Долгий путь короля

Н.БЕЛУХОВ (БОЛГАРИЯ)

Посвящается Евгению Гику

В «КВАНТЕ» №3 ЗА 2000 ГОД БЫЛА НАПЕЧАТАНА НЕБОЛЬшая заметка И.Акулича «Прогулки короля». В ней автор поставил несколько интересных открытых вопросов, в том числе и такой:

Какова наибольшая возможная длина замкнутого пути короля, обошедшего шахматную доску 8×8?

Более точно, пусть король обошел шахматную доску, побывав на каждой клетке по разу, и последним ходом вернулся в исходную клетку. Если соединить отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, получится замкнутая ломаная (скорее всего, самопересекающаяся). Какова наибольшая возможная длина этой ломаной?

Ясно, что ломаная стоит из отрезков двух типов – коротких (длины 1) и длинных (длины $\sqrt{2}$). Поэтому достаточно найти минимальное возможное количество коротких ходов короля.

Этим мы и займемся. Фактически мы решим задачу в общем случае – для досок $2n\times 2n$ (задача для досок с нечетной длиной стороны решается, как мы скоро увидим, совсем просто).

Рассмотрим шахматную доску $2n\times 2n$ и построим вспомогательную доску, которая называется доской Уэлча. Для этого уберем на исходной доске все клетки одного цвета, а каждую клетку другого цвета заменим на квадрат с длиной стороны в $\sqrt{2}$ раз больше, который повернут на $45°$ вокруг центра клетки (рис.1).

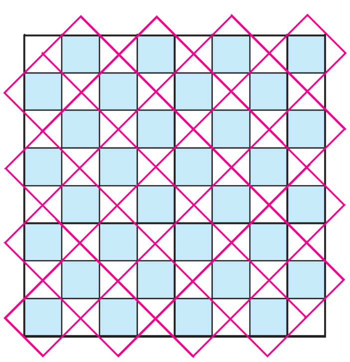

Рис. 1

Пока король делает длинные, т.е. диагональные, ходы, он остается на клетках одного цвета. Более того, такие ходы короля соответствуют движению «хромой» ладьи по доске Уэлча (хромая ладья ходит как обычная, но за ход сдвигается только на соседние клетки).

Если считать, что есть две доски Уэлча – по одной для белых и черных клеток исходной доски, то каждый короткий ход короля можно понимать как прыжок ладьи с «белой» доски Уэлча на «черную» или наоборот. Поэтому любой маршрут короля представляется как путь хромой ладьи по двум доскам Уэлча, прыгающей с одной доски на другую, когда король делает короткий ход. Число прыжков равно числу коротких ходов короля. Поскольку наша цель – наименьшее количество таких ходов, будем искать маршрут хромой ладьи по одной доске Уэлча, который состоит из наименьшего числа непрерывных участков.

Покрасим доску Уэлча в шахматном порядке, как показано на рисунке 2. На любом участке пути нашей ладьи белые

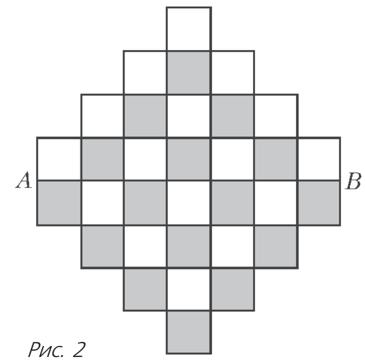

Рис. 2

и черные клетки чередуются, поэтому разница между количествами одних и других на любом участке не превосходит 1.

Если исходная шахматная доска имеет размеры $(2n+1)\times(2n+1)$, то на одной из раскрашенных досок Уэлча клеток одного цвета будет больше, чем другого, причем не меньше чем на $2n+1$. Это означает, что потребуется не меньше $2n+1$ непрерывных кусков пути, чтобы посетить все клетки одной доски. Следовательно, будет не меньше $4n+2$ прыжков с одной доски на другую (по два прыжка на каждый кусок пути).

Итак, если у шахматной доски нечетный размер, то король, обойдя доску по замкнутому пути, сделает не меньше $4n+2$ коротких ходов. Это достаточно большое число, и построить соответствующий пример пути не очень сложно.

Упражнение. Сделайте это.

Если же шахматная доска четного размера, то каждая из досок Уэлча содержит поровну белых и черных клеток. Но их расположение даст нам ключ к решению. Пусть при движении по доске Уэлча ладья оставляет след – линию, соединяющую центры клеток, которые ладья последовательно посещает. Когда ладья прыгает (на другую доску), линия прерывается, зато потом начнется новая. Если ладья посетила все клетки, то несколько таких линий «покрывают» всю доску.

Мысленно разрежем доску, изображенную на рисунке 2, на две одинаковые части по отрезку AB. Этот отрезок делит некоторые линии на части. Заметим, что нижняя половина доски содержит на n черных клеток больше, чем белых. Это означает, что есть не меньше n линий или их частей, которые начинаются и заканчиваются в черной клетке. Аналогично, рассматривая верхнюю половину, получим, что есть не меньше n линий или их частей, которые начинаются и заканчиваются в белой клетке. Всего получается не меньше $2n$ линий или их частей. Но склеивание частей линий по отрезку AB уменьшит их количество не больше чем на n (ведь есть только n возможных мест склейки).

Значит, на каждой доске Уэлча было нарисовано не меньше n линий. Получается, что король должен совершить не меньше $2n$ горизонтальных или вертикальных ходов. Отметим, что для частного случая обычной шахматной доски 8×8 И.Акулич получил такую же оценку гораздо проще.

Теперь приступим к построению примеров, в которых король делает ровно $2n$ коротких ходов.

На рисунках 3 и 4 показаны примеры самых длинных возможных маршрутов на доске 8×8. Таким образом, исходная задача решена.

Маршрут рисунка 3 несложно перенести на случай произвольного n, что дает решение в общем случае. Тем не менее, мы сейчас опишем конструкцию, которая позволила получить эти примеры. Оказывается, что она помогает построить еще много максимальных маршрутов, и автор подозревает, что с ее помощью можно описать вообще все такие маршруты (это пока строго доказано лишь для $n \le 4$).

