Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2184» или «Ф2190». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2184–М2186, М2188–М2190 предлагались на XXXI Турнире городов.

Задача Ф2195 предлагалась на заключительном этапе XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи М2184–М2190, Ф2190–Ф2197

М2184. Про функцию $f(x)$ известно следующее: любая прямая на координатной плоскости имеет с графиком $y = f(x)$ столько же общих точек, сколько с параболой $y = x^2$. Докажите, что функция $f(x)$ тождественно равна x^2.

А.Шаповалов

М2185. Дано натуральное число $n \geq 5$. Про пирамиду $SA_1A_2\ldots A_n$ известно, что ее основание $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный n-угольник, а все боковые грани – равнобедренные треугольники (не обязательно с вершиной S). Обязательно ли эта пирамида правильная?

Г.Гальперин

М2186. Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

С.Маркелов

М2187. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке D. Докажите, что прямая DH перпендикулярна медиане, проведенной из вершины B.

С.Ильясов (ученик 8 класса, Алматы)

М2188. На плоскости лежит игла. Разрешается поворачивать иглу на 45° вокруг любого из ее концов. Можно ли, сделав несколько таких поворотов, добиться того, чтобы игла вернулась на исходное место, но при этом ее концы поменялись местами?

А.Грибалко

М2189. Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

А.Клячко, Е.Френкель

М2190. Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить 12345 + 6 + 789 = 13140). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.

А.Толпыго

Ф2190. Камень брошен с начальной скоростью $v_0 = 40$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найдите максимальную угловую скорость вращения вектора скорости камня в процессе свободного полета.

А.Камнев

Ф2191. На гладком горизонтальном столе находится легкий стержень, к концам которого привязаны короткие, нерастяжимые куски легкой нити (рис.1). К свободным

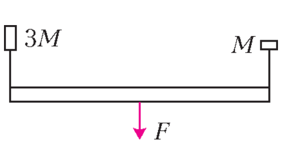


Рис. 1

концам кусков нити прикреплены грузы массами M и $3M$, лежащие на столе. К середине стержня приложена сила F, параллельная кускам нити и перпендикулярная стержню. Найдите ускорение середины стержня.

А.Повторов

Ф2192. Имеются 16 одинаковых батареек с ЭДС $\mathcal{E} = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом каждая. Сопротивление нагрузки $R = 1$ Ом. Как нужно соединить батарейки, чтобы получить максимальный ток нагрузки? Найдите этот ток.

А.Зильберман

Ф2193. В сосуде под поршнем находится 1 моль газа. Его температура увеличивается на 1 градус в минуту, а объем за 3 минуты изменился от 30 литров до 31 литра. Давление же газа за это время практически не менялось. Найдите это давление.

А.Газов

Ф2194. Два протона летят навстречу друг другу вдоль одной прямой. В некоторый момент скорости протонов равны v и $2v$, а расстояние между ними равно d. Найдите максимальное ускорение одного из протонов за время их движения.

Д.Протонов

Ф2195. Униполярный индуктор представляет собой быстро вращающийся постоянный магнит в форме диска. Диск выполнен из магнитного сплава, способного создавать сильное магнитное поле, и покрыт тонким проводящим слоем никеля. При вращении диска между осью вращения и боковой поверхностью возникает разность потенциалов, которую можно измерить с помощью неподвижного вольтметра (рис.2). Если же к оси вращения и боковой поверхности подсоединить батарейку, то магнит начнет быстро вращаться, превратившись в электродвигатель. Точно так же, если быстро вращать вал обычного электромотора, он превращается в генератор, и наоборот, если на электрический генератор подать напряжение, он превращается в электромотор. На рисунке 3 показана схема такого реально работающего униполярного электродвигателя, ротором которого является сильный постоянный магнит в форме диска радиусом $r_0 = 2$ см, насаженного на ось. При подключении с помощью скользящих контактов батарейки с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}5$ В диск начинает быстро вращаться.

