XXXI Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)[1]. В шести корзинах лежат груши, сливы и яблоки. Число слив в каждой корзине равно числу яблок в остальных корзинах вместе взятых, а число яблок в каждой корзине равно числу груш в остальных корзинах вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

М.Мурашкин, А.Шаповалов

2 (3). Малыш и Карлсон режут квадратный торт. Карлсон выбирает на нем точку (не на границе). После этого Малыш делает прямолинейный разрез от выбранной точки до края (в любом направлении). Затем Карлсон проводит второй прямолинейный разрез от выбранной точки до края, перпендикулярный первому, и отдает меньший из получившихся двух кусков Малышу. Малыш хочет получить хотя бы четверть торта. Может ли Карлсон ему помешать?

М.Мурашкин

3. Нарисован угол, и еще имеется только циркуль.

а) (2) Какое наименьшее число окружностей надо провести, чтобы наверняка определить, является ли данный угол острым?

б) (2) Как определить, равен ли данный угол 31° (разрешается проводить сколько угодно окружностей)?

Г.Фельдман, Д.Баранов

4 (5). Среди участников олимпиады каждый знаком не менее чем с тремя другими. Докажите, что можно выбрать группу из четного числа участников (больше двух человек) и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком с обоими соседями.

Фольклор (предложил А.Шаповалов)

5 (5). На доске записано 101 число: $1^2, 2^2, \ldots, 101^2$. За одну операцию разрешается стереть любые два числа, а вместо них записать модуль их разности. Какое наименьшее число может получиться в результате 100 операций?

М.Малкин

10–11 классы

1 (3). Из Южной Америки в Россию 2010 кораблей везут бананы, лимоны и ананасы.Число бананов на каждом корабле равно числу лимонов на остальных кораблях вместе взятых, а число лимонов на каждом корабле равно числу ананасов на остальных кораблях вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

М.Мурашкин, А.Шаповалов

2 (4). См. задачу М2184 «Задачника «Кванта».

3 (5). Можно ли поверхность правильного октаэдра оклеить несколькими правильными шестиугольниками без наложений и пробелов? (В правильном октаэдре 6 вершин, все грани – равносторонние треугольники, в каждой вершине сходятся 4 грани.)

Н.Авилов

4 (5). См. задачу М2186 «Задачника «Кванта».

5 (6). См. задачу М2188 «Задачника «Кванта».

Сложный вариант

8–9 классы

1 (3). Есть кусок сыра. Разрешается выбрать любое положительное (возможно, нецелое) число $a \neq 1$ и разрезать этот кусок в отношении $1 : a$ по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезаний весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?

А.Шаповалов

2 (4). В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

М.Волчкевич

3. На окружности расставлены 999 чисел, каждое равно 1 или −1, причем не все числа одинаковые. Возьмем все произведения по 10 подряд стоящих чисел и сложим их.

а) (3) Какая наименьшая сумма может получиться?

б) (3) А какая наибольшая?

А.Толпыго

4 (6). Сумма цифр натурального числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 100^3?

А.Канель-Белов

5. а) (3) Три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

б) (5) А если богатырей десять?

А.Клячко, Е.Френкель

6 (8). На плоскости дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная, в которой 31 звено (соседние звенья не лежат на одной прямой). Через каждое звено провели прямую, содержащую это звено. Получили 31 прямую, некоторые из них, возможно, совпали. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

А.Толпыго

7 (11). На некоторых клетках доски 10×10 сидит по блохе. Раз в минуту блохи одновременно прыгают, причем каждая – в соседнюю клетку (по стороне). Блоха прыгает строго в одном из четырех направлений, параллельных сторонам доски, сохраняет направление, пока это возможно, иначе меняет его на противоположное. Пес Барбос наблюдал за блохами в течение часа и ни разу не видел, чтобы две из них сидели на одной клетке. Какое наибольшее количество блох могло прыгать по доске?

М.Мурашкин

---

[1] *Здесь и далее в скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.*

10 — 11 классы

1 (3). Можно ли все прямые на плоскости разбить на пары перпендикулярных прямых так, чтобы каждая прямая входила ровно в одну пару?

А.Шаповалов

2. а) (2) Есть кусок сыра. Разрешается выбрать иррациональное $a > 0$ и разрезать этот кусок в отношении $1 : a$ по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезаний весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?

б) (2) Тот же вопрос, но выбирается положительное рациональное $a \neq 1$.

А.Шаповалов

3 (6). Можно ли, применяя к числу 1 функции sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg в некотором порядке, получить число 2010? (Каждую функцию можно использовать сколько угодно раз.)

С.Маркелов

4 (6). На съезд собрались 5000 кинолюбителей, каждый видел хотя бы один фильм. Их делят на секции двух типов: либо обсуждают фильм, который все члены секции видели, либо каждый рассказывает о виденном фильме, который больше никто в секции не видел. Докажите, что всех можно разбить ровно на 100 секций. (Секции из одного человека разрешаются: он пишет отзыв о виденном фильме.)

И.Митрофанов

5 (7). См. задачу М2189 «Задачника «Кванта».

6 (8). Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N – середины сторон AB и CD. Известно, что $IM/AB = IN/CD$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция или параллелограмм.

Н.Белухов, А.Заславский

7 (9). См. задачу М2190 «Задачника «Кванта».

Устный тур для 11 класса

1. См. задачу М2185 «Задачника «Кванта».

2. В кинотеатре два зала с одинаковым числом мест. В каждом зале несколько рядов (места в любом ряду нумеруются подряд, начиная с единицы). Группа школьников побывала на утреннем сеансе в первом зале, а на дневном сеансе – во втором, оба раза заняв все места. Известно, что в первом зале есть ряд из 10 мест, а во втором – нет. Докажите, что найдутся два школьника, которые на одном из сеансов сидели в одном ряду, а на другом – имели одинаковый номер места.

