Замечательные точки треугольника и тригонометрия

Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Пусть I и O – соответственно центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Мы поведем наш разговор о том, как эффективно (а порой и эффектно) могут «работать» эти точки при решении тригонометрических упражнений.

Задача 1. *Докажите справедливость следующих формул синуса двойного и половинного углов (где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$):*

а) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$;

б) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$.

Решение. Около прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) опишем окружность. Очевидно, ее центр O – середина гипотенузы AB (рис.1). Пусть радиус окружности равен R, тогда $AB = 2R$.

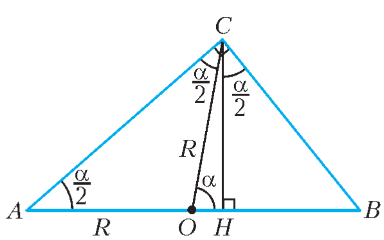

Рис. 1

Пусть $\angle COB = \alpha$, тогда $\angle CAO = \angle ACO = \frac{\alpha}{2}$. Проведем высоту CH к гипотенузе. Из треугольников ACH и ABC имеем

$$CH = AC\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

С другой стороны, из треугольника OCH находим

$$CH = OC\sin\alpha = R\sin\alpha.$$

Приравнивая выражения для CH, получаем

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Тем самым доказано утверждение а) задачи.

Для доказательства пункта б) заметим, что

$$HB = OB \pm OH = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha)$$

(знак + или – в первом равенстве из этой цепочки выбирается в зависимости от того, тупой угол α или острый).

Теперь из треугольника CBH находим

$$HB = CB\sin\frac{\alpha}{2} = AB\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Приравнивая выражения для HB, получаем утверждение пункта б).

Задача 2. *Докажите справедливость формулы для углов A, B, C треугольника ABC:*

$$\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C = 4\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C.$$

Решение. Пусть O – центр описанной окружности ΔABC. Тогда $AO = BO = CO = R$ и $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle AOC = 2\angle B$, $\angle AOB = 2\angle C$ (рис.2).

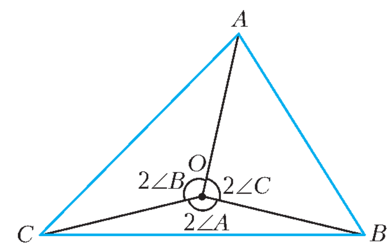

Рис. 2

Поскольку площадь S треугольника ABC складывается из площадей треугольников BOC, AOC и AOB, то

$$S = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C).$$

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\angle A\cdot 2R\sin\angle B\cdot\sin\angle C =$$
$$= 2R^2\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C.$$

Приравняв правые части последних двух равенств, получим требуемое:

$$\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C = 4\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C.$$

Следствие. Заменив углы $2\angle A$, $2\angle B$, $2\angle C$ на углы $180^\circ - \angle A$, $180^\circ - \angle B$, $180^\circ - \angle C$ (что корректно, поскольку и та и другая суммы равны по 360°), получим еще одну важную формулу для углов треугольника ABC:

$$\sin\angle A + \sin\angle B + \sin\angle C = 4\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}.$$

Задача 3. *Докажите справедливость неравенства в треугольнике ABC:*

$$\sin\frac{\angle B}{2} + \sin\frac{\angle C}{2} > \cos\frac{\angle A}{2}.$$

Решение. Пусть I – инцентр (центр вписанной окружности) ΔABC (рис.3).

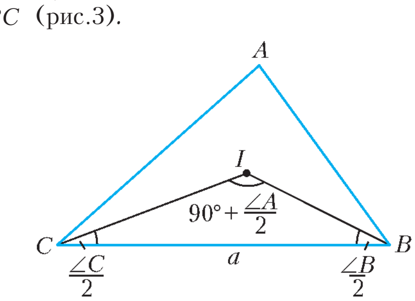

Рис. 3

(Продолжение см. на с. 34)

Квадрирование квадрата

Квадрирование квадрата – это разбиение квадрата на меньшие квадраты. Самое простое и всем известное квадрирование – это разбиение на n^2 равных квадратов. Примером может служить шахматная доска, разбитая на 64 равных квадрата.

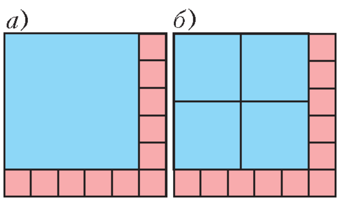

Рис. 1

А можно ли разбить квадрат, например, на 2010 квадратов, среди которых не обязательно все равные? Оказывается, если в разбиении квадрата на n^2 равных квадратов объединить $(n-1)^2$ квадратов в один квадрат, то получим разбиение на $n^2-(n-1)^2+1=2n$ квадратов (рис.1,*а*). Это значит, что таким приемом можно выполнить квадрирование на любое четное (больше 2) число квадратов.

Если в таком разбиении один из квадратов разделить на 4 квадрата, то число квадратов разбиения увеличивается на 3 и становится нечетным (рис.1,*б*). Можно доказать, что квадрат нельзя разбить на 5 квадратов. Таким образом, квадрирование можно выполнить на любое большее 5 число квадратов.