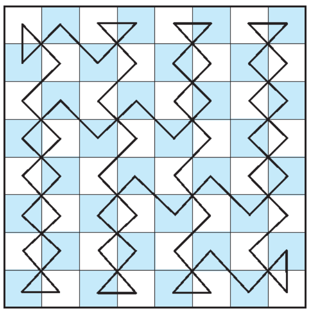

Рис. 3

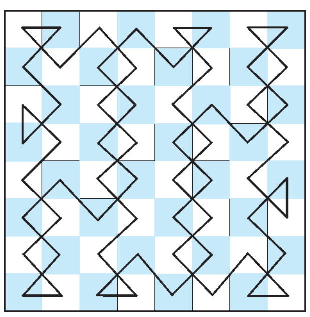

Рис. 4

Для наглядности разберем случай доски 8×8 (т.е. случай $n = 4$), все рассуждения легко переносятся и на общий случай. Сначала подготовим шахматную доску: отметим центры всех клеток и нарисуем синие, красные и зеленые отрезки, как показано на рисунке 5.

Из центра каждой клетки выходит ровно три отрезка – по одному отрезку каждого цвета.

Красные и зеленые отрезки образуют четыре «кольца»: первое кольцо состоит из одинарных сплошных отрезков, второе – из двойных сплошных, третье – из одинарных пунктирных, и четвертое – из двойных пунктирных отрезков.

Зафиксируем любое четырехбуквенное слово – код, каждая буква которого – либо «*к*», либо «*з*». Если первая буква кода – «*к*», то в первом кольце оставим только красные отрезки, а зеленые сотрем. Если же первая буква – «*з*», то наоборот, оставим в первом кольце только зеленые отрезки, а красные сотрем. Аналогично, глядя на вторую букву кода, во втором кольце сотрем отрезки либо красного, либо зеленого цвета. Так же поступим и с третьим, и с четвертым кольцом. В результате, в соответствии с выбранным кодом, на рисунке 5 мы сотрем половину отрезков в каждом кольце. Например, если выбрать код «*кзкк*», то после стирания мы увидим ситуацию, изображенную на рисунке 6.

Рассмотрим набор отрезков, оставшийся после стирания. В каждом кольце кроме диагональных отрезков останутся либо ровно два горизонтальных, либо ровно два вертикальных отрезка, т.е. всего останется ровно 8 горизонтальных и вертикальных отрезков (как и должно быть в самом длинном замкнутом пути короля).

Видим, что из центра каждой клетки теперь выходит ровно два отрезка, один из которых синий, а другой – либо

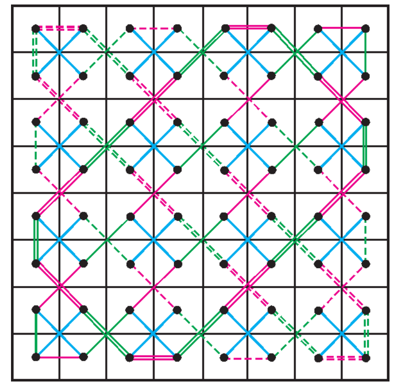

Рис. 5

красный, либо зеленый. Значит, объединение отрезков является либо замкнутым циклом, либо объединением нескольких циклов.

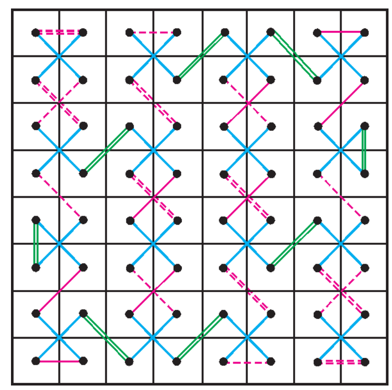

Рис. 6

В первом случае мы и получаем нужный пример обхода короля.

Теперь попробуем разобраться, какое условие на код надо наложить, чтобы объединение отрезков образовало один цикл (а не распалось на несколько циклов). Заметим, что при движении по отрезкам их цвета чередуются следующим образом: *снснснснснсн*..., где *с* – синий, а *н* – либо *к* (красный), либо *з* (зеленый). Можно считать, что мы выполняем «двойные ходы» вида «*К*» (по синему, а затем по красному отрезкам) или вида «*З*» (по синему, а затем по зеленому отрезкам).

Занумеруем клетки парами (i, j), где i – номер столбца (считая слева направо), а j – номер строки (считая снизу вверх). Начнем двигаться, например, с клетки $(1, 2)$, выйдя из нее по синему отрезку. В какой-то момент после k «двойных ходов» мы снова впервые возвратимся в клетку $(1, 2)$.

Заметим, что выполнение ходов вида «*З*» не изменяет номер строки, в которой находится король. А при выполнении ходов вида «*К*», как нетрудно видеть, номер строки изменяется следующим образом: 2–1–3–5–7–8–6–4–2–1–... (далее по циклу). Это означает, что для возвращения во вторую строку требуется сделать количество ходов вида «*К*», кратное 8. Аналогично рассуждая, покажем, что для возвращения в первый столбец требуется сделать количество ходов вида «*З*», кратное 8. В частности, k делится на 8, $k = 8m$.

Далее, вернемся к рассмотрению четырех колец красных и зеленых отрезков. Вначале мы находимся в клетке $(1, 2)$, принадлежащей первому кольцу. При выполнении двойного хода мы проходим синий отрезок, отрезок первого кольца и оказываемся на первом кольце, при выполнении еще одного двойного хода – проходим синий отрезок, отрезок второго кольца и оказываемся на втором кольце. Далее, нетрудно отследить изменение номера кольца после очередного двойного хода: 1–1–2–3–4–4–3–2–1–1–2–3–4–4–3–2–1–… и т.д.