А.Буфетов

3. На плоскости дана окружность ω_1 радиуса 1. На одной из ее хорд как на диаметре построена окружность ω_2. На одной из хорд ω_2 как на диаметре построена окружность ω_3, и т.д. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит ω_1, а другая принадлежит $\omega_{1000000}$.

М.Мурашкин

4. Ладья прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку и не перепрыгивая через клетки. При этом все повороты направо делались в черных клетках, а налево – в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено?

А.Шаповалов

5. Саша и Люда играют в игру. Саша должен построить описанный 13-угольник с одной заданной стороной, а Люда хочет ему помешать. Сначала Саша называет номер стороны – число k от 1 до 13. Затем Люда задает длину этой стороны – действительное положительное число s. Саша выиграет, если опишет теперь вокруг единичного круга 13-угольник, где длина k-й по величине стороны равна s. Может ли Люда ему помешать? (Сторона k-я по величине, если найдутся $k-1$ сторон не короче нее и при этом остальные $13-k$ сторон не длиннее нее.)

А.Шаповалов

6. Обозначим через $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ произведение всевозможных попарных разностей $a_i - a_j$, где $1 \le i < j \le n$. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ число $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ делится на $[1, 2, \ldots, n]$.

М.Берштейн

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов

LXXIII Московская математическая олимпиада

ЗАДАЧИ

6 класс

1. На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по желтым – 7 кусков, а если по зеленым – 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трех цветов?

А.Шаповалов

2. В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про свое золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Все мое золото я украл у Дракона.

Б: Ты лжешь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

И.Раскина

3. Поросенок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

А.Шаповалов

4. В обменном пункте совершаются операции двух типов:
1) дай 2 евро – получи 3 доллара и конфету в подарок;
2) дай 5 долларов – получи 3 евро и конфету в подарок.

Когда богатенький Буратино пришел в обменник, у него были только доллары. Когда ушел – долларов стало поменьше, евро так и не появились, зато он получил 50 конфет. В сколько долларов обошелся Буратино такой «подарок»?

И.Раскина

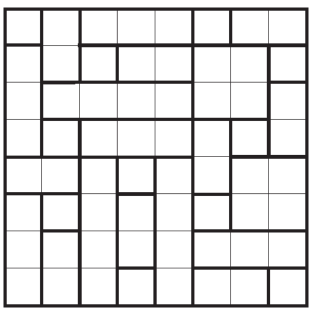

Рис. 1

5. Саша разрезал шахматную доску 8×8 по границам клеток на 30 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались даже углами (рис.1). Попытайтесь улучшить его достижение, разрезав доску на большее число прямоугольников с соблюдением того же условия.

А.Шаповалов

6. На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Мартовский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возможно, на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы тоже удалось выпить весь чай (т.е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными).

И.Раскина

7 класс

1. У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11?

Т.Голенищева-Кутузова

2. На вертикальную ось надели несколько колес со спицами. Вид сверху изображен на рисунке 2,*а*. После этого колеса повернули. Новый вид сверху изображен на рисунке 2,*б*. Могло ли колес быть: а) три; б) два?

Т.Голенищева-Кутузова, В.Клепцын, И.Ященко

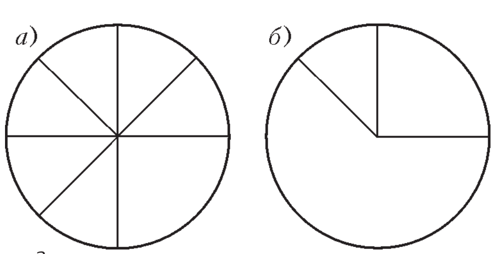

Рис. 2

3. Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но все же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

А.Шаповалов

4. В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку – 18 голосов, за Кукушку и Петуха – 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырех названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

И.Раскина

5. а) Поросенок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

б) А может ли Наф-Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом?

А.Шаповалов

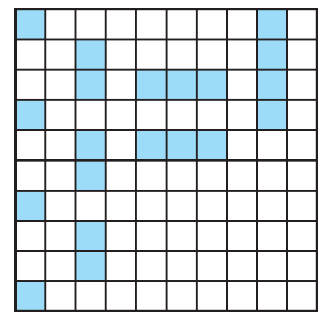

Рис. 3

6. Легко разместить комплект кораблей для игры в «Морской бой» на доске 10×10 (рис.3). А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект? (Напомним, что согласно правилам корабли не должны соприкасаться даже углами.)

А.Блинков

8 класс

1. КУБ является кубом. Докажите, что ШАР кубом не является. (КУБ и ШАР – трехзначные числа, разные буквы обозначают различные цифры.)

А.Хачатурян

2. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (рис.4). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.

А.Шаповалов

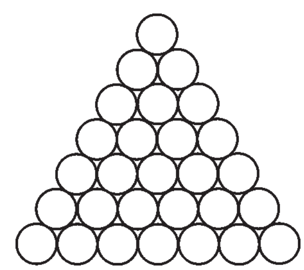

Рис. 4

3. В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

М.Волчкевич

4. См. задачу М2189 «Задачника «Кванта».

5. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности. Точки M и N – середины сторон BC и AC соответственно. Известно, что угол AIN прямой. Докажите, что угол BIM также прямой.