Если при этом наложить еще одно условие: среди квадратов разбиения нет равных, то квадрирование становится чрезвычайно трудным. Более того, некоторые видные математики начала прошлого века были склонны считать, что такое квадрирование вообще невозможно.

Однако немецкий геометр Р.Шпраг удивил математическое сообщество, найдя разбиение квадрата на 55 неповторяющихся квадратов.

Вскоре студенты-математики Кембриджского университета в Англии установили неожиданную связь между квадрированием квадрата и составлением электрических цепей. Дело в том, что каждому набору из n квадратов, необходимых для составления одного квадрата, соответствует электрическая сеть из n проводников, в которых распределение токов подчиняется правилам Кирхгофа. На их основе составляется система уравнений, решая которую, можно вычислить силы токов в каждом проводнике. Именно эти числа являются сторонами квадратов разбиения. Остается, имея конкретный набор квадратов, сложить из них один большой квадрат.

Именно таким способом англичане А.Стоун и У.Татт нашли разбиение квадрата на 28 попарно неравных квадратов. Подключившиеся к ним Р.Брукс и С.Смит разбили квадрат на 26 попарно неравных квадратов. Позже Т.Уиллкокс смог уменьшить число квадратов разбиения до 24.

Следующего совершенного квадрирования пришлось ждать более 30 лет. Заключительный аккорд в этой задаче сделал голландский математик А.Дуйвестийн, который нашел разбиение квадрата на 21 квадрат, которые попарно не равны (рис.2). Применяя для

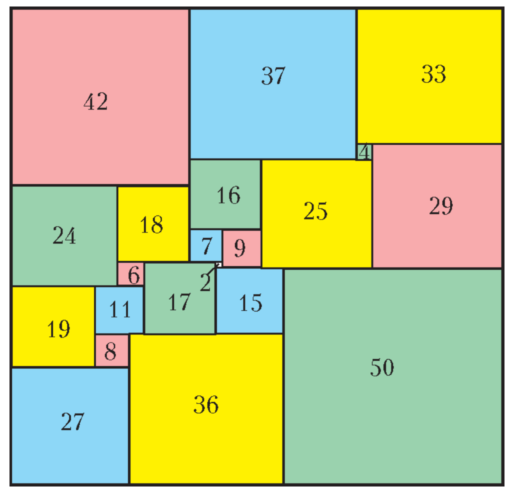

Рис. 2

перебора возможных вариантов компьютер, он доказал, что разбиения менее чем на 21 квадрат не существует и найденное им квадрирование квадрата – единственное.

Известный советский математик А.Н.Колмогоров, еще будучи студентом, придумал разбиение единичного квадрата, в котором каждый квадрат имеет с диагональю квадрата хотя бы одну общую точку. На первом шаге квадрат четвертуется, два квадрата закрашиваются. Два других на втором этапе вновь четвертуются, и в каждом из них два квадрата закрашиваются. И так далее. На рисунке 3 приведено квадрирование, в котором выполнено 4 шага.

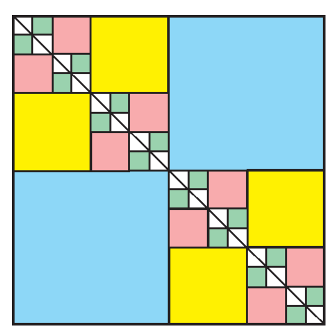

Рис. 3

Замечательно в этом квадрировании то, что суммы периметров квадратов, которые появляются на каждом шаге, равны одному и тому же числу 4.

Организаторы LVI Московской математической олимпиады, используя это квадрирование, сформулировали участникам олимпиады задачу, условие которой можно найти в конце статьи.

На рисунке 4 приведено любопытное квадрирование квадрата со стороной 14. В этом разбиении длины сторон квадратов разбиения и их количество подчиняются следующей закономерности: 1 квадрат 6×6, 2 квадрата 5×5, 3 квадрата 4×4, 4 квадрата 3×3, 5 квадратов 2×2, 6 квадратов 1×1.

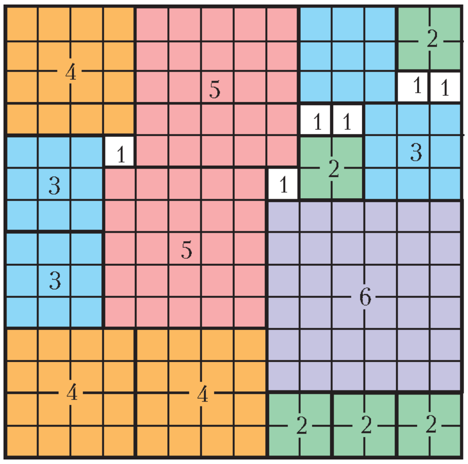

Рис. 4

Как можно искать подобные разбиения? Прежде всего, должно выполняться равенство $n^2 = \dfrac{k(k+1)^2(k+2)}{12}$, где n – сторона разбиваемого квадрата, k – сторона наибольшего квадрата разбиения (равенство означает, что площадь разбиваемого квадрата равна сумме площадей всех квадратов разбиения). Поиск пар n и k, удовлетворяющих этому равенству, приводит к решению уравнения Пелля, которое имеет бесконечно много целочисленных решений.