Например, для кода «*кзкк*» последовательность двойных ходов будет иметь вид *КЗКК ККЗК КЗКК ККЗК* …, (поскольку на первом кольце остались отрезки только красного цвета, на втором – зеленого и т.д.). Итак, для возвращения в начальную клетку $(1,2)$ мы должны сделать m восьмерок двойных ходов *КЗКК ККЗК*. Но мы доказывали, что количество ходов вида «*З*» (и «*К*») должно делиться на 8. Имеем $2m \vdots 8$, т.е. $m \geq 4$, и, значит, до возвращения в клетку $(1,2)$ прошло $k = 8m \geq 32$ двойных ходов. Следовательно, начиная с клетки $(1,2)$, мы обошли все 64 клетки доски и вернулись обратно.

Другая ситуация будет с кодом «*кззк*»: здесь подходит $m = 2$, и, значит, мы возвратимся в начальную клетку после 16 двойных ходов, т.е. обойдем лишь половину клеток доски.

Из описанных соображений читатель легко усмотрит красивый критерий: объединение отрезков представляет собой один цикл тогда и только тогда, когда количество букв «*к*» (или «*з*») в кодовом слове нечетно.

Все описанные шаги можно повторить и для доски $2n \times 2n$. Точно так же рассматриваем множество синих, красных и зеленых отрезков. Они образуют n колец. По n-буквенному коду из букв «*к*» и «*з*» делаем стирания в кольцах. Условие возвращения в начальную клетку таково: количество двойных ходов «*К*» и «*З*» должно быть кратно $2n$.

А критерий того, что объединение отрезков представляет собой один цикл, будет звучать так: количество букв «*к*» (или «*з*») в коде взаимно просто с n.

«Пример», полученный И.Акуличем в его статье, соответствует коду «*зкзк*», но так как наибольший общий делитель чисел 2 и 4 отличен от 1, то маршрут распадается на два циклических маршрута.

Теперь решим еще одну интересную задачу, в которой нам снова помогут идеи, изложенные в начале этой статьи:

Какое наибольшее число поворотов может сделать хромая ладья при замкнутом маршруте по всем полям доски $2n \times 2n$?

Этот вопрос поставлен в замечательной книге Е. Гика «Необычные шахматы» для доски 8×8. В качестве ответа там приведен лишь пример с 56 поворотами (рис.7), но не доказано, что это наибольшее число. Чтобы это доказать, мы посчитаем «прямые» ходы (т.е. ходы, при которых ладья выходит из клетки в том же направлении, в котором она в эту клетку попала) и найдем их минимальное количество.

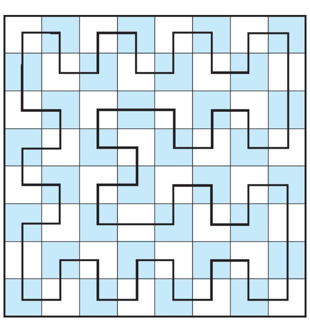
Рис. 7

Пусть есть маршрут хромой ладьи по шахматной доске. Будем рисовать путь на доске Уэлча (расположим ее для удобства так, как показано на рисунке 2), соединяя клетки ровно в том порядке, в каком ладья обходит соответствующие им клетки на обычной доске. Если ладья повернула, то на доске Уэлча предыдущую и следующую клетки соединим горизонтальным или вертикальным отрезком, а если ладья прошла по клетке, не меняя направления, то на доске Уэлча предыдущую и следующую клетки нужно соединить диагональным отрезком. В итоге на каждой из досок Уэлча получится замкнутый маршрут, представляющий собой несколько непрерывных линий из вертикальных и горизонтальных отрезков, соединенных диагональными отрезками. Общее количество диагональных отрезков на двух досках Уэлча как раз равно числу прямых ходов ладьи на обычной шахматной доске.

Но как мы уже выясняли, чтобы покрыть каждую доску Уэлча, нужно не меньше n непрерывных линий, по которым может пройти ладья. Следовательно, на каждой доске Уэлча будет не меньше n диагональных отрезков (чтобы соединить эти линии в замкнутый маршрут), всего на двух досках – не меньше $2n$, и такое же число прямых ходов будет в маршруте ладьи.

Это рассуждение справедливо для любого четного n. Если же n нечетно, то оно немного неточное. Дело в том, что диагональный отрезок соединяет одноцветные клетки доски Уэлча. Вспомним, что на доске Уэлча после проведения отрезка AB, разделяющего ее пополам, мы нашли не менее n линий или их частей с белыми концами и не менее n линий или их частей с черными концами. Всего тем самым будет $2n$ белых и $2n$ черных концов (если линия состоит всего из одной точки, мы все равно будем считать, что у нее два конца). Склейки могут происходить в n местах, причем склеиваются всегда разноцветные концы. Значит, на доске Уэлча у получившихся после склейки линий будет всего как минимум n белых концов и как минимум n черных концов. Диагональные отрезки разбивают концы одного цвета на пары, и, поскольку n нечетно, на доске Уэлча найдется как минимум $n + 1$ концов каждого цвета. Поэтому диагональных отрезков на одной доске Уэлча будет не меньше чем $\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2}=n+1$, а на двух досках – не меньше чем $2n + 2$. Значит, потребуется не меньше $2n + 2$ прямых ходов ладьи на обычной доске.

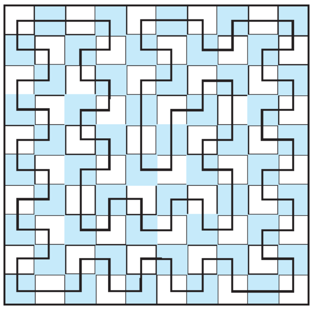
Рис. 8

На рисунке 8 изображен маршрут ладьи на доске 10×10 (т.е. для $n = 5$) с 12 поворотами. Его легко перенести на доски большего размера.

В заключение предлагаем такую задачу:

Пусть A *– число замкнутых обходов хромой ладьей доски* $2n \times 2n$, *содержащих наибольшее число поворотов,* B *– число замкнутых обходов «хромой» ладьей доски* $4n \times 4n$, *содержащих наименьшее число поворотов. Докажите, что* $B \geq 2A$.

Указание: разбейте доску $4n \times 4n$ на квадраты 2×2.

Автору неизвестно, не обращается ли неравенство этой задачи всегда в точное равенство. Вся надежда на читателей.