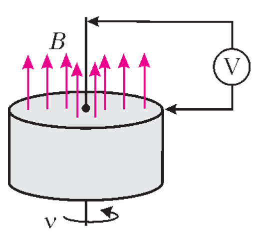


Рис. 2

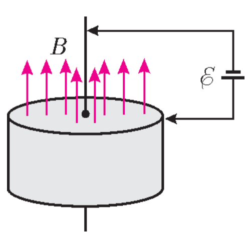


Рис. 3

1) Что покажет неподвижный вольтметр на рисунке 2 при частоте вращения диска $\nu = 3000$ об/мин? Какова полярность этой разности потенциалов? Вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть сверху.

2) Пренебрегая трением, оцените предельную частоту вращения (об/мин) намагниченного диска (ротора униполярного двигателя на рисунке 3). Укажите направление вращения ротора (если смотреть сверху) при заданной полярности батарейки и заданном направлении вектора $\vec{B}$.

Примечание. Считайте, что в проводящем никелевом слое вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля перпендикулярен поверхности диска, постоянен и равен $B = 1$ Тл. Также для упрощения считайте, что ток в проводящем слое течет вдоль радиуса между осью и контактом.

А.Гуденко

Ф2196. Катушка индуктивностью $L = 10$ Гн соединена последовательно с конденсатором емкостью $C = 0{,}1$ мкФ, и цепь подключают к батарейке. Через какое время напряжение на конденсаторе установится с точностью не хуже 1%? Элементы цепи считать идеальными, сопротивление соединяющих проводов $R = 1$ Ом.

З.Катушкин

Ф2197. На плоскую стену перпендикулярно падает плоская световая волна с длиной волны λ. Перед стеной параллельно ей ставят непрозрачный экран с круглым отверстием. Во сколько раз освещенность в центре светового пятна на стене может быть больше, чем освещенность без экрана? Расстояние между экраном и стеной h.

З.Рафаилов

Решения задач М2161–М2168, Ф2177–Ф2181 [1]

М2161. *100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей.)*

Обозначим через Z сумму выигрышей (она же сумма проигрышей). Пусть сначала у каждого пирата весь его песок лежит в *правом* кармане. Попросим каждого проигравшего пирата выдать всем (включая себя самого) по 1/100 от своего проигрыша. Полученный при этом песок каждый кладет в свой *левый* карман. В результате у каждого пирата в *левом* кармане окажется по $Z/100$ золотого песка, а *правый* карман каждого проигравшего «облегчится» на его проигрыш. Далее каждому выигравшему все пираты (включая его самого) выдают из своих *левых* карманов по 1/100 его выигрыша. В результате все *левые* карманы снова опустеют, а к песку в *правом* кармане каждого выигравшего добавится его выигрыш.

Л. Медников, А.Шаповалов

[1] *Решения задач Ф2175, Ф2176 и Ф2182 будут опубликованы позже.*

М2162. *Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. За какое наименьшее количество попыток можно с гарантией открыть сейф?*

Ответ: за 6 попыток.

Приведем пример, в котором сейф с гарантией открывается за 6 попыток:
1234560,
2345610,
3456120,
4561230,
5612340,
6123450.

Среди первых 6 цифр пароля есть цифра от 1 до 6. Поскольку мы каждую цифру от 1 до 6 по разу набрали на каждом из первых 6 мест, значит, в одном из случаев она совпадет с соответствующей цифрой пароля.

Теперь докажем, что пяти попыток недостаточно. Пусть сделано пять попыток. Обозначим через M_1 множество цифр, которые не набирались в качестве первой цифры в этих попытках. Аналогично определим множества $M_2, M_3, \ldots, M_7$. Так как всего было 5 попыток, то $|M_i| \geq 10 - 5 = 5$ (здесь через $|X|$ обозначаем количество элементов в множестве X). Так как каждая из цифр 0, 1, ..., 9 набиралась не более одного раза в каждой попытке, то она содержится не менее чем в двух из семи множеств M_i. Покажем, что найдется пароль $a_1 a_2 \ldots a_7$, где a_i – цифра из M_i; это и будет означать, что в случае такого пароля сейф не откроется.