Приведенное выше квадрирование получено при $n = 14$ и $k = 6$. Кроме тривиального решения $n = 1$ и $k = 1$, назовем еще одно решение $n = 2716$ и $k = 96$, которое означает, что, возможно, существует разбиение квадрата со стороной 2716 на такие квадраты: 1 квадрат 96×96, 2 квадрата 95×95, …, 95 квадратов 2×2, 96 квадратов 1×1. Но такого квадрирования еще никто не нашел.

Рассмотрим еще одно квадрирование. Единичный квадрат делится на 9 равных квадратов, из которых 5 квадратов со стороной $\frac{1}{3}$ образуют «уголок» и фиксируются, оставшиеся 4 квадрата объединяются в один квадрат. На следующем шаге этот объединенный квадрат опять делится на 9 равных квадратов, из которых 5 квадратов со стороной $\frac{2}{9}$ образуют «уголок» и фиксируются, оставшиеся 4 квадрата объединяются в один квадрат, и такое разбиение продолжается до бесконечности. На рисунке 5,*а* показан результат такого квадрирования. Площади квадратов, прилегающих к нижней стороне единичного квадрата, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = \frac{4}{9}$.

а) *б*)

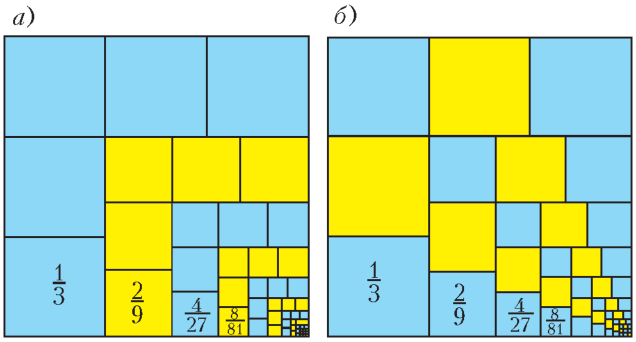

Рис. 5

Если теперь в каждом «уголке» квадраты перекрасить в шахматном порядке, то квадраты окажутся разбитыми на пять групп одноцветных квадратов. Все пять групп состоят из соответственно равных квадратов, поэтому сумма площадей квадратов одной группы равна пятой части площади квадрата. Рисунок 5,*б* является геометрической интерпретацией суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{9} + \frac{4}{81} + \frac{16}{729} + \ldots = \frac{1}{5}$.

Рассмотренное квадрирование можно обобщить, разбивая квадраты на каждом шаге на n^2 равных квадратов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Единичный квадрат разбит на конечное число квадратов (размеры которых могут отличаться). Может ли сумма периметров квадратиков, пересекающихся с главной диагональю, быть больше 1993? (LVI Московская математическая олимпиада)

2. Квадрат с нечетной стороной $2n - 1$ можно представить в виде объединения вложенных квадратных рамок шириной 1. Рассмотрим его квадрирование следующим образом: квадраты первой внешней рамки оставим без изменения; каждый квадрат второй рамки разобьем на 4 квадрата, каждый квадрат третьей рамки разобьем на 9 квадратов и т.д., центральный квадрат разобьем на n^2 квадратов (рис.6). На сколько квадратов оказался разбит данный квадрат?

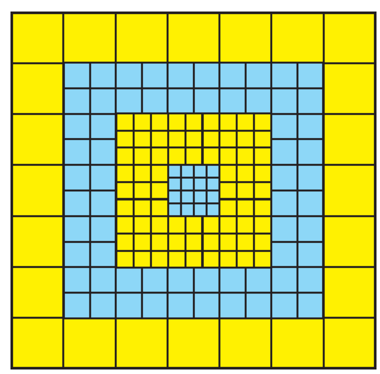

Рис. 6

3. Можно ли разрезать квадрат на квадратики трех разных размеров так, чтобы маленьких, средних и больших было поровну? (Вариант задачи LXXI Московской математической олимпиады)

Литература

1. Яглом И.М. *Как разрезать квадрат?* – М.: Наука, 1968.
2. Гарднер М. *Математические головоломки и развлечения.* – М.: Мир, 1999.
3. Журнал «Квант»,1979, №11.
4. Страшкевич С. и др. *Польские математические олимпиады.* – М.: Мир, 1978.
5. Федоров Р.М. и др. *Московские математические олимпиады 1993–2005 г.* – М.: МЦНМО, 2006.

Материал подготовил Н.Авилов

(Начало см. на с. 31)

Известно, что $\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$.

Упражнение 1. Докажите это.

Пусть также R_1 – радиус описанной около ΔBIC окружности. Тогда, согласно теореме синусов для ΔBIC, имеем

$$CI = 2R_1 \sin\frac{\angle B}{2}, \quad BI = 2R_1 \sin\frac{\angle C}{2},$$
$$BC = 2R_1 \sin\left(90° + \frac{\angle A}{2}\right).$$

Поскольку $CI + BI > BC$ (неравенство треугольника для ΔBIC), то после сокращения на $2R_1$ получим

$$\sin\frac{\angle B}{2} + \sin\frac{\angle C}{2} > \cos\frac{\angle A}{2}.$$

Задача 4. *Докажите, что для углов треугольника ABC выполняется равенство*

$$\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2}\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2}\operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2}.$$

Решение. Пусть I – инцентр в треугольнике ABC. Проведем AI (она совпадет с биссектрисой угла A), а также $IT \perp AB$, где $IT = r$ – радиус вписанной в ΔABC окружности (рис.4).