Задачи на уравнение моментов сил

А.ЧЕРНОУЦАН

Момент силы (вращательный момент силы) относительно оси вращения, равный по величине произведению модуля этой силы F на плечо d (рис.1), характеризует вращательное действие силы по отношению к этой оси.

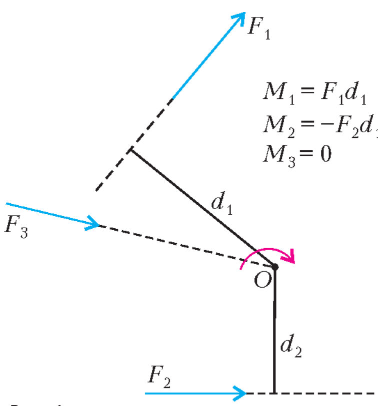

Рис. 1

Плечом называется расстояние от линии действия силы до оси вращения. Отметим, что плечо силы не меняется при перемещении силы вдоль линии ее действия (точка приложения силы не имеет значения при вычислении момента силы – важна только линия ее действия!). Момент силы измеряется в Н·м (не в Дж!). Моменту силы приписывается знак: если данная сила (в отсутствие других сил) стремится повернуть тело в положительном направлении (например, по часовой стрелке), то момент силы считается положительным, в противном случае – отрицательным. (Положительное направление вращения можно выбирать свое в каждой задаче.) Итак, момент силы равен

$$M = \pm Fd .$$

Обычно ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка и на рисунке изображается точкой. Поэтому часто говорят о моментах сил относительно точки. Поскольку в школьном курсе физики (в отличие от вузовского) момент силы относительно точки пространства не вводится, то недоразумений не возникает. Момент силы относительно точки O – это момент этой силы относительно оси вращения, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Напротив, все силы обычно лежат в плоскости рисунка, т.е. они перпендикулярны оси вращения. Момент силы, параллельной оси вращения, относительно этой оси равен нулю. Поэтому если у силы есть составляющая, параллельная оси вращения, то ее (эту составляющую) при вычислении момента надо отбросить.

Общие условия равновесия тела или системы тел (составного тела) заключаются в следующем.

1. Условие отсутствия поступательного движения:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = 0 \qquad (1)$$

(сумма *внешних* сил равна нулю). Это уравнение означает, что центр масс тела (системы тел) покоится или движется равномерно и прямолинейно, но не обеспечивает отсутствие вращения.

2. Условие отсутствия вращения (уравнение моментов):

$$M_1 + M_2 + \ldots = 0 \qquad (2)$$

(сумма моментов *внешних* сил относительно *произвольной* оси равна нулю). Это уравнение означает, что вращение относительно данной оси отсутствует или происходит равномерно – с постоянной угловой скоростью. Обычно рассматривается неподвижное тело, тогда ось вращения можно выбирать произвольно (нет вращения вокруг любой оси). Удачным выбором оси можно исключить ненужные силы: если линия действия силы проходит через ось, то плечо этой силы равно нулю и она не входит в уравнение моментов.

Теперь перейдем к решению конкретных задач. В нескольких первых задачах все силы параллельны друг другу, что упрощает нахождение моментов.

Задача 1. *Труба массой 3 кг лежит на земле. Какую силу надо приложить, чтобы приподнять трубу за один конец?*

Решение. В момент начала подъема труба по всей длине отрывается от поверхности и упирается в землю другим концом (рис.2). Мы можем записать второй закон Ньютона (уравнение (1)) в проекции на вертикальную ось, но оно содержит два неизвестных: искомую силу F и силу реакции опоры N, и нам все равно придется записать уравнение моментов относительно какой-нибудь оси. Однако мы можем обойтись одним уравнением, если выберем ось вращения (O) на левом конце трубы и исключим силу N:

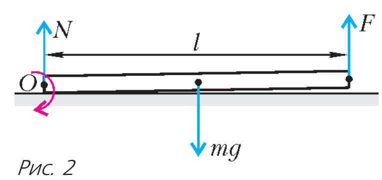

Рис. 2

$$mg\frac{l}{2} - Fl = 0 .$$

Отсюда получаем

$$F = \frac{mg}{2} = 15 \text{ Н}.$$

Задача 2. *Два человека несут металлическую трубу, положив ее себе на плечи. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии l = 1 м от одного из ее концов, второй держит противоположный конец трубы. Во сколько раз нагрузка, приходящаяся на первого человека, больше, чем на второго, если длина трубы L = 2,5 м?*

Решение. В данном примере нам надо установить соотношение между силами реакции опоры N_1 и N_2, поэтому удобно исключить силу тяжести трубы, выбирая ось (O), проходящую через ее центр тяжести (рис.3). Уравнение моментов относительно этой оси имеет вид

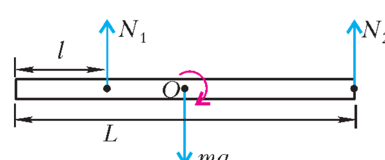

Рис. 3

$$N_1\left(\frac{L}{2} - l\right) - N_2\frac{L}{2} = 0 ,$$

откуда находим

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{L}{L - 2l} = 5 .$$

Задача 3. *При взвешивании на неравноплечных рычажных весах вес тела на одной чашке получился P_1 = 36 Н, на другой P_2 = 49 Н. Определите истинный вес тела. Весом коромысла весов пренебречь.*

Решение. Запишем уравнение моментов относительно точки опоры (правило рычага) для первого взвешивания:

$$P_1 l_1 = P l_2$$

и для второго взвешивания:

$$P l_1 = P_2 l_2 ,$$

где P – истинный вес груза, P_1, P_2 – веса разновесков при первом и втором взвешиваниях. Поделив уравнения друг на друга, получим

$$\frac{P_1}{P} = \frac{P}{P_2} ,$$

откуда

$$P = \sqrt{P_1 P_2} = 42 \text{ Н}.$$

Задача 4. *На одной чашке равноплечных рычажных весов находится груз весом $P_1 = 1{,}2$ Н, на другой – весом $P_2 = 1{,}1$ Н. На каком расстоянии от центра коромысла весов надо подвесить гирьку весом $P_3 = 0{,}4$ Н, чтобы весы были в равновесии? Длина коромысла $l = 0{,}2$ м.*