1 случай. Пусть в двух из множеств M_i не менее семи цифр, скажем $|M_6| \geq 7$ и $|M_7| \geq 7$. Тогда можно выбрать в M_1 любую цифру a_1, в M_2 – цифру a_2, отличную от a_1, и т.д., в M_7 – цифру a_7, отличную от $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

2 случай. Пусть хотя бы в шести из множеств M_i не более 6 цифр. Тогда найдется цифра x, которая не принадлежит двум из этих подмножеств, скажем x не принадлежит M_4 и M_5. Также выберем еще одну цифру $y \neq x$, не принадлежащую M_5. Цифра y принадлежит хотя бы одному подмножеству M_i, $i \neq 4$, скажем $y \in M_6$. Цифра x принадлежит хотя бы одному подмножеству M_i, $i \neq 6$, скажем $x \in M_7$. Положим $a_6 = y$, $a_7 = x$. Вычеркнув цифры x и y из подмножеств $M_1, \ldots, M_5$, мы приходим к подмножествам $M'_1, \ldots, M'_5$, для которых $|M'_1| \geq 3$, $|M'_2| \geq 3$, $|M'_3| \geq 3$, $|M'_4| \geq 4$, $|M'_5| \geq 5$ ($M'_5 = M_5$). Далее рассуждаем аналогично случаю 1: можно выбрать в M'_1 любую цифру a_1, в M'_2 – цифру a_2, отличную от a_1, и т.д., в M'_5 – цифру a_5, отличную от a_1, a_2, a_3, a_4.

Замечание. В предыдущих рассуждениях можно избежать перебора случаев, если заметить, что соответствие $i \to M_i$ удовлетворяет *лемме Холла*, применение которой и обеспечивает существование пароля $a_1 a_2 \ldots a_7$, где a_i – цифра из M_i. Можно рассмотреть общую задачу про n-значный код в алфавите из $m \neq n$ символов (в нашем случае $n = 7$, $m = 10$) и доказать, что минимальное число попыток при $n \leq m/2$ будет равно $m + 1 - n$, а при $n > m/2$ оно равно $[m/2] + 1$.

Д.Баранов, П.Кожевников

М2163. *Найдите все такие натуральные числа a и b, что:*

а) $\left(a + b^2\right)\left(b + a^2\right)$ *является точной степенью двойки;*

б) $\left(a + b^3\right)\left(b + a^3\right)$ *является точной степенью тройки.*

а) **Ответ**: $a = 1$, $b = 1$.

По условию каждая из скобок $\left(b^2 + a\right)$ и $\left(a^2 + b\right)$ должна являться натуральной степенью двойки.

Пусть $a = 2^k m$, $b = 2^l n$, где m и n нечетные, а k и l – целые неотрицательные, для определенности пусть $k \geq l$. Тогда

$$a^2 + b = 2^{2k} m^2 + 2^l n = 2^l \left(2^{2k-l} m^2 + n\right).$$

Последняя скобка больше 1 и четна только при $2k - l = 0$, т.е. при $k = l = 0$. Это означает, что a и b нечетны.

Пусть тогда $a + 1 = 2^k m$, $b + 1 = 2^l n$, где m и n нечетные, k и l – натуральные числа, для определенности снова пусть $k \geq l$. Тогда

$$a^2 + b = \left(2^k m - 1\right)^2 + 2^l n - 1 = 2^{2k} m^2 - 2^{k+1} m + 2^l n = 2^l A,$$

где $A = 2^{k-l+1} m \left(2^{k-1} m - 1\right) + n$ нечетно, а следовательно, равно 1. Отсюда $n = m = k = 1$. Но тогда и $l = 1$, что дает единственный возможный ответ $a = b = 1$.

б) **Ответ**: $a = 1$, $b = 2$ или $a = 2$, $b = 1$.

Схема решения будет в целом повторять рассуждения из пункта а). По условию каждая из скобок $\left(b^3 + a\right)$ и $\left(a^3 + b\right)$ должна являться натуральной степенью тройки.