Известно, что отрезок $AT = p - a$ (p – полупериметр ΔABC, $a = BC$).

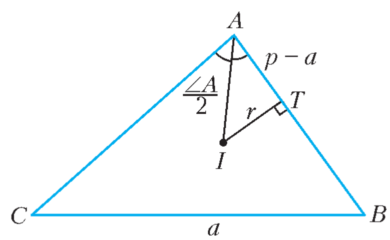

Рис. 4

Упражнение 2. Докажите это.

Тогда $\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} = \frac{p-a}{r}$. Аналогично, $\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2} = \frac{p-b}{r}$, $\operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2} = \frac{p-c}{r}$. Имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2} =$$
$$= \frac{p-a+p-b+p-c}{r} = \frac{3p-(a+b+c)}{r} = \frac{p}{r}.$$

В то же время,

$$\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2}\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2}\operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3} =$$
$$= \frac{S^2}{pr^3} = \frac{p^2r^2}{pr^3} = \frac{p}{r}$$

(мы воспользовались формулой Герона).

Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2}\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2}\operatorname{ctg}\frac{\angle C}{2}.$$

Следствие. Заменив углы $\frac{\angle A}{2}$, $\frac{\angle B}{2}$, $\frac{\angle C}{2}$ на углы $90° - \angle A$, $90° - \angle B$, $90° - \angle C$ (каждая из сумм углов равна $90°$), получим

$$\operatorname{tg}\angle A + \operatorname{tg}\angle B + \operatorname{tg}\angle C = \operatorname{tg}\angle A \operatorname{tg}\angle B \operatorname{tg}\angle C.$$

Задача 5. *Докажите справедливость такого неравенства для произвольного треугольника ABC:*

$$\sin\frac{\angle A}{2} \le \frac{a}{b+c}.$$

Решение. Пусть в ΔABC проведена биссектриса AL, I – инцентр и $IK = IT = r$ (рис.5).

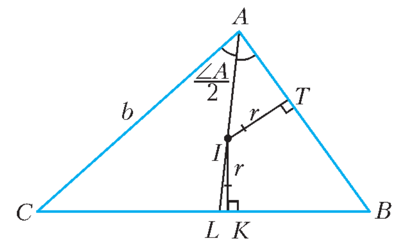

Рис. 5

Доказать данное неравенство – все равно, что доказать неравенство $\frac{1}{\sin\frac{\angle A}{2}} \ge \frac{b+c}{a}$. Из ΔAIT

$$\sin\frac{\angle A}{2} = \frac{r}{AI}, \text{ и } \frac{1}{\sin\frac{\angle A}{2}} = \frac{AI}{r}.$$

Известно, что биссектриса угла A делится инцентром в таком отношении: $\frac{AI}{IL} = \frac{b+c}{a}$.

Упражнение 3. Докажите это.

Очевидно, $\frac{AI}{r} \ge \frac{AI}{IL}$ ($IK = r$ – катет, IL – гипотенуза в ΔILK). Значит, $\frac{1}{\sin\frac{\angle A}{2}} = \frac{AI}{r} \ge \frac{AI}{IL} = \frac{b+c}{a}$. Откуда $\sin\frac{\angle A}{2} \le \frac{a}{b+c}$.

Задача 6. *Докажите, что для углов A, B, C треугольника ABC выполняется следующие неравенство:*

$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C > 1.$$

Решение. Пусть O – центр описанной окружности остроугольного ΔABC. Проведем OM_1, OM_2, OM_3 – серединные перпендикуляры к сторонам BC, AC и AB соответственно (рис.6).

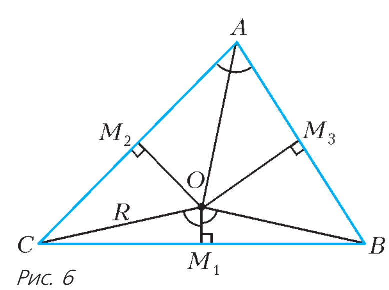

Рис. 6

Из ΔOM_1C $\cos\angle A = \cos\angle COM_1 = \frac{OM_1}{R}$. Аналогично, $\cos\angle B = \frac{OM_2}{R}$ и $\cos\angle C = \frac{OM_3}{R}$. Тогда $\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C = \frac{OM_1 + OM_2 + OM_3}{R}$. Однако $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$ (согласно *формуле Карно* для остроугольного треугольника).

Упражнения

4. Докажите формулу Карно для остроугольного треугольника.

5. Для тупоугольного треугольника формула Карно имеет другой вид. Подумайте, какой, и докажите соответствующую формулу.

Следовательно,

$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C = \frac{R+r}{R} = 1 + \frac{r}{R} > 1 .$$

Замечание. Покажите, что и в случае тупоугольного треугольника ABC неравенство $\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C > 1$ остается верным.