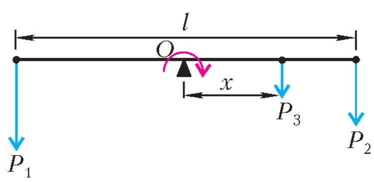

Рис. 4

Решение. В этом случае в уравнение моментов относительно оси, проходящей через середину коромысла весов (рис.4), войдут не две, а три силы:

$$P_2 \frac{l}{2} - P_1 \frac{l}{2} + P_3 x = 0$$

(сила тяжести коромысла и сила реакции опоры не входят в уравнение моментов, так как они проходят через ось вращения). Получаем

$$x = l \frac{P_1 - P_2}{2P_3} = 25 \text{ мм}.$$

В следующей задаче, хотя все силы и параллельны, вычисление их плеч уже не столь тривиально.

Задача 5. *Стержень массой $m_1 = 300$ г согнули под прямым углом в точке, которая делит его в отношении 1:2, и подвесили на нити, привязанной к точке сгиба. Грузик какой массы m_2 надо прикрепить к концу короткой стороны угла, чтобы концы стержня находились на одном уровне?*

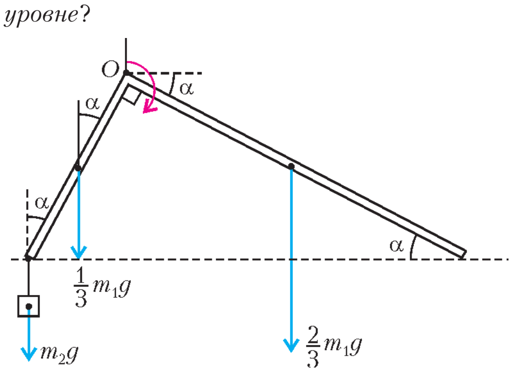

Рис. 5

Решение. Запишем уравнение моментов относительно точки подвеса, исключив тем самым силу натяжения нити (рис.5):

$$\frac{2}{3}m_1 g\left(\frac{l}{3}\cos\alpha\right) - \frac{1}{3}m_1 g\left(\frac{l}{6}\sin\alpha\right) - m_2 g\left(\frac{l}{3}\sin\alpha\right) = 0,$$

где l – длина стержня. Отсюда находим

$$m_2 = m_1\left(\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}m_1 = 350 \text{ г}$$

(из рисунка видно, что $\operatorname{ctg}\alpha = 2$).

В последующих задачах силы не параллельны друг другу. Хотя вычисление моментов требует теперь больше усилий, открываются и новые возможности. Так, направление некоторых сил можно находить построением.

Задача 6. *Рабочий удерживает за один конец доску массой $m = 16$ кг так, что она опирается другим концом о землю и образует угол $\alpha = 60°$ с горизонтом. С какой силой F удерживает рабочий доску, если эта сила перпендикулярна доске?*

Решение. Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку опоры доски (рис.6). Тем самым мы исключаем из уравнения силу реакции $\vec{F}_\text{р}$, действующую на доску в точке опоры. Плечо искомой силы равно длине доски l, а плечо силы тяжести равно $(l/2)\cos\alpha$. Получаем

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - Fl = 0, \text{ т.е.}$$

$$F = \frac{mg}{2}\cos\alpha = 40 \text{ Н}.$$

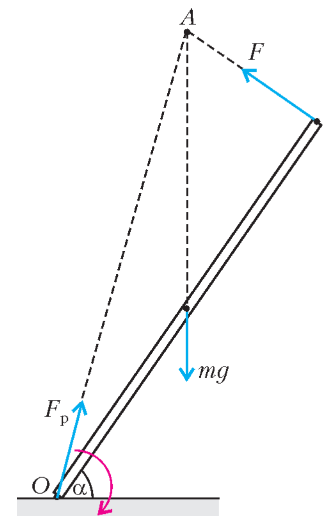

Рис. 6

Покажем теперь, как простым построением найти направление силы $\vec{F}_\text{р}$, не вычисляя ее. (Вычислить $F_\text{р}$ можно из второго закона Ньютона.) Построим линии действия сил $\vec{F}$ и $m\vec{g}$ и найдем точку A их пересечения. Относительно этой точки моменты сил $\vec{F}$ и $m\vec{g}$ равны нулю, а уравнение моментов утверждает, что сумма моментов всех трех сил также равна нулю. Следовательно, момент силы $\vec{F}_\text{р}$ относительно этой точки равен нулю, т.е. линия действия этой силы проходит через точку A. Такое рассуждение применимо всегда для трех непараллельных сил.

В следующей задаче уравнение моментов необходимо использовать уже на стадии изготовления рисунка.

Задача 7. *К гладкой вертикальной стене на нити длиной $l = 8$ см подвешен шар радиусом $R = 5$ см и массой $m = 6$ кг. Определите силу давления шара на стену.*

Решение. При изготовлении рисунка к задаче (задачи статики невозможно решать без правильного и ясного рисунка) возникает вопрос: как правильно направить нить? Интуитивно многие школьники чувствуют, что в отсутствие трения шар займет единственное устойчивое положение, при котором продолжение нити проходит через центр шара, но обосновать этого не могут. А объяснение опирается на правило моментов. Действительно (рис.7),

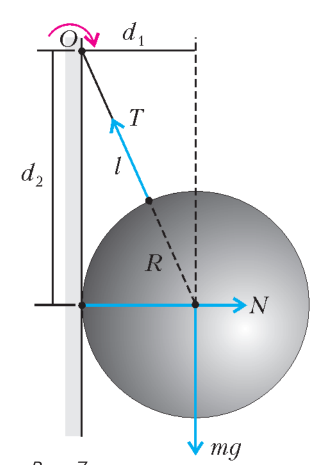

Рис. 7

относительно центра шара моменты силы реакции опоры $\vec{N}$ и силы тяжести $m\vec{g}$ равны нулю, следовательно, момент силы натяжения $\vec{T}$ также должен быть равен нулю.