Положим $a = 3^k m$, $b = 3^l n$, где m и n не делятся на 3, а k и l – целые неотрицательные числа, для определенности пусть $k \geq l$. Тогда

$$a^3 + b = 3^{3k} m^3 + 3^l n = 3^l \left(3^{3k-l} m^3 + n\right).$$

Последняя скобка больше 1 и может делиться на 3 только при $3k - l = 0$, т.е. при $k = l = 0$. Это означает, что a и b не делятся на 3.

Пусть $a \equiv 1 \pmod 3$, тогда $a^3 \equiv 1 \pmod 3$, поэтому $b^3 \equiv -1 \pmod 3$.

Если $a = 1$, то $b = 3^l - 1$ для некоторого натурального l, отсюда

$$b^3 + a = 3^{3l} - 3^{2l+1} + 3^{l+1} = 3^{l+1} A,$$

где $A = 3^l \left(3^{l-1} - 1\right) + 1$.

При $l > 1$ число A больше 1 и не делится на 3, поэтому возможно только $l = 1$, что приводит к паре $a = 1$, $b = 2$, которая удовлетворяет условию.

Если $a > 1$, то положим $a - 1 = 3^k m$, $b + 1 = 3^l n$, где k, l, m и n – натуральные числа, причем m и n не делятся на 3. Если $k \ge l$, то

$$a^3 + b = \left(3^k m + 1\right)^3 + \left(3^l n - 1\right) =$$

$$= 3^{3k} m^3 + 3^{2k+1} m^2 + 3^{k+1} m + 3^l n = 3^l A,$$

где A больше 1 и не делится на 3, что невозможно. Если же $k \le l$, то $b^3 + a = \left(3^l n - 1\right)^3 + \left(3^k m + 1\right) = 3^k B$, где $B = 3^{2l-k+1} n^2 \left(3^{l-1} n - 1\right) + 3^{l-k+1} n + m$. Как видим, B больше 1 и не делится на 3, что невозможно.

Если же $a \equiv -1 \pmod 3$, то $a^3 \equiv -1 \pmod 3$, поэтому $b \equiv 1 \pmod 3$, и заменой $a \leftrightarrow b$ приходим к разобранному случаю $a \equiv 1 \pmod 3$, $b \equiv -1 \pmod 3$.

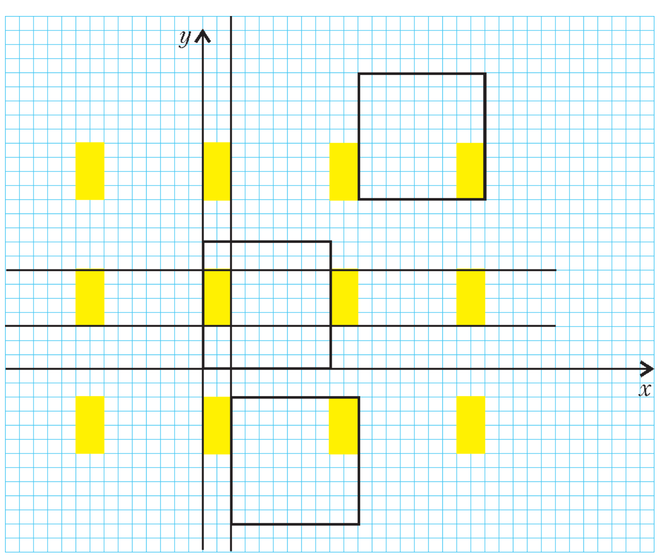
В.Произволов, П.Кожевников

М2164. *а) На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов $n \times n$ клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше чем n^2.*

б) На прямоугольный лист бумаги положили 2009 одинаковых единичных квадратов, стороны которых параллельны краям листа. Затем закрасили все области, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что площадь закрашенной части листа не меньше 1.

Приведем решение задачи б) (пункт а) сводится к б), если изменить масштаб, т.е. квадрат $n \times n$ считать единичным).

Введем систему координат с осями, параллельными краям листа (см. рисунок). Обозначим через K единичный квадрат, заданный неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.