Задача 7. *Докажите, что в произвольном треугольнике ABC*

$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \le \frac{3}{2} .$$

Решение. Пусть I – инцентр в ΔABC, а $IK = IN = IT = r$ (рис.7).

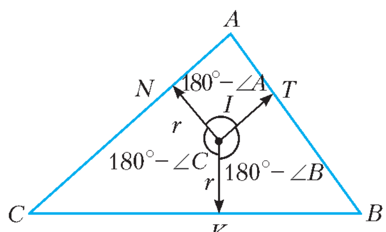

Рис. 7

Рассмотрим очевидное векторное неравенство: $(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IT})^2 \ge 0$. Имеем:

$$3r^2 + 2r^2\left(\cos(180^\circ - \angle A) + \cos(180^\circ - \angle B) + \cos(180^\circ - \angle C)\right) \ge 0 ,$$

или

$$3r^2 \ge 2r^2(\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C) ,$$

откуда

$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos C \le \frac{3}{2} .$$

Задача 8. *Докажите справедливость неравенства $\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C \ge -\frac{3}{2}$, где $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – углы треугольника ABC.*

Решение. Пусть O – центр описанной около ΔABC окружности (рис.8).

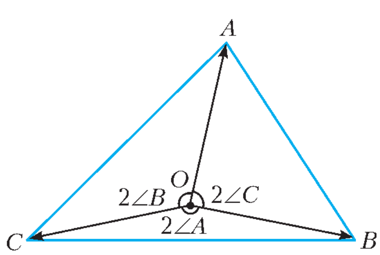

Рис. 8

Запишем очевидное неравенство для векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$: $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \ge 0$. Следовательно,

$$3R^2 + 2R^2(\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C) \ge 0 ,$$

откуда

$$\cos 2\angle A + \cos 2\angle B + \cos 2\angle C \ge -\frac{3}{2} .$$

Следствие. Поскольку $\cos 2\angle A = 1 - 2\sin^2\angle A$, $\cos 2\angle B = 1 - 2\sin^2\angle B$, $\cos 2\angle C = 1 - 2\sin^2\angle C$, сразу же получаем еще одно важное неравенство:

$$\sin^2\angle A + \sin^2\angle B + \sin^2\angle C \le \frac{9}{4} .$$

Задача 9. *Найдите* $\sin 18^\circ$.

Решение. Рассмотрим равнобедренный ΔABC с углом 108° при вершине A ($AB = AC$) (рис.9). Он замечателен тем,

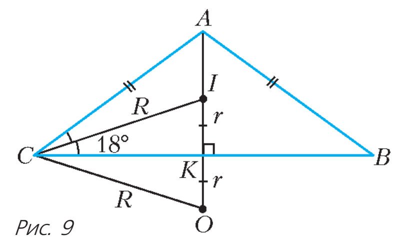

Рис. 9

что в этом треугольнике точки I и O симметричны друг другу относительно стороны BC.

Упражнение 6. Докажите это.

Тогда $IK = KO = r$, а $CI = CO = R$. Из ΔIKC $\sin 18^\circ = \frac{r}{R}$. Очевидно, $OI = 2r$. Но по *формуле Эйлера* $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Таким образом, $4r^2 = R^2 - 2Rr$. Делим обе части последнего равенства на R^2 и получаем $4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\frac{r}{R} - 1 = 0$, или $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$, откуда $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (второй корень отрицательный). Отметим, что в этой задаче нам помогли обе точки: O и I.

В заключение предлагаем для самостоятельного решения еще несколько тригонометрических упражнений, в которых могут быть успешно применены центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

Задачи

10. Докажите, что в треугольнике ABC площади S со сторонами a, b, c и углами A, B, C выполняется равенство $a^2\operatorname{ctg}\angle A + b^2\operatorname{ctg}\angle B + c^2\operatorname{ctg}\angle C = 4S$.

11. Докажите справедливость формулы

$$\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle C}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle C}{2} = 1$$

и, как следствие, формулы $\operatorname{ctg}\angle A\operatorname{ctg}\angle B + \operatorname{ctg}\angle B\operatorname{ctg}\angle C + \operatorname{ctg}\angle A\operatorname{ctg}\angle C = 1$.

12. Верно ли, что в тупоугольном треугольнике ABC выполняется неравенство $\operatorname{tg}\angle A + \operatorname{tg}\angle B + \operatorname{tg}\angle C < 0$?

13. Докажите, что если в треугольнике ABC выполняется равенство $\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2} = \frac{b+c}{a}$, то этот треугольник прямоугольный.

14. Докажите, что $\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2} = \frac{r}{4R}$ и, как следствия^

1) $\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2} \le \frac{1}{8}$; 2) $\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C \le \frac{1}{8}$.

15. Докажите, что $\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\angle C}{2} \ge \sqrt{3}$ и, как следствие, $\operatorname{ctg}\angle A + \operatorname{ctg}\angle B + \operatorname{ctg}\angle C \ge \sqrt{3}$.

Указание. Воспользуйтесь знаменитым неравенством $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+xz)$ для произвольных x, y, z и результатом задачи 11.