Используя полученный рисунок, можно решить задачу без привлечения уравнения моментов – достаточно записать второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и исключить силу T. Однако проще записать правило моментов относительно точки крепления нити к стене – тогда сила натяжения вообще не войдет в уравнение:

$$mgd_1 - Nd_2 = 0\,,\ \text{где}\ d_1 = R\,,\ d_2 = \sqrt{(l+R)^2 - R^2}\,.$$

Отсюда находим силу реакции стены, а значит, и силу давления шара на стену:

$$F_{д} = N = 25\ \text{Н}.$$

Задача 8. *В гладкий высокий цилиндрический стакан с внутренним радиусом $R = 6$ см помещают палочку длиной $l = 13$ см и массой $m = 250$ г. С какой силой действует на стенку стакана верхний конец палочки?*

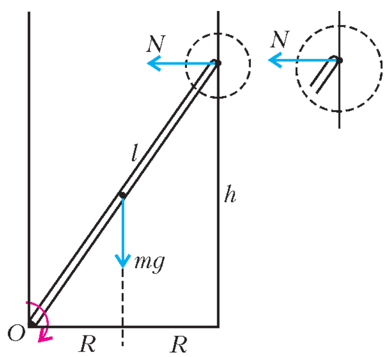

Рис. 8

Решение. В этой задаче важно правильно направить силу нормальной реакции стенки сосуда. Тут действует общее правило: силу взаимодействия двух соприкасающихся поверхностей (силу давления, нормальной реакции) направляют перпендикулярно поверхности, имеющей в месте касания явно выраженный плоский участок (рис.8). Записав уравнение моментов относительно нижнего конца палочки:

$$mgR - Nh = 0\,,\ \text{где}\ h = \sqrt{l^2 - (2R)^2} = 5\ \text{см},$$

получаем

$$N = \frac{mgR}{h} = 3\ \text{Н}.$$

Задание. Найдите построением направление силы, действующей на нижний конец палочки.

Задача 9. *Шар массой $m = 3$ кг находится на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 60°$. Равновесие шара достигается за счет трения о плоскость и натяжения нити, прикрепленной одним концом к верхней части шара, а другим – к вершине наклонной плоскости. Найдите силу натяжения нити, если нить горизонтальна.*

Решение. В этой задаче, выбирая различные точки для уравнения моментов, можно мгновенно получать различные соотношения между силами (рис.9). Например, записав уравнение моментов относительно центра шара, получим:

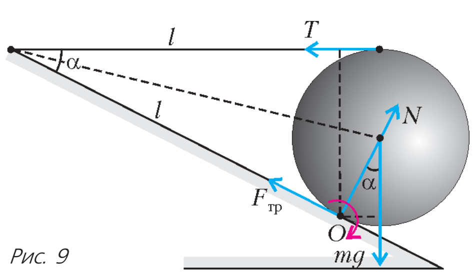

Рис. 9

$T = F_{тр}$, а относительно точки крепления нити с плоскостью: $N = mg$. Однако для решения нашей задачи надо записать уравнение моментов относительно точки O касания шара с плоскостью, исключая N и $F_{тр}$:

$$mgR\sin\alpha - Tl\sin\alpha = 0\,,$$

где длину нити можно выразить через радиус:

$$l = R\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,.$$

В результате находим

$$T = mg\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \approx 17\ \text{Н}.$$

Задача 10. *Лестница длиной $l = 4$ м приставлена к гладкой стене под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Коэффициент трения между лестницей и полом $\mu = 0{,}25$. На какое расстояние вдоль лестницы может подняться человек, прежде чем лестница начнет скользить? Массой лестницы пренебречь.*

Решение. Условие начала проскальзывания нижнего конца лестницы имеет вид

$$F_{тр} = \mu N\,.$$

Искомое расстояние x может войти только в уравнение моментов. Так как это уравнение является наиболее сложным в задаче, выберем ось так, чтобы сил было поменьше и геометрия была попроще – в точке O (рис.10):

$$N_1 \cdot l\sin\alpha - mg \cdot x\cos\alpha = 0\,.$$

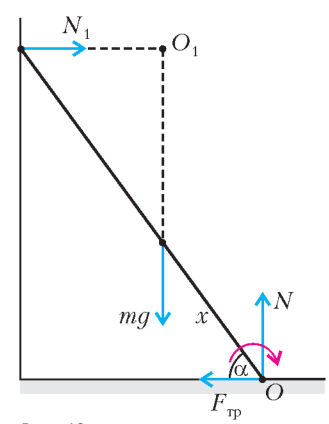

Рис. 10

Чтобы исключить все силы, придется записать еще два уравнения – проекции второго закона Ньютона на горизонтальную и вертикальную оси координат:

$$N_1 - F_{тр} = 0,\quad N - mg = 0\,.$$

Окончательно получаем

$$x = \mu l\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx 1{,}7\ \text{м}\,.$$

Замечание. Отметим, что при специальном выборе оси вместо последних трех уравнений можно было бы обойтись одним уравнением моментов. Если записать его относительно оси O_1, то силы N_1 и mg будут исключены:

$$F_{тр} \cdot l\sin\alpha - N \cdot x\cos\alpha = 0\,.$$

Подставляя сюда $F_{тр} = \mu N$, приходим к тому же самому ответу для x.