6. В некоторых клетках квадрата 20×20 стоит стрелочка в одном из четырех направлений. На границе квадрата все стрелочки смотрят вдоль границы по часовой стрелке (рис.5). Кроме того, стрелочки в соседних (возможно, по диагонали) клетках не смотрят в противоположных направ-

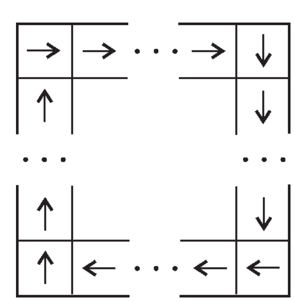

Рис. 5

лениях. Докажите, что найдется клетка, в которой стрелочки нет.

Т.Голенищева-Кутузова, В.Клепцын, И.Ященко

9 класс

1. Съев на пустой желудок трех поросят и семерых козлят, Серый Волк все еще страдал от голода. Зато в другой раз он съел на пустой желудок 7 поросят и козленка и страдал уже от обжорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок 11 козлят?

И.Раскина

2. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведен перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB.

А.Блинков, Ю.Блинков

3. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

А.Канель-Белов

4. На окружности расставлены 2009 чисел, каждое из которых равно +1 или –1, причем не все числа одинаковые. Рассмотрим всевозможные десятки подряд стоящих чисел. Найдем произведения чисел в каждом десятке и сложим их. Какая наибольшая сумма может получиться?

А.Толпыго

5. Дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная из 37 звеньев. Через каждое звено провели прямую. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

А.Толпыго

6. См. задачу М2190 «Задачника «Кванта».

10 класс

1. Известно, что сумма любых двух из трех квадратных трехчленов x^2+ax+b, x^2+cx+d, x^2+ex+f не имеет корней. Может ли сумма всех этих трехчленов иметь корни?

А.Канель-Белов

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причем отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Найдите MN, если известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

М.Волчкевич

3. Можно ли, применяя к числу 2 функции sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg в любом порядке, получить число 2010?

С.Маркелов

4. Сумма цифр числа n равна 100. Может ли сума цифр числа n^3 равняться 100^3?

А.Канель-Белов

5. В неравнобедренном треугольнике две медианы равны двум высотам. Найдите отношение третьей медианы к третьей высоте.

А.Заславский

6. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $n+1$ точек обязательно есть две, соединенные отрезком. Докажите, что всего проведено не менее $7n$ отрезков.

А.Райгородский

11 класс

1. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$1:\left(a+2010:\left(b+1:c\right)\right),$$

где a, b, c – попарно различные ненулевые цифры?

П.Бородин, О.Косухин

2. В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведерка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши – рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушел на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

А.Канунников

3. Докажите, что если числа x, y, z при некоторых значениях p и q являются решениями системы

$$\begin{cases} y = x^n + px + q, \\ z = y^n + py + q, \\ x = z^n + pz + q, \end{cases}$$

то выполнено неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \ge x^2z + y^2x + z^2y$, где: а) $n = 2$; б) $n = 2010$.

О.Косухин

4. Функция f каждому вектору $\vec{v}$ (с общим началом в точке O) пространства ставит в соответствие число $f(\vec{v})$, причем для любых векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ и любых чисел α, β значение $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(\vec{u})$ или $f(\vec{v})$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?

И.Сергеев

5. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PBA = \angle PCD = 90°$. Точка M – середина стороны AD, причем $BM = CM$. Докажите, что $\angle PAB = \angle PDC$.

В.Филимонов

6. Команда из n школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких ее участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого ее члена, может гарантированно получить: а) при $n = k = 2$; б) при произвольных фиксированных n и k?

М.Лобанов, В.Ушаков

Публикацию подготовил С.Дориченко

Избранные задачи Московской физической олимпиады

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. Почтальон Печкин выехал из райцентра Сметанино в деревню Простоквашино с посылкой для кота Матроскина. Он ехал со скоростью 15 км/ч, а расстояние, которое ему надо было проехать, составляет 15 км. Приехав в Простоквашино, он обнаружил, что по дороге потерял посылку, и сразу же поехал за ней обратно. Когда он нашел посылку, то подобрал ее и снова поехал к коту. Тем временем кот Матроскин, который хотел как можно быстрее получить посылку, сразу после выезда Печкина из Простоквашино побежал за почтальоном со скоростью 5 км/ч и получил посылку через полчаса из рук Печкина, который уже снова ехал в Простоквашино. На каком расстоянии от Сметанино Печкин потерял посылку?

М.Семенов

2. На соревнованиях пахарей надо было как можно быстрее обработать трактором с навесными орудиями – боронами шириной 10 м – квадратный участок поля площадью 1 гектар (т.е. 100×100 м). Трактор при этом мог двигаться только вперед со скоростью 2 м/с и совершать повороты с минимальным радиусом 10 м (по центру трактора) на той же скорости. Вне поля достаточно места для любых разворотов, и вся площадь поля должна быть пробороновна. Предложите и нарисуйте траекторию движения трактора, при которой время, необходимое для обработки поля, будет как можно меньшим. Рассчитайте, чему равно это время.

М.Семенов

3. На легком горизонтальном рычаге с двумя опорами находятся пустые легкие бочки. Расстояние от оси левой бочки до левой опоры $a = 2$ м, от оси правой бочки до правой опоры $c = 3$ м, расстояние между опорами $b = 1$ м. В обе бочки одновременно начинают наливать с небольшой скоростью воду из разных кранов. Как должны соотноситься скорости v_1 и v_2 наполнения бочек, т.е. массы воды, поступающей в единицу времени в каждую бочку, чтобы система оставалась в равновесии?