О плавании одномерных объктов

М.ДАВЛЕТШИН, В.СОЛОВЬЕВ,
Ф.СТРЕЛЬНИКОВ, Е.ЮНОСОВ

Практически каждому доводилось видеть, как плавает на поверхности воды сухое бревно – оно находится в горизонтальном положении и устойчиво сохраняет это положение. А может ли бревно плавать в вертикальном или наклонном положении? Чтобы ответить на эти вопросы, мы провели исследование плавания одномерных объектов.

Немного теории

Будем называть одномерным объектом тело, длина которого много больше его ширины и толщины. Рассмотрим цилиндрическую палочку длиной L и диаметром d. Если $d \ll L$, то палочку можно считать одномерным объектом. Введем некоторые обозначения, которые будут полезны в дальнейшем. Пусть ρ – средняя плотность палочки, $\rho_ж$ – плотность жидкости, $\Delta\rho = (\rho_ж - \rho)$ – разность плотностей жидкости и палочки. Разумеется, $\rho_ж > \rho$. Пусть далее Q – объем палочки, V – объем надводной (не погруженной в жидкость) части палочки, $k = V/Q$ – отношение этих объемов.

Если тело плавает на поверхности жидкости, то выполнено условие равновесия

$$mg = F_A,$$

где $mg = \rho Q g$ – сила тяжести палочки, $F_A = \rho_ж (Q - V) g$ – сила Архимеда, или выталкивающая сила. Используя введенные ранее обозначения, можно переписать это равенство в виде

$$\rho = \rho_ж (1 - k), \text{ или } \rho_ж k = \Delta\rho.$$

В дальнейшем будем рассматривать ситуацию, при которой средняя плотность палочки близка к плотности жидкости, тогда $V \ll Q$ и $k \ll 1$.

Допустим, что палочка оказалась в наклонном положении, как это показано на рисунке 1. На нее действуют сила тяжести и сила Архимеда (рис.2), которые по условию равновесия равны между собой. Если палочка однородная, то точка приложения силы тяжести палочки находится в ее геометрическом центре, а точка приложения силы Архимеда несколько смещена от геометрического центра палочки в сторону утопленного конца.

Представим силу Архимеда в виде двух сил $\vec{F}$ и $\vec{f}$ (рис.3). Здесь $\vec{F}$ – это выталкивающая сила, действующая

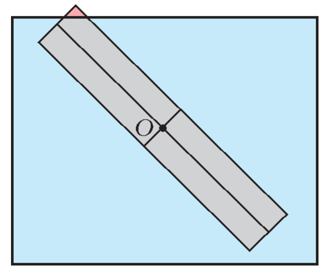

Рис. 1

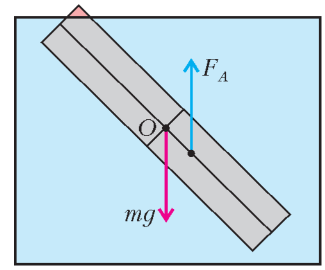

Рис. 2

на симметричную погруженную часть палочки, т.е. на палочку, от которой симметрично отрезаны два одинаковых кончика, равных надводной части палочки. Сила $\vec{F}$ приложена к центру палочки O. Сила $\vec{f}$ – это выталкивающая сила, действующая на погруженную часть палочки, расположенную относительно центра палочки симметрично надводной части палочки. Приложена сила $\vec{f}$ к центру тяжести подводной части палочки в объеме V и равна

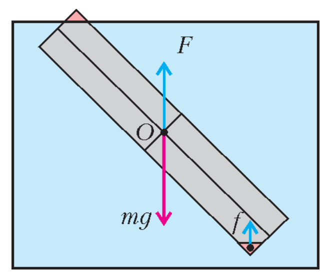

Рис. 3

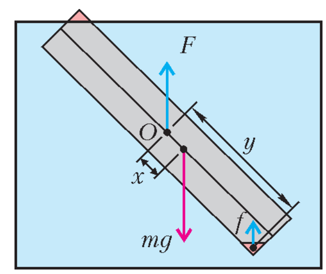

Рис. 4

$$f = \rho_ж V g = \rho_ж k Q g = \Delta\rho Q g.$$

Видно, что относительно оси, проходящей через центр палочки O, силы $m\vec{g}$ и $\vec{F}$ имеют нулевой вращающий момент, а момент силы $\vec{f}$ отличен от нуля. В результате палочка будет вращаться вокруг оси O (в данном случае против часовой стрелки) и одновременно подниматься вверх до тех пор, пока не займет горизонтальное положение. Вот почему однородная длинная палочка плавает в горизонтальном положении, и это положение равновесия устойчиво.

А что будет, если в силу неоднородности центр тяжести палочки смещен, например, в правую сторону? Тогда в наклонном положении (рис. 4) относительно центра палочки O помимо вращающего против часовой стрелки момента силы $\vec{f}$ возникает еще вращающий по часовой стрелке момент силы тяжести $m\vec{g}$. Теперь все зависит от того, какой из этих моментов больше.

