ребер по крайней мере $7n$, начнем сначала, немного усложнив процедуру: теперь мы учтем, что граф G – дистанционный граф на плоскости, т.е. ребрами соединены только пары вершин на расстоянии в 1 см друг от друга. Проведем почти ту же самую процедуру, что была описана выше; отличие будет только на первом шаге. Мы уже знаем, что каждая вершина из $V \setminus Q_1$ имеет хотя бы одного соседа в Q_1. Давайте разобьем $V \setminus Q_1$ на две части – W_1 и W_2. В W_1 будут те вершины, у каждой из которых ровно один сосед в Q_1, в W_2 – те вершины, у каждой из которых не менее двух соседей. Если мы докажем, что $|W_1| \leq 2n$, то увидим, что на первом шаге вклад в $|E|$ имеет величину не $3n$, как это было раньше, а по крайней мере $4n$. Это и даст нам в итоге оценку $7n$.

Предположим, что $|W_1| > 2n$. Тогда в Q_1 есть вершина q, смежная с тремя вершинами x_1, x_2, x_3 из W_1. Если между какими-то x_i и x_j нет ребра, то мы можем удалить q из Q_1 и добавить к этому множеству обе вершины x_i и x_j. Получится множество, в котором нет ребер и у которого мощность строго больше Q_1. Значит, вершины x_1, x_2, x_3 и q попарно соединены ребрами. Но полный граф на четырех вершинах нельзя реализовать отрезками длины 1 см на плоскости. Противоречие, и задача решена.

11 класс

1. $1/203$ при $a = 2$, $b = 9$, $c = 1$.

2. Машиных куличей больше.

Пусть в песочнице в итоге оказалось m Машиных и n Пашиных куличей. Обозначим через S площадь основания ведерка. Так как все куличи имеют одинаковые высоты и одинаковые объемы, то площадь основания каждого конического кулича равна $3S$ (из формул объемов цилиндра и конуса). Площадь основания песочницы, с одной стороны, численно равна объему всего песка, т.е. суммарному объему $2S(m+n)$ всех куличей, а с другой стороны, больше суммарной площади $Sm + 3Sn$ оснований куличей, поскольку эти основания не пересекаются и, будучи кругами, не могут покрыть весь квадрат в основании песочницы. Итак, $2S(m+n) > Sm + 3Sn$, откуда $m > n$.

3. б) Преобразуем неравенство, которое нужно доказать, к равносильному:

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq xy^2 + yz^2 + zx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2y - zx^2 + z^2x - xy^2 + y^2x - yz^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(y-z) - x(y+z)(y-z) + yz(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x(y+z) + yz\right)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x) \leq 0 .$$

Если среди чисел x, y и z найдутся хотя бы два равных, то доказываемое неравенство обратится в верное равенство.

Пусть теперь все эти числа попарно различны. Без ограничения общности можно считать, что наименьшим из них является x. Докажем, что тогда $z < y$.

Функция $f(t) = t^{2010} + pt + q$ при всех t имеет производную $f'(t) = 2010t^{2009} + p$, причем $f'(t) < 0$ при $t < t_0 = \sqrt[2009]{-p/2010}$ и $f'(t) > 0$ при $t > t_0$. Следовательно, функция $f(t)$ убывает при $t < t_0$ и возрастает при $t > t_0$. Если $y \leq t_0$, то $x < y \leq t_0$ и $y = f(x) > z = f(y)$. Если же $z > y \geq t_0$, то $x = f(z) > z = f(y) > t_0$, что приводит к противоречию. Значит, $x < z < y$ и $(x-y)(y-z)(z-x) < 0$.

Комментарий. Приведенное доказательство останется верным и при замене в нем функции f на любую другую функцию с монотонно неубывающей производной (такие функции называются выпуклыми), а всех строгих неравенств – на нестрогие. Поэтому при каждой такой функции f неравенство

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq xy^2 + yz^2 + zx^2$$

будет верным и для любой тройки чисел x, y и z, связанных между собой равенствами $y = f(x)$, $z = f(y)$, $x = f(z)$. В частности, доказательство неравенства в пункте а) получается из доказательства пункта б) заменой $f(t) = t^{2010} + pt + q$ на $f(t) = t^2 + pt + q$, $f'(t) = 2010t^{2009} + p$ на $f'(t) = 2t + p$ и $t_0 = \sqrt[2009]{-p/2010}$ на $t_0 = -p/2$.