Задача 11. *Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол α, тангенс которого равен 0,6. На ней стоит цилиндр радиусом $R = 3$ см. При какой максимальной высоте цилиндра он не опрокидывается? Цилиндр сделан из однородного материала.*

Решение. Задачу можно решить очень быстро, если сразу рассмотреть цилиндр, который близок к опрокидыванию. Это означает, что основание цилиндра уже перестало давить на плоскость и он опирается только на одну нижнюю точку (рис.11,*а*). Поскольку к этой точке приложены как сила трения, так и сила нормальной реакции, то линия действия силы тяжести также проходит через эту точку. Из рисунка видно, что между высотой и диаметром цилиндра выполняется соотношение

$$\frac{2R}{h} = \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда находим

$$h = \frac{2R}{\operatorname{tg}\alpha} = 10 \text{ см}.$$

Если сила трения всегда действует вдоль поверхности соприкосновения, то с силой нормальной реакции не все так ясно. В задачах динамики силу $\vec{N}$ обычно прикладывают к центру основания. Как же она вдруг «перескочила» на край цилиндра? Чтобы разобраться, будем постепенно увеличивать угол наклона плоскости, от нулевого до такого, при

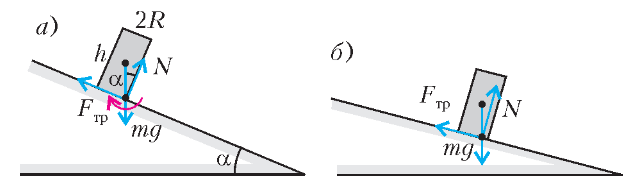

Рис. 11

котором цилиндр опрокидывается. В промежуточном состоянии (рис.11,*б*) цилиндр опирается о наклонную плоскость всей плоскостью основания, но равнодействующая сил нормальной реакции приложена не к центру основания, а к точке пересечения основания и линии действия силы тяжести. Действительно, относительно этой точки моменты сил тяжести и трения равны нулю, следовательно, должен быть равен нулю и момент силы нормальной реакции. Дело в том, что нижняя часть основания давит на плоскость сильнее, чем верхняя, и равнодействующая смещается вниз. Так что переход точки приложения силы $\vec{N}$ от центра к крайней точке происходит не скачком, а постепенно.

Задача 12. *Нижние концы лестницы-стремянки соединены веревкой. Найдите силу ее натяжения в тот момент, когда человек массой $m = 80$ кг поднялся по стремянке до середины ее высоты. Массой лестницы и трением о пол пренебречь. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол $\alpha = 45°$.*

Решение. Особенность этой задачи состоит в том, что для определения неизвестной силы приходится записывать уравнение моментов не для всей системы, а для одной из ее частей. Действительно, для всей системы лестница + человек сила натяжения веревки является *внутренней* силой и не входит в уравнения (1) и (2). Она становится *внешней* силой, только если рассмотреть отдельно либо правую, либо левую половину лестницы. Выберем левую половину (рис.12), так как на нее действует меньше сил (нет силы тяжести). Запишем уравнение моментов относительно точки O_1, исключив тем самым силу взаимодействия между половинками лестницы в верхнем шарнире:

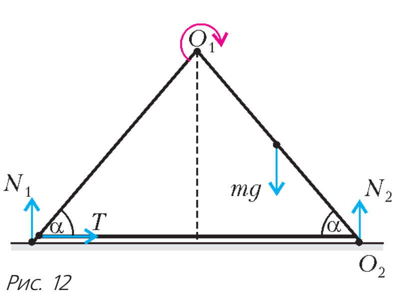

Рис. 12

$$N_1\frac{l}{2} - T\frac{l}{2}\operatorname{tg}\alpha = 0,$$

где l – длина веревки, T – искомая сила натяжения веревки. Чтобы найти N_1, надо записать уравнение моментов уже для всей системы относительно точки O_2 (чтобы исключить силу N_2):

$$N_1 l - mg\frac{l}{4} = 0.$$

Окончательно для силы натяжения веревки получаем

$$T = \frac{mg}{4}\operatorname{ctg}\alpha = 200 \text{ Н}.$$

Задача 13. *В кузове грузовика стоит цилиндр, радиус основания которого $R = 10$ см, а высота $h = 50$ см. С каким максимальным ускорением может тормозить грузовик, чтобы цилиндр не опрокинулся?*

Решение. В системе отсчета, связанной с грузовиком, цилиндр покоится, и поставленная задача становится задачей статики. Однако переходя в систему отсчета, которая движется поступательно с ускорением $\vec{a}$, мы должны к силе тяжести $\Delta m\vec{g}$, действующей на каждый элемент массы, добавить силу инерции $-\Delta m\vec{a}$ (см., например, статью В.Шутова в «Кванте» №2 за 2010 г.). Равнодействующая сил инерции, как и сил тяжести, приложена к центру тяжести. В тот момент, когда цилиндр находится на грани опрокидывания, он взаимодействует с опорой в одной точке O (рис.13,*а*). Запишем относительно этой точки уравнение моментов:

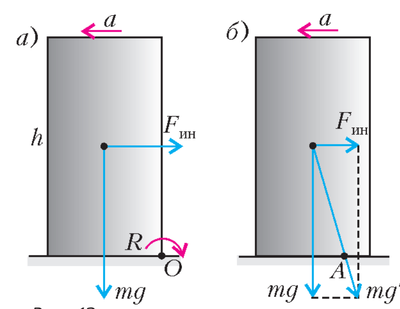

Рис. 13

$$F_{ин}\frac{h}{2} - mgR = 0$$

(момент силы реакции равен нулю). Подставляя $F_{ин} = ma$, получаем

$$a = \frac{2gR}{h} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Замечание. Вместо того чтобы в явном виде вводить силу инерции, можно считать, что вместо силы тяжести $m\vec{g}$ действует сила тяжести $m\vec{g}'$, где $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$. Тогда мы можем применить общее условие того, чтобы поставленное на опору тело не опрокидывалось: линия действия силы тяжести $m\vec{g}'$ не должна выходить за пределы опоры (рис.13,*б*). Действительно, нетрудно установить, что равнодействующая сил нормальной реакции должна быть приложена в точке A пересечения новой силы тяжести с опорой. (Относительно этой точки равны нулю моменты силы трения и силы тяжести $m\vec{g}'$. Значит, должен быть равен нулю и момент силы нормальной реакции.) Когда точка A окажется на краю опоры, сила реакции будет действовать только в этой точке.