Д.Харабадзе

4. В известном мультфильме про Винни-Пуха есть явное несоответствие: Винни-Пух надувает воздушный шарик обычным воздухом и взлетает на нем. Для того чтобы воздушный шарик поднимался (а тем более поднимал Винни-Пуха), нужно, чтобы он был наполнен легким газом, плотность которого меньше плотности окружающего воздуха. Можно предположить, что Винни-Пух надувает шарик теплым воздухом, плотность которого, как известно, меньше плотности холодного. Рассчитайте, каким должен быть в этом случае минимальный необходимый для подъема объем шарика, если плотность теплого воздуха внутри шарика $\rho_1 = 1{,}13$ кг/м^3, плотность холодного воздуха снаружи $\rho_2 = 1{,}29$ кг/м^3, а масса Винни-Пуха $m = 5$ кг.

М.Ромашка

8 класс

1. На углу стандартного кирпича с размерами $250 \times 125 \times 65$ мм находится Муравьишка. Он может ползать по поверхности кирпича в любом направлении со скоростью 20 мм/с. За какое минимальное время он сможет добраться до максимально удаленного от него угла кирпича?

С.Варламов

2. Для удержания тяжелого груза используется система из шести блоков и нескольких тросов, прикрепленных к потолку так, как показано на рисунке 1. С какой силой F надо тянуть вниз за конец троса, свисающего с левого блока, чтобы удерживать груз массой M = 500 кг в равновесии? Участки тросов, не лежащие на блоках, вертикальны, массой блоков и тросов, а также трением можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

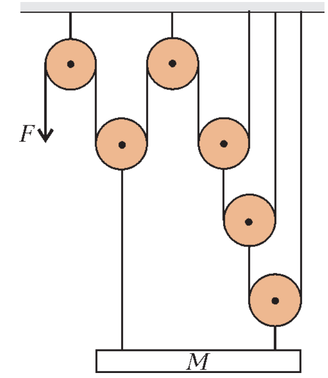

Рис. 1

Е.Якута

3. В вертикальный цилиндрический стакан высотой H = = 10 см и площадью дна $S = 100$ см^2 налита вода до уровня $h = 8$ см. В стакан опустили, не разбрызгивая воду, $N_1 = 100$ стальных шариков объемом $V_1 = 1$ см^3 каждый, а затем – еще $N_2 = 50$ ледяных кубиков объемом $V_2 = 2{,}5$ см^3. Какова оказалась после этого сила F давления на дно стакана? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, стали $\rho_1 = 7{,}8$ г/см^3, льда $\rho_2 = 0{,}9$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Трением и атмосферным давлением пренебречь.

М.Семенов

4. Король любит за завтраком пить кофе, имеющий температуру ровно 50 °C. Хитрый слуга наливает в чашку 60 г кофе, имеющего температуру 90 °C, ждет, пока он остынет до некоторой температуры, затем добавляет в чашку 20 г воды, имеющей температуру 20 °C, перемешивает содержимое чашки и сразу подает королю. Какую температуру имеет кофе в момент добавления в него воды? Удельные теплоемкости воды и кофе считать одинаковыми.

М.Ромашка

9 класс

1. В арке около одной из стен стоит мальчик и бросает мяч из точки A, находящейся на высоте h = 170 см над землей (рис.2). Начальная скорость мяча $v_0 = 15$ м/с. Мяч возвращается в точку бросания спустя t = 3 с, описав траекторию, по-

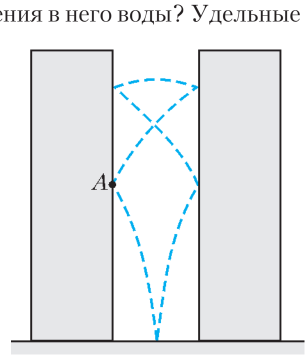

Рис. 2

казанную на рисунке. Чему равно расстояние d между стенами арки? Все соударения мгновенные и абсолютно упругие, сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$.

М.Ромашка

2. Легкая тонкостенная чаша в виде прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер a, b и c свободно подвешена на горизонтальной оси так, что нижняя грань чаши с размерами $a \times c$ горизонтальна, а верхняя открыта (т.е. отсутствует). Ось проходит перпендикулярно граням параллелепипеда с размерами $a \times b$ в плоскости их симметрии на расстоянии $h < b/2$ от нижней грани (рис.3). Чаша начинает

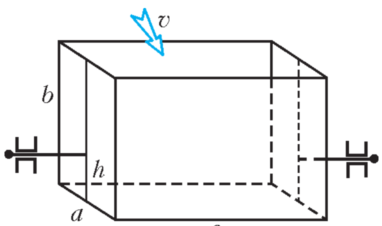

Рис. 3

наполняться водой со скоростью $v\ \left(\text{м}^3/\text{с}\right)$. Через какое время чаша опрокинется, повернувшись вокруг оси? Что с ней будет происходить в дальнейшем, если скорость наполнения не меняется?

Д.Харабадзе

3. Современный лабораторный блок питания работает так. Сначала ему задаются значения тока I_0 и напряжения U_0. После подключения нагрузки блок сам выбирает один из двух режимов: либо поддерживает напряжение на нагрузке равным U_0, если при этом ток через нагрузку не больше I_0, либо поддерживает ток через нагрузку равным I_0, если при этом напряжение на нагрузке не больше U_0. При каком сопротивлении нагрузки R в ней будет выделяться наибольшая мощность и чему она равна?

А.Андрианов

10 класс

1. На гладком горизонтальном столе находится чаша массой M с полусферической выемкой радиусом R с гладкими стенками (рис.4). На самый край выемки чаши поместили монету массой m, размеры которой значительно меньше размеров выемки. В начальный момент монета и чаша друг относительно друга не двигались. Монету и чашу одновременно отпустили. С каким ускорением движется монета, проходя самое нижнее положение?