4. Во-первых, последовательно докажем, что описанная в условии задачи функция f принимает:

а) не более двух различных значений на любой прямой (проходящей через точку O): действительно, если она на трех векторах одной прямой принимает разные значения, причем на векторе $\vec{v}$ – наибольшее, а на некотором ненулевом (такой найдется) векторе $\vec{u}$ – меньшее значение, то для некоторого числа α получим противоречие

$$\vec{v} = \alpha\vec{u} \Rightarrow f(\vec{v}) = f(\alpha\vec{u} + 0\cdot\vec{u}) \le \max\{f(\vec{u}), f(\vec{u})\} = f(\vec{u});$$

б) не более трех различных значений на любой плоскости (проходящей через точку O): действительно, если она на четырех векторах одной плоскости принимает разные значения, причем на векторе $\vec{v}$ – наибольшее, а на некоторых неколлинеарных (такие, в силу предыдущего пункта, найдутся) векторах $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ – меньшие значения, то для некоторых чисел α_1, α_2 получим противоречие

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{v}) = f(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) \le \max\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2)\};$$

в) не более четырех различных значений на всем пространстве: действительно, если она на пяти векторах принимает разные значения, причем на векторе $\vec{v}$ – наибольшее, а на некоторых некомпланарных (такие, в силу предыдущего пункта, найдутся) векторах $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ – меньшие значения, то для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ получим противоречие

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 \Leftrightarrow f\vec{v} = f(\alpha_1\vec{u}_1 + (\alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3)) \le$$
$$\le \max\{f(\vec{u}_1), f(\alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3)\} \le$$
$$\le \max\{f(\vec{u}_1), \max\{f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}\} = \max\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}.$$

Во-вторых, приведем пример функции f, удовлетворяющей условию задачи и принимающей ровно четыре различных значения: введя в пространстве декартовы координаты с началом в точке O, определим

$$\vec{v} = (x, y, z) \Rightarrow f(\vec{v}) = \begin{cases} 0, & x = y = z = 0; \\ 1, & x = y = 0 \ne z; \\ 2, & x = 0 \ne y; \\ 3, & 0 \ne x. \end{cases}$$

5. Проведем AK, DL, MN и PQ – перпендикуляры к прямой BC (рис.25). Так как $AM = MD$, то $KN = NL$, а так как $MB = MC$, то $BN = NC$. Следовательно, $KB = CL$. Из прямоугольных треугольников AKB и BPQ получаем

$$\cos\angle KBA = \cos\angle BPQ = \frac{KB}{AB} = \frac{QP}{BP}.$$

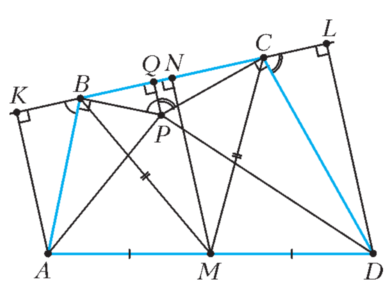

Рис. 25

Аналогично, из прямоугольных треугольников CLD и QPC получаем

$$\cos\angle LCD = \cos\angle CPQ = \frac{CL}{CD} = \frac{QP}{CP}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{QP}{KB} = \frac{BP}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{QP}{CL} = \frac{CP}{CD},$$

т.е. $\operatorname{tg}\angle BAP = \operatorname{tg}\angle CDP$.

6. а) 1; б) $[n/k]$.

Комментарий. Эта задача появилась в результате коллективного обсуждения «фольклорной» задачи М2000.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. $l = 10$ км.

2. См. рис.26, здесь $R = 10$ м, $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41{,}4°$; $t_{\min} = 10$ мин 56 с.

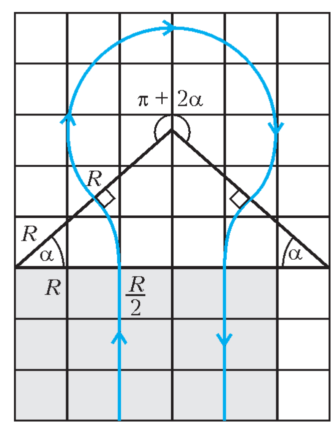

Рис. 26

3. $\frac{1}{2} < \frac{v_2}{v_1} < 1$.

4. $V_{\min} = \frac{m}{\rho_2 - \rho_1} = 31{,}25$ м^3.

8 класс

1. $t_{\min} \approx 15{,}7$ с.

2. $F = \frac{Mg}{10} = 500$ Н.

3. $F = \rho gHS + N_1V_1(\rho_1 - \rho)g = 16{,}8$ Н.

4. $t = 60$ °С.

9 класс

1. $d = \frac{t}{4}\sqrt{v_0^2 + 2gh - \frac{g^2t^2}{4}} \approx 4{,}4$ м.

2. Чаша опрокинется через время $T = \frac{2hac}{v}$, а затем будут происходить колебания: с периодом T вода будет сначала заполнять чашу, а потом выливаться из нее.

3. $R = \frac{U_0}{I_0}$, $P_{\max} = I_0U_0$.

10 класс

1. Ускорение равно $a = \frac{2(M+m)}{M}g$ и направлено вертикально вверх.