Задача 14. *Два одинаковых шара радиусом $r = 10$ см и массой $m = 600$ г каждый положили в вертикальный открытый с обеих сторон тонкостенный цилиндр радиусом $R = 15$ см, стоящий на горизонтальной плоскости. Пренебрегая трением, найдите, при какой минимальной массе M цилиндра шары его не опрокидывают.*

Решение. Когда цилиндр находится на грани опрокидывания, он взаимодействует с плоскостью только в точке O (рис.14). Если начать с уравнения моментов для цилиндра, то придется вычислять силы давления шаров на его стенки, а для этого нужно будет записать еще и уравнение моментов

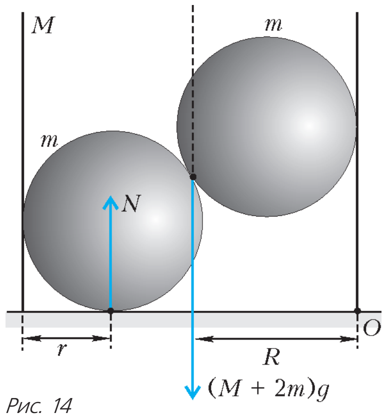

Рис. 14

для верхнего шара. Попробуйте проделать такие расчеты самостоятельно, а мы покажем, как удачный выбор объекта для записи условий равновесия может заметно упростить задачу.

Исследуем равновесие всей системы цилиндр + шары и запишем уравнение моментов для точки O. Силы взаимодействия шаров с цилиндром и между собой являются теперь внутренними, и их учитывать не надо. Получаем уравнение

$$N\cdot(2R-r)-(M+2m)g\cdot R=0 .$$

Силу реакции плоскости находим из второго закона Ньютона для системы двух шаров (в проекции на вертикальную ось)

$$N - 2mg = 0.$$

Окончательно получаем

$$M=\frac{2m(R-r)}{R}=400\ \text{г} .$$

Задача 15. *Два одинаковых конуса равномерно прижаты друг к другу вдоль направляющих так, что их оси параллельны. Один из конусов вращают с постоянной угловой скоростью ω_1, а второй приводится во вращение силами трения со стороны первого конуса. Какой будет установившаяся угловая скорость вращения второго конуса?*

Решение. В этой задаче уравнение моментов применяется не к покоящемуся, а к вращающему телу (второму, т.е. ведомому конусу). При его установившемся вращении, т.е. при вращении с постоянной угловой скоростью, сумма моментов внешних сил относительно оси вращении равна нулю. Для второго конуса внешними силами, создающими момент, являются только силы трения на линии соприкосновения с первым конусом (рис.15). На левой части этой линии длиной $R_2/\cos\alpha$ скорость точек первого конуса больше, чем второго, и силы трения направлены от нас, а на правой части этой линии длиной $(R-R_2)/\cos\alpha$ силы трения направлены к нам. В точке радиусом $R_1=R-R_2$ скорости точек поверхностей конусов одинаковы:

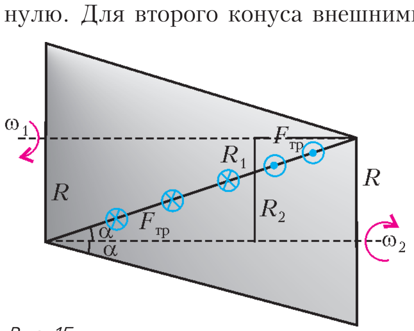

Рис. 15

$$\omega_1(R-R_2)=\omega_2R_2 .$$

Чтобы найти R_2, запишем уравнение моментов. Сила трения, действующая на отрезке линии соприкосновения длиной l, равна $F_{тр}=fl$, где f – сила трения на единицу длины. Плечо силы трения линейно меняется вдоль линии соприкосновения. Однако, не вдаваясь в подробное доказательство, скажем, что момент силы трения на отрезке, где силы трения во всех точках направлены в одну сторону, равен произведению силы трения на среднее плечо. Получаем

$$f\frac{R_2}{\cos\alpha}\frac{0+R_2}{2}=f\frac{R-R_2}{\cos\alpha}\frac{R_2+R}{2} ,$$

откуда

$$R_2=\frac{R\sqrt{2}}{2} .$$

Теперь находим искомую угловую скорость:

$$\omega_2=\left(\sqrt{2}-1\right)\omega_1 .$$

Упражнения

1. Прямая неоднородная балка длиной 1 м и массой 200 кг подвешена за концы на вертикально натянутых тросах. Балка занимает горизонтальное положение. Найдите натяжение правого троса, если центр тяжести балки находится на расстоянии 0,3 м от ее левого конца.

2. Однородный стержень длиной 1 м и массой 12 кг подвешен на расстоянии 20 см от одного из его концов. С какой силой будет давить стержень на руку, если, взявшись за короткий конец, удерживать его в горизонтальном положении?

3. На однородной доске длиной 4 м и массой 30 кг качаются два мальчика, массы которых 30 кг и 40 кг. На каком расстоянии от середины должна находиться точка опоры доски, если мальчики сидят на ее концах?

4. Стержень массой 100 г согнули посередине под углом 120° и подвесили на нити, привязанной к точке сгиба. Грузик какой массы надо прикрепить к концу одной из сторон угла, чтобы другая сторона заняла горизонтальное положение?

5. Лестница массой 30 кг приставлена к гладкой вертикальной стене под углом 45°. Найдите силу давления лестницы на стену. Центр тяжести лестницы находится в ее середине.

6. Однородную палку длиной 1,5 м и массой 2 кг прислонили к краю стола так, что расстояние от верхнего конца палки до точки касания равняется 50 см. Высота стола 0,8 м. Пренебрегая трением между палкой и столом, найдите силу их взаимодействия.

Указание. Сила взаимодействия направлена перпендикулярно палке (см. задачу 8 в статье).

7. Однородная доска приставлена к стене. При каком наименьшем угле (в градусах) между доской и горизонтальным полом доска сохранит равновесие, если коэффициент трения между доской и полом 0,4, а между доской и стеной 0,5?

8. Колесо радиусом 0,5 м и массой 10 кг стоит перед ступенькой высотой 0,1 м. Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к оси колеса, чтобы поднять его на ступеньку?

9. Нижние концы лестницы-стремянки массой 10 кг соединены веревкой. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол 45°. Считая пол абсолютно гладким, найдите натяжение веревки.

10. Однородный стержень шарнирно подвешен к потолку вагона. Вагон начинает двигаться с постоянным ускорением $2\ м/с^2$. Найдите угол, который составит стержень с вертикалью в установившемся положении.