Пусть k-й данный квадрат задается неравенствами

$$x_k \le x \le x_k + 1, \quad y_k \le y \le y_k + 1$$

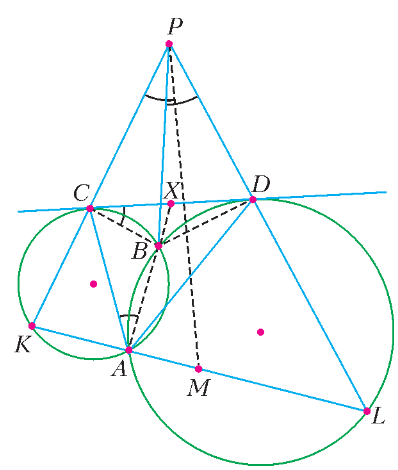
$$(k = 1, 2, \ldots, 2009).$$

Положим $\alpha_k = \{x_k\}$ и $\beta_k = \{y_k\}$ (дробные части чисел x_k и y_k). Квадрат K разбивается прямыми $x = \alpha_k$, $y = \beta_k$ на прямоугольники. Рассмотрим один из таких прямоугольников $\Pi = \Pi_{(0,0)}$ и все его сдвиги $\Pi_{(k,l)}$ на векторы с целыми координатами (k, l). Каждый из данных 2009 квадратов покрывает ровно один из прямоугольников $\Pi_{(k,l)}$ (а с остальными не имеет общих внутренних точек), поэтому хотя бы один из прямоугольников $\Pi_{(k,l)}$ покрыт нечетным числом квадратов, т.е. закрашен. Повторяя рассуждения для каждого из прямоугольников, на которые разбит квадрат K, получаем, что площадь закрашенной части листа не меньше площади квадрата K.

П.Кожевников

М2165. *К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D – точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PB симметрична медиане треугольника KPL, проведенной из вершины P, относительно биссектрисы угла KPL.*

Пусть прямая AB пересекает отрезок CD в точке X (см. рисунок). Тогда $XC^2 = XB \cdot XA = XD^2$, т.е. $XC = XD$, и значит, прямая AB содержит медиану треугольника



ACD. Заметим, что $\angle ACD = \angle AKC$ как угол между касательной и хордой. Аналогично, $\angle CDA = \angle DLA$. Значит, треугольник ACD подобен треугольнику PKL. В частности, если PM – медиана треугольника PKL, то $\angle KPM = \angle CAX$. Так как $\angle PCB = 180° - \angle KCB = \angle KAB = 180° - \angle LAB = \angle LDB = 180° - \angle PDB$, то четырехугольник $BCPD$ вписанный. Имеем $\angle LPB = \angle DPB = \angle DCB = \angle CAB = \angle KPM$, и значит, прямая PB – симедиана (прямая, симметричная медиане треугольника KPL относительно биссектрисы угла KPL).

В.Омельяненко

М2166. *Обозначим через* $[k]!$ *произведение* $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \ldots \cdot \underbrace{11\ldots11}_{k}$ *– всего k сомножителей. Докажите, что число* $[n+m]!$ *делится на произведение* $[n]! \cdot [m]!$.

Обозначим число из k единиц через 1_k, тогда $[m]! = 1_m[m-1]!$, $1_{m+n} = 10^m 1_n + 1_m$. Обозначим

$$C[m,\ n] = \frac{[n+m]!}{[m]![n]!}.$$

Положим $[0]! = 1$, тогда $C[0,\ n]$ и $C[m,\ 0]$ определены и равны 1.

Докажем индукцией по $m + n$, что число $C[m,\ n]$ – целое. База и случай $m = 0$ или $n = 0$ очевидны.

Пусть $m,\ n \geq 1$ и для меньших значений $m + n$ все доказано. Тогда число

$$C[m,\ n] = \frac{1_{m+n}[n+m-1]!}{[m]![n]!} = \frac{\left(1_n 10^m + 1_m\right)[n+m-1]!}{[m]![n]!} =$$

$$= 10^m \frac{1_n[n+m-1]!}{[m]!1_n[n-1]!} + \frac{1_m[n+m-1]!}{1_m[m-1]![n]!} =$$

$$= 10^m C[m, n-1] + C[m-1, n]$$

– тоже целое.