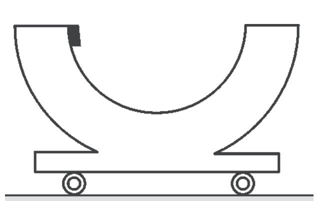

Рис. 4

С.Варламов

2. В горизонтальной крышке стола пропилена полуцилиндрическая канавка радиусом $R = 20$ см, ось канавки совпадает с верхней плоскостью крышки стола. На краю канавки сидит муравей, который хочет перебраться через нее. Школьник решил помочь муравью, сделав мостик из прямых отрезков проволоки. Но все куски проволоки, которые были в распоряжении школьника, имели длину $L = 38$ см. Тогда школьник сделал мостик из двух проволок, расположив их так, как показано на рисунке 5, причем точку A, в которой концы проволок воткнуты в дно канавки, он выбрал случайным образом. Муравей может ползти вверх по проволоке с постоянной скоростью $v = 0{,}5$ см/с, а вниз – с постоянной скоростью $2v = 1$ см/с. Найдите максимальное время и минимальное время, за которое муравей сможет перебраться через канавку по такому мостику.

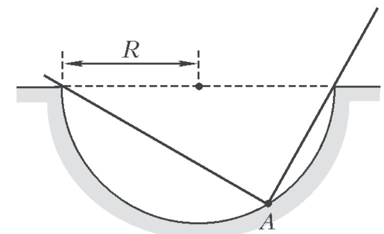

Рис. 5

А.Якута

3. Горизонтальный сосуд с газом разделен на две части подвижным вертикальным поршнем, не проводящим тепло. Вначале давление в сосуде было p_0, а температура была T_0. Нагревая газ в левой части сосуда до температуры $T_0 + \Delta T$, исследуют зависимость давления в системе p от параметра $x = \Delta T/T_0$. Эта зависимость оказывается линейной: $p = p_0(1 + \alpha x)$ с параметром $\alpha = 0{,}5$. Найдите отношение $k = \nu_1/\nu_2$ количеств газа в левой и правой частях сосуда. Температура в правой части сосуда поддерживается постоянной, трением между поршнем и стенками сосуда можно пренебречь.

О.Шведов

4. Имеются три концентрические хорошо проводящие металлические сферы радиусами R, $2R$ и $3R$. Пространство между первой и второй сферами заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением 11ρ, а между второй и третьей – жидкостью с диэлектрической проницаемостью 11ε и удельным сопротивлением ρ. Между внутренней и внешней сферами при помощи батарейки поддерживается постоянная разность потенциалов U. Чему равен заряд q_2 средней сферы? Какова сила тока I, который течет при этом в цепи?

Р.Усов

5. Школьник Вася присоединяет к источнику питания, схема которого изображена на рисунке 6, электрические лампочки. Присоединив к источнику одну электрическую

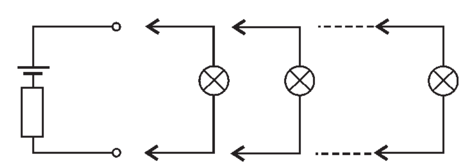

Рис. 6

лампочку, Вася обнаружил, что на ней выделяется мощность P. Присоединив к источнику четыре такие же лампочки, соединенные параллельно, Вася обнаружил, что на них вместе также выделяется мощность P. Какая мощность P_n будет выделяться на лампочках, когда Вася подсоединит к источнику питания n параллельно соединенных лампочек? Считайте, что сопротивление лампочки не зависит от силы тока.

О.Шведов

11 класс

1. Кирпич с размерами $a \times a \times a\sqrt{11}$ поставили на квадратную грань так, что его длинные ребра оказались вертикальными. На одном из верхних углов кирпича находится Муравьишка, который может ползать по вертикальным граням кирпича со скоростью v, а по горизонтальной грани – с некоторой другой постоянной скоростью. Вдоль ребер кирпича он ползать не умеет, но может их пересекать. Муравьишка переполз на максимально удаленный от него угол кирпича. При этом он пересекал одно из ребер кирпича только один раз и строго посередине, а время, которое он затратил на путешествие, оказалось минимально возможным. Чему равно время t его путешествия? С какой скоростью u Муравьишка может ползать по горизонтальной грани кирпича?

А.Якута

2. На гладкой горизонтальной плоскости лежат N маленьких одинаково заряженных шариков равной массы. Суммарный заряд шариков Q, суммарная масса M. Шарики связаны друг с другом непроводящей легкой нерастяжимой нитью, образуя кольцо (рис.7). Длина нити между двумя соседними шариками l. Система находится в вертикальном магнитном поле B, причем суммарный поток магнитной индукции, пронизывающий кольцо, равен Φ_0. Изначально все шарики покоятся. В некоторый момент магнитное поле выключают. Найдите изменение ΔF силы натяжения нити после выключения поля.

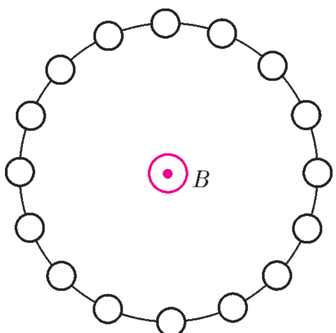

Рис. 7

А.Баринов

3. Взяв старый пленочный фотоаппарат, школьник Вася отправился фотографировать соревнования по легкой атлетике. Сделав достаточное количество фотографий с разными выдержками, Вася обнаружил, что спортсмены, пробегавшие на расстоянии $a_0 = 10$ м от фотоаппарата перпендикулярно оптической оси объектива, получались на снимках четкими, если затвор фотоаппарата открывался на время, не превосходящее $\tau = 0{,}001$ с. При этом неподвижные предметы, расположенные на расстояниях менее $a_1 = 5$ м от фотоаппарата, получались размытыми. Определите диаметр D объектива фотоаппарата. Скорости спортсменов считайте равными $v = 10$ м/с.