2. $t_{\max} = \frac{R\sqrt{5}}{v} \approx 90$ с, $t_{\min} = \frac{R(19 + 2\sqrt{39})}{20v} \approx 63$ с.

3. $k = \frac{\alpha}{1-\alpha} = 1$. **4.** $q_2 = 0$, $I = \frac{12\pi RU}{17\rho}$.

5. $P_n = \frac{9Pn}{(n+2)^2}$.

11 класс

1. $t = \frac{5a\sqrt{5}}{3v}$, $u = 3v$. **2.** $\Delta F = \frac{\Phi_0^2 Q^2 \sin^2(\pi/N)}{\pi^2 MNl^3}$.

3. $D = \frac{v\tau}{(a_0/a_1) - 1} = 1$ см.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $u = 2v = 10$ км/ч. **2.** $L \le \dfrac{d(m+2M)}{M\sin\alpha} = 40$ см .

3. $m_2 = \dfrac{m_1}{1-(\rho_в/\rho_с)} \approx 1{,}15$ кг ,

$$m_л = \frac{m_1(\rho_в/\rho_с)}{2\left(1-\dfrac{\rho_в}{\rho_с}\right)\left(\dfrac{\rho_в}{\rho_л}-1\right)} \approx 0{,}66 \text{ кг} .$$

4. $t = \dfrac{c_а\rho_а x t_к + c_в\rho_в h_0 t_0}{c_а\rho_а x + c_в\rho_в h_0} = 5{,}6$ °C .

9 класс

1. $0 < F \le \dfrac{m_2 g}{2}$; $-g < a \le g\left(\dfrac{m_2}{2m_1}-1\right)$, где $a > 0$ соответствует направлению вверх.

2. $Q = \dfrac{L\rho mgh}{p} \approx 13$ кДж .

3. См. рис.27 и 28.

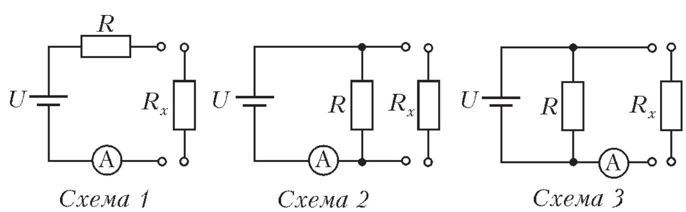

Рис. 27

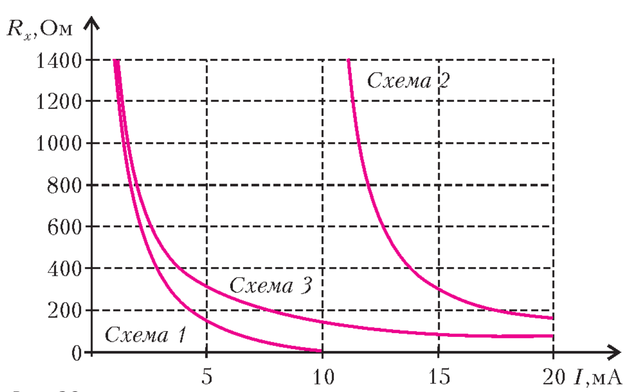

Рис. 28

10 класс

1. $t = \sqrt{\dfrac{mL}{3F}\left(1-\dfrac{\pi R}{L}\right)}$, при этом «хвост» веревки еще не доедет до колонны.

2. $T = m\left(g + \dfrac{v_1^2}{R} + \dfrac{(v_1-v_2)^2}{L}\right)$,

$$F = (m+M)\left(g+\frac{v_1^2}{R}\right) + m\frac{(v_1-v_2)^2}{L} .$$

3. $\eta = (1-\alpha)\left(1-\dfrac{3(p_4-p_1)V_1}{4p_2(V_3-V_2)}\right) = 0{,}475 = 47{,}5\%$,

$$N = \frac{q\rho V(1-\alpha)}{t}\left(1-\frac{3(p_4-p_1)V_1}{4p_2(V_3-V_2)}\right) \approx 56{,}8 \text{ кВт} \approx 78 \text{ л.с.},$$ где

1, 2, 3, 4 – точки цикла Дизеля.

4. $R_{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}R$.

11 класс

1. $u = \dfrac{m}{M}\sqrt{\dfrac{2gH}{1+(m/M)}}$.

2. $\eta = \dfrac{n^2-1}{4n^2+4n+3} \approx 0{,}07 = 7\%$.

3. $R_{12} = \sqrt{2}R$.

4. $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 30°$.

5. $L = F_1 + F_2 = 30$ см ; $a_2 = a_1\left(\dfrac{F_2}{F_1}\right)^2 = 0{,}25$ мм и $b_2 = b_1\dfrac{F_2}{F_1} = 1$ мм или $a_2 = a_1\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)^2 = 4$ мм и $b_2 = b_1\dfrac{F_1}{F_2} = 4$ мм .

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59