Пусть для определенности α – угол наклона палочки (угол между осью палочки и горизонтальной плоскостью), x – смещение центра тяжести палочки от ее геометрического центра, y – расстояние от центра палочки до точки приложения силы $\vec{f}$. Тогда относительно точки O момент силы, вращающий палочку по часовой стрелке, равен $mgx\cos\alpha$, а момент силы, вращающий палочку против часовой стрелки, равен $fy\cos\alpha$. Значит, условие равновесия палочки в этом положении имеет вид

$$mgx\cos\alpha = fy\cos\alpha, \text{ или } \rho x = \Delta\rho y.$$

В случае если это равенство нарушено, то:

Максим Давлетшин, Владислав Соловьев, Федор Стрельников – ученики Московского лицея 1586, а Евгений Николаевич Юносов – их учитель физики.

при $\rho x < \Delta\rho y$ палочка будет вращаться против часовой стрелки, стремясь к горизонтальному положению;

при $\rho x > \Delta\rho y$ палочка будет вращаться по часовой стрелке, стремясь к вертикальному положению.

Если средняя плотность палочки близка к плотности жидкости, т.е. $k \ll 1$, то можно достаточно четко разграничить три возможных случая плавания палочки.

1) Будем называть *горизонтальным* плаванием такое положение палочки, при котором ни один из торцов палочки не погружен в жидкость полностью (рис. 5). Если угол между осью палочки и горизонтальной плоскостью равен

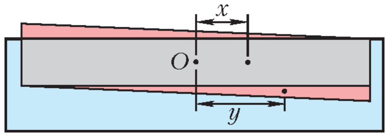

Рис. 5

нулю, то точка приложения силы $\vec{f}$ находится прямо под геометрическим центром палочки. По мере увеличения угла наклона палочки эта точка будет смещаться вправо, и в предельном случае можно считать, что $y = L/4$, поскольку центр тяжести конуса (или пирамиды) находится на расстоянии одной четверти высоты от основания конуса (или пирамиды). Тогда условие горизонтального плавания будет таким:

$$\rho x < \frac{\Delta\rho L}{4},$$

при этом угол между осью палочки и горизонтальной плоскостью (в радианах) заведомо много меньше отношения d/L.

2) Будем называть *вертикальным* плаванием такое положение палочки, при котором верхний торец палочки находится полностью над поверхностью жидкости, т.е. не погружен в жидкость (рис.6). В таком случае можно считать, что $y = L/2$, и условием вертикального плавания палочки является неравенство

$$\rho x > \frac{\Delta\rho L}{2},$$

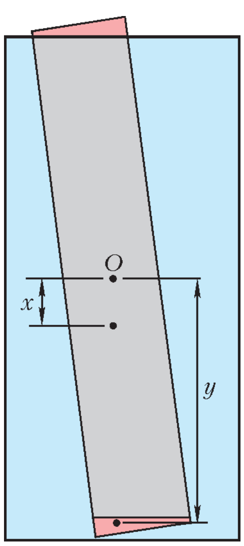

Рис. 6

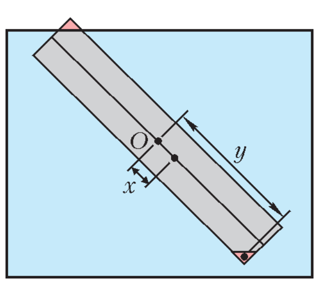

Рис. 7

при этом угол между осью палочки и вертикалью по порядку величины будет мал и примерно равен $k^{1/3}$.

3) Все иные виды плавания, отличающиеся от горизонтального и вертикального, будем называть *наклонными* (рис.7). Условие такого вида плавания будет иметь вид

$$\frac{\Delta\rho L}{4} \le \rho x \le \frac{\Delta\rho L}{2}.$$

Экспериментальная часть

В качестве одномерного объекта нами была выбрана длинная и тонкая деревянная палочка – зубочистка. В дальнейшем будем именовать ее просто палочкой. Ее длина 60 мм, а максимальная толщина в серединной части 2 мм. Палочка была пропитана подсолнечным маслом – для этого она некоторое время (10 мин) находилась в горячем масле. Это было сделано для того, чтобы в процессе экспериментов палочка не меняла своей плавучести из-за пропитки водой. Этого же можно добиться, покрасив палочку водостойкой краской.

Чтобы увеличить среднюю плотность палочки, максимально приблизив ее к плотности воды, на палочку наматывалась медная проволочка – была выбрана проволока диаметром $d_{\text{м}} = 0{,}3$ мм. Это была самая трудоемкая и кропотливая часть работы, но в результате мы добились того, что при некоторой длине намотанной проволоки палочка тонет, а при укорочении длины проволочки всего на $l_{\text{м}} = 0{,}3$ мм палочка уже всплывает. Этот факт дает возможность оценить объем непогруженной части палочки:

$$V < \frac{V_{\text{м}}\rho_{\text{м}}}{\rho} = \frac{\pi d_{\text{м}}^2 l_{\text{м}}\rho_{\text{м}}}{4\rho},$$

где $\rho_{\text{м}}$ – плотность меди.