О.Шведов

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. Друзья Вася и Петя, живущие в деревнях Липовка и Демушкино, были в гостях у своего друга Саши, который живет в деревне Малиновка, расположенной точно посередине между деревнями Липовка и Демушкино. Нагостившись у Саши, Вася и Петя одновременно вышли и отправились каждый в свою деревню, чтобы вернуться домой через $t_0 = 60$ мин. Спустя $t_0/6 = 10$ мин после выхода своих друзей Саша обнаружил, что каждый из друзей забыл у него дома свои вещи. Саша решил догнать каждого из них по очереди и отдать им вещи. С какой минимальной скоростью u должен бежать Саша, чтобы успеть догнать каждого из своих друзей до того, как они вернутся в свои деревни? Скорости Васи и Пети одинаковы и равны $v = 5$ км/ч.

М.Ромашка

2. На горизонтальном столе стоит пластиковый стаканчик для чая, имеющий форму усеченного конуса. Масса стаканчика $m = 20$ г, диаметр его дна $d = 5$ см. В стаканчик поместили тонкую однородную палочку массой $M = 10$ г, расположив ее так, как показано на рисунке 8. При этом палочка оказалась наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. При какой длине палочки L стаканчик не перевернется?

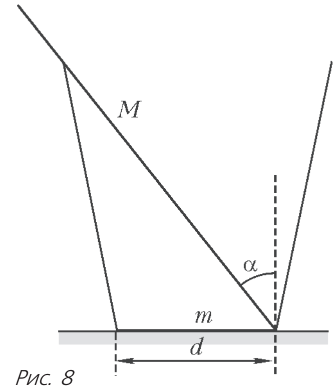

Рис. 8

А.Якута

3. Через неподвижный блок перекинута легкая нерастяжимая нить, на концах которой висят два стальных цилиндрических бруска (рис.9). Масса левого бруска $m_1 = 1$ кг. Вначале к нижнему основанию правого бруска был приморожен кусок льда неизвестной массы, а сами бруски удерживались вручную. Затем правый брусок с примороженным к нему куском льда погрузили в воду комнатной температуры, налитую в очень широкий сосуд, после чего бруски отпустили. Сразу после этого оказалось, что система находится в равновесии, когда правый брусок погружен в воду на половину своей высоты. После того, как весь примороженный лед растаял, правый брусок целиком погрузился в воду. При этом система снова оказалась в равновесии. Найдите массу правого бруска m_2, а также массу примороженного к нему куску льда $m_л$. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность стали $\rho_с = 7800$ кг/м^3. Изменением уровня воды в сосуде пренебречь.

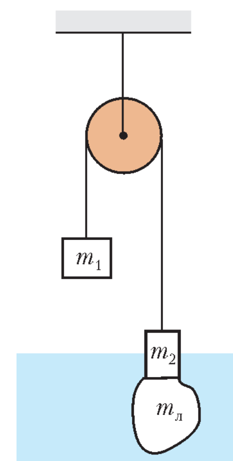

Рис. 9

Е.Якута

4. В цилиндрический стакан налита вода до уровня $h_0 = 10$ см при температуре $t_0 = 0$ °C. В стакан бросают алюминиевый шарик, вынутый из другого сосуда с водой, кипящей при температуре $t_к = 100$ °C. При этом уровень воды в стакане повышается на $x = 1$ см. Какой будет установившаяся температура в стакане? Удельные теплоемкости воды и алюминия $c_в = 4200$ Дж/(кг·°C) и $c_а = 9200$ Дж/(кг·°C), плотности воды и алюминия $\rho_в = 1000$ кг/м^3 и $\rho_а = 2700$ кг/м^3.

О.Шведов

9 класс

1. Какую силу F в горизонтальном направлении надо приложить к концу нити в точке A системы, изображенной на рисунке 10, чтобы груз массой m_2 не отрывался от подставки, а нить, к другому концу которой прикреплен груз массой m_1, оставалась натянутой? Каким при этом может быть ускорение $\vec{a}$ груза массой m_1? Нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно g.

М.Семенов

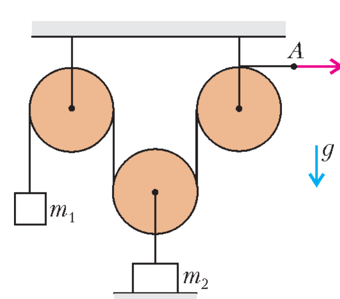

Рис. 10

2. В цилиндре под поршнем находятся вода и водяной пар при температуре 100 °С. Снаружи цилиндра – вакуум, на поршне стоит груз массой m = 100 кг, позволяющий создать внутри цилиндра давление $p = 10^5$ Па. Какое количество теплоты Q следует сообщить смеси, чтобы поднять груз на высоту h = 1 м от начального положения? Удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг, плотность водяного пара $\rho = 0{,}58$ кг/м^3.

О.Шведов

3. Вова и Дима решили изготовить прибор для измерения сопротивления резисторов – омметр. Для этого они взяли батарейку с известным постоянным напряжением U = 1,5 В, резистор с известным сопротивлением R = 150 Ом, миллиамперметр с диапазоном от 0 до 20 мА, соединительные провода и две клеммы для подсоединения измеряемого сопротивления. Нарисуйте, какие возможные схемы омметра из этих элементов могут собрать Вова и Дима, и объясните, как в этих схемах показания миллиамперметра можно перевести в величину измеряемого сопротивления R_x.

Ю.Старокуров

10 класс

1. Тонкую гладкую однородную веревку массой m и длиной L расстелили на горизонтальной поверхности, обернув на половину оборота вокруг вертикальной цилиндрической колонны радиусом $R \ll L$. Первоначально веревку тянули за оба конца, находившиеся на одном и том же расстоянии от колонны, с одинаковой силой F, затем один из концов отпустили, продолжая действовать с той же силой на другой ее конец. В течение какого промежутка времени t после этого длина участка веревки, соприкасающегося с колонной, будет оставаться неизменной?

К.Парфенов

2. По вогнутому мосту, образующему дугу окружности радиусом R, движется вагонетка массой M. К вагонетке привязан трос длиной L, на конце которого закреплен груз массой m (рис.11). В момент, когда вагонетка проходила нижнюю точку моста, трос был расположен вертикально, а скорости вагонетки и груза были равны v_1 и v_2 соответственно. Найдите в этот момент силу натяжения троса T и силу F, с которой вагонетка давит на рельсы. Трос невесом и нерастяжим, трение не учитывать, размерами вагонетки и груза пренебречь.

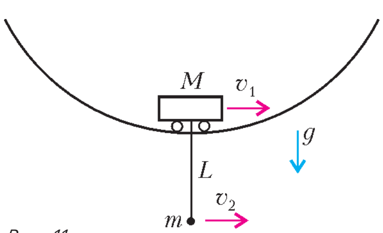

Рис. 11

М.Ромашка

3. Автомобиль «Камаз» проехал из Санкт-Петербурга в Москву за время t = 16 ч, пройдя по дороге 720 км и истратив объем V = 200 л дизельного топлива. Движительная установка автомобиля состоит из дизельного двигателя внутреннего сгорания, трансмиссии и шасси. Найдите КПД (эффективность) автомобиля и его среднюю механическую мощность на всем пути, считая, что механические потери в трансмиссии и шасси составляют α = 5%, а двигатель работает по циклу Дизеля, рабочим телом которого является идеальный трехатомный газ (теплоемкость одного моля такого газа в изохорном процессе $C_V = 3R$). Цикл Дизеля состоит из четырех процессов: адиабатного сжатия рабочего тела, изобарного подвода тепла к рабочему телу, адиабатного расширения рабочего тела и его изохорного охлаждения, в конце которого осуществляется выпуск продуктов сгорания топлива в атмосферу. Удельная теплота сгорания дизельного топлива q = 42 МДж/кг, а его плотность ρ = 0,82 кг/л. Максимальный объем камеры сгорания 6000 мл, минимальный 375 мл, максимальный объем в изобарном процессе 1500 мл, максимальное давление 40 атм, максимальное давление при изохорном охлаждении 6 атм.

Ю.Старокуров

4. Найдите сопротивление между клеммами A и B бесконечной цепи, схема которой изображена на рисунке 12. Сопротивление каждого резистора равно R.

Д.Харабадзе

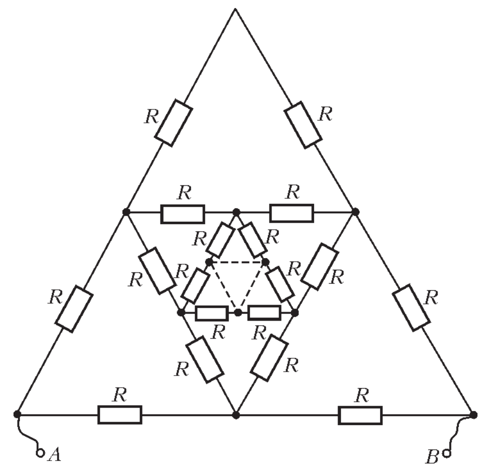

Рис. 12

11 класс

1. На гладкой горизонтальной плоскости покоится гладкая горка высотой H и массой M, а на ее вершине лежит небольшая шайба массой m (рис.13). После легкого толчка шайба скатывается с горки и скользит перпендикулярно массивной вертикальной стенке, движущейся по плоскости в сторону горки. Испытав абсолютно упругое столкновение со стенкой, шайба скользит в обратном направлении, к горке. С какой минимальной скоростью u должна двигаться стенка, чтобы шайба смогла преодолеть горку?

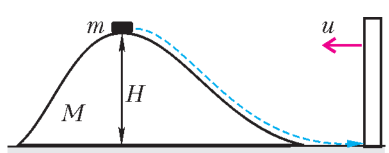

Рис. 13

М.Семенов

2. На pV-диаграмме (рис.14) представлен цикл 1–2–3–4, который проводится с идеальным одноатомным газом. Участки 2–3 и 4–1 цикла соответствуют изохорным процессам, на участках 1–2 и 3–4 цикла давление газа изменяется прямо пропорционально его объему. Давление газа в состояниях 1 и 3 одно и то же. Найдите КПД этого цикла, если отношение максимального объема газа к его минимальному объему n = 1,5.

А.Якута

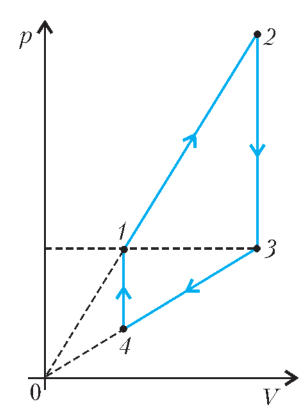

Рис. 14

3. На длинный (полубесконечный) деревянный брусок намотаны восемь одинаковых длинных проволок, начала которых попарно соединены, как показа-

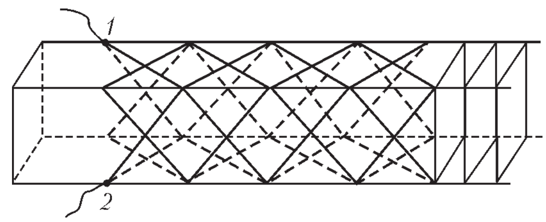

Рис. 15

но на рисунке 15. Найдите сопротивление R_{12} между точками *1* и *2* этой бесконечной цепи в виде «чулка», надетого на брусок, если сопротивление участка провода, находящегося между двумя соседними пересечениями проволок, равно R. В каждой точке пересечения проволок имеется электрический контакт.