Количественные оценки показывают, что при тщательном подборе длины утяжеляющей проволоки отличие средней плотности плавающей палочки от плотности воды составляет сотые доли процента. В самом деле, объем палочки $Q = \pi d^2 L/4 = 0{,}2$ см^3, объем непогруженной части палочки $V < V_{\text{м}}\rho_{\text{м}}/\rho = 0{,}04$ мм$^3 = 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ см^3. Тогда

$$k = \frac{V}{Q} < 2 \cdot 10^{-4} = 0{,}02\%.$$

Значит, для вертикального плавания центр тяжести палочки должен быть смещен к одному из концов палочки на величину $x > 6 \cdot 10^{-3}$ мм, а при значениях $x < 3 \cdot 10^{-3}$ мм плавание палочки будет уже горизонтальным. Заметим, что получить нужное значение x не так уж трудно, поскольку это достигается смещением одного-двух витков намотанной на палочку проволоки на величину порядка 1 мм в ту или иную сторону.

Перепишем условие наклонного плавания палочки в более удобном для дальнейших рассуждений виде:

$$\Delta\rho \le \frac{4\rho x}{L} \le 2\Delta\rho.$$

Пусть палочка плавает в жидкости с плотностью ρ_1 в вертикальном положении. Тогда выполнено условие $4\rho x/L > 2\Delta\rho_1$. Если же в другой жидкости с плотностью ρ_2 эта же палочка плавает в горизонтальном положении, то выполнено условие $\Delta\rho_2 > 4\rho x/L$. Совместив эти два неравенства, получим

$$\Delta\rho_2 > 2\Delta\rho_1.$$

Это замечательное неравенство позволяет выдвинуть гипотезу о существовании эффекта переворачивания палочки, т.е. перехода от вертикального плавания к горизонтальному при увеличении плотности жидкости.

В самом деле, наши количественные оценки показывают, что средняя плотность палочки меньше плотности воды всего на 0,02 %. Сместив центр тяжести палочки к одному из концов, можно добиться ее вертикального плавания.

Затем стоит только увеличить плотность воды чуть больше чем на 0,02 %, как палочка перевернется в горизонтальное положение. Вспомним, что плотность морской воды равна 1,03 г/см^3, что на 3% больше плотности пресной воды. Значит, достичь увеличения плотности воды всего на несколько сотых долей процента не представляется трудной задачей – воду нужно просто подсолить! Этот эффект уверенно наблюдается, и вы легко можете его повторить.

Теперь опишем собственно эксперимент. В качестве сосуда используем поллитровую стеклянную банку, а в качестве жидкости – водопроводную воду. Палочку мы уже изготовили, ее средняя плотность максимально близка к плотности пресной воды. Центр тяжести палочки смещен к одному из концов так, чтобы ее положение равновесия в пресной воде было вертикальным. Теперь аккуратно вдоль стенки сосуда высыпаем в воду столовую ложку мелкой поваренной соли. Примерно через минуту со дна сосуда начинает медленно подниматься белое облако. Через полминуты оно достигает поверхности воды и через несколько секунд бесследно рассеивается. Еще через 1–3 минуты палочка начинает поворачиваться из своего вертикального положения и спустя 10–20 секунд занимает горизонтальное положение.

Внимание! Возможен артефакт (от лат. artefactum – искусственно сделанное). Дело в том, что причиной переворачивания палочки может оказаться белое облако – в нем содержится множество пузырьков воздуха, которые, прилипнув к палочке и таким образом облегчив ее, приведут к эффекту переворачивания. Этот побочный эффект уверенно наблюдается, если в воду насыпать сразу много соли. Убедиться в этом очень легко. Достаточно сбить прилипшие к палочке пузырьки, пополоскав ее в той же воде, – и она вновь будет плавать вертикально. Но через некоторое время, когда вследствие диффузии плотность верхних слоев воды достигнет критического значения, палочка обязательно перевернется.

НАША ОБЛОЖКА

Влажные пятна от воды

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Чтобы ответить на поставленный вопрос, проведем простой опыт. Положим сухую бумажную салфетку на книгу, а потом смочим часть салфетки чистой водой (рис.1). Мы увидим, что влажная салфетка станет полупрозрачной и сквозь нее можно будет прочесть ранее невидимый текст на обложке книги и рассмотреть узор ткани, на которой лежит книга.

Объяснить увиденное можно, например, следующим образом. Вода проникает внутрь салфетки и пропитывает ее с помощью капиллярных сил. При этом волокна, из которых состоит салфетка, удлиняются (как это происходит, например, в волосяном гигрометре) и отодвигаются друг от друга. В результате салфетка становится почти прозрачной. В этом можно убедиться, если посмотреть, как наша салфетка пропускает свет (рис.2). На фотографии видно, что пятна от воды на салфетке более светлые, чем сухие ее части. Это значит, что пятна от воды лучше пропускают свет, чем отражают. Вот почему в отраженном свете пятна воды будут казаться более темными. Такие же темные пятна могут оставлять и другие бесцветные прозрачные жидкости, например глицерин.

Рис. 1

Рис. 2

Возможно также, что причиной просветления является образование своеобразных световодов, по которым свет активно проходит сквозь салфетку. Не исключены и другие причины.

Интересно, а что по этому поводу думаете вы?

К.Богданов