Ю.Старокуров

4. Тяжелый металлический стержень AB (рис.16) подвешен в горизонтальном положении на двух легких вертикальных проводах в лаборатории, где в некотором объеме создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Участок CD стержня все время находится в магнитном поле, а провода-подвески находятся вне поля. В первом опыте на стержень подали напряжение, и в нем очень быстро возник ток силой I. Максимальный угол, на который подвески стержня отклонились от вертикали, был при этом $\alpha = 60°$. Во втором опыте силу тока через стержень плавно увеличивали от нуля до того же значения I. На какой угол β отклонились подвески во втором опыте?

М.Ромашка

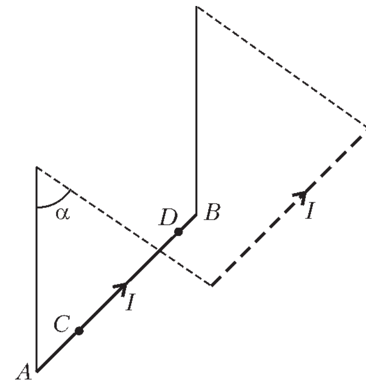

Рис. 16

5. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ см и $F_2 = 10$ см расположены на одной прямой так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система линз формирует действительное изображение прямоугольника со сторонами $a_1 = 1$ мм и $b_1 = 2$ мм, также являющееся прямоугольником. Сторона a_1 прямоугольника лежит на главной оптической оси системы. На каком расстоянии L друг от друга расположены линзы? Каковы размеры изображения a_2 и b_2?

О.Шведов

Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. От $Г$ к $А$. Когда теплоход плывет от $Б$ до $Г$, он проплывает мимо $В$, после чего ему плыть еще час. Значит, дорога от $Б$ до $В$ занимает 1 час. А в обратную сторону за час можно уплыть дальше – от $В$ до $А$! Тем самым, от $Б$ до $В$ мешает плыть течение.

2. См. рис. 1.

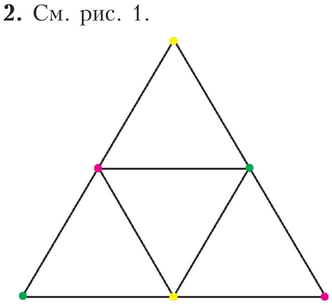

Рис. 1

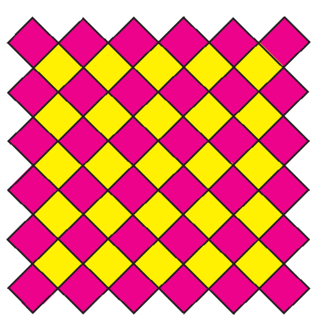

Рис. 2

3. Если раскрасить квадратики в два цвета так, как показано на рисунке 2, то решение становится очевидным. Общее число квадратиков в каждом ступенчатом квадрате равно $n^2 + (n-1)^2$.

4. Барон не ошибается, поскольку

$$1\frac{1}{10}\cdot 1\frac{1}{11}\cdot\ldots\cdot 1\frac{1}{98}\cdot 1\frac{1}{99} = \frac{11}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99} = \frac{100}{10} = 10$$

и

$$1\frac{1}{100}\cdot 1\frac{1}{101}\cdot\ldots\cdot 1\frac{1}{998}\cdot 1\frac{1}{999} = \frac{101}{100}\cdot\frac{102}{101}\cdot\ldots\cdot\frac{999}{998}\cdot\frac{1000}{999} = \frac{1000}{100} = 10.$$

5. Шпион может поступить так. Он обходит штаб по кругу, считая комнаты, и на очередной доске (предварительно все с нее стирая) пишет порядковый номер комнаты, в которой стоит эта доска. Так он действует, пока не встретит комнату с доской, на которой написана единица. Это, возможно, еще не исходная комната (в штабе изначально могли быть доски, на которых написана единица). Он дописывает к 1 на этой доске звездочку, возвращается в обратном направлении в комнату, из которой начинал обход, и проверяет, появилась ли рядом с единицей звездочка. Если появилась, то шпион обошел весь штаб и узнал количество комнат в нем. Если нет, надо вернуться к доске с 1 и звездочкой, заменить надпись на очередной номер и продолжить обход.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. $b^2 - a^2$. Высота трапеции делит ее большее основание на отрезки $\frac{y-x}{2}$ и $\frac{y+x}{2}$ (рис. 3). Дважды применив теорему Пифагора, получим равенство $a^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{y+x}{2}\right)^2$, из которого после несложных преобразований получается ответ.

17. Вопрос в этой задаче был поставлен не вполне корректно. Дело в том, что описанная в условии задачи ситуация невозможна. Если бы шарик двигался так, как сказано в условии, то отражения действительно происходили бы последовательно от сторон BC, CD, DA, AB и так далее по циклу. Занумеруем звенья траектории шарика подряд числами 1, 2, …, 2011 (их на одно больше, чем отражений). Заметим, что звенья с нечетными номерами будут параллельны друг другу и звенья с четными номерами будут параллельны друг другу – так как углы, под которыми происходят отражения, чередуются, принимая всего два разных значения (сумма этих двух значений равна 90