Л.Медников, А.Шаповалов

M2167*. *Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим.*

Отметим на схеме маршрутов катеров максимально возможное число k маршрутов без общих концов; пусть это маршруты $A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$, …, $A_k - B_k$ (здесь все $2k$ островов A_i и B_i попарно различны). Обозначим через C_1, C_2, …, C_l все острова, отличные от A_i и B_i ($l = 2009 - 2k$ нечетно, поэтому имеется хотя бы один остров C_j).

Пусть первым ходом Оля выбирает для прилета остров C_1. Далее, если Максим ходит на A_i (или B_i), Оля отвечает ходом на парный остров B_i (соответственно, A_i).

Предположим, что в какой-то момент Максим сделал ход на остров C_j. Для определенности считаем, что до этого момента путь Оли и Максима по островам имел вид $C_1 - A_1 - B_1 - A_2 - B_2 - \ldots - A_t - B_t - C_j$. Но тогда в противоречие с максимальностью k мы можем выбрать $k + 1$ маршрутов без общих концов: $C_1 - A_1$, $B_1 - A_2, \ldots B_{t-1} - A_t, B_t - C_j$, $A_{t+1} - B_{t+1}, \ldots A_k - B_k$. Полученное противоречие показывает, что ход Максима на остров C_j невозможен. Значит, играя по указанной стратегии, Оля выигрывает, так как у нее всегда найдется ответный ход на ход Максима.

А. Шаповалов

M2168*. *Дан четырехугольник ABCD, вписанный в окружность ω. Пусть R_1 – радиус окружности, касающейся отрезков AB, AD и окружности ω, R_2 – радиус окружности, касающейся отрезков CB, CD и окружности ω. Проводятся всевозможные дуги окружности BD, разбивающие четырехугольник на два криволинейных треугольника. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти криволинейные треугольники, не зависит от выбора дуги BD тогда и только тогда, когда $R_1 = R_2$.*

Обозначим через r_1 и r_2 радиусы окружностей, вписанных в криволинейные треугольники ABD и CBD соответственно. Докажем более общий факт: величина $\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}$ равна 1 (независимо от выбора дуги BD).

Из этого факта сразу следует утверждение задачи. Действительно, если $R_1 = R_2$, то сумма $r_1 + r_2$ постоянна. Если же $R_1 \neq R_2$, то величина

$$r_1 + r_2 = R_1\left(\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}\right) + r_2\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$$

является непостоянной линейной функцией от r_2 (а r_2, как легко видеть из условия, может принимать различные значения).

Лемма. Пусть даны окружности c_1 и c_2, пересекающиеся в точках M и N. На одной из дуг окружности c_1 выбирается точка X. Окружность s_1 касается отрезков XM, XN и окружности c_1, а окружность s_2 касается отрезков XM, XN и фиксированной дуги MN окружности c_2 (рис.1). Тогда отношение радиусов $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ окружностей s_1 и s_2 не зависит от выбора точки X.

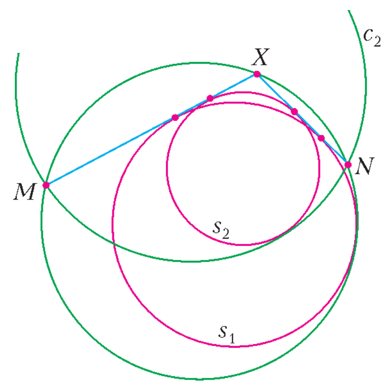


Рис. 1

Доказательство леммы. Пусть прямая XN пересекает вторично окружность c_2 в точке Y. Пусть окружность s_1 касается отрезков XM и XN в точках M_1 и N_1, а окружность s_2 – в точках M_2 и N_2. Как известно (см., например, основную теорему в статье В.Протасова «Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха» в «Кванте» № 4 за 2008 г.), прямая M_1N_1 проходит через центр I вписанной окружности треугольника XMN, а прямая M_2N_2 – через центр J вписанной либо одной из вневписанных окружностей треугольника YMN. Далее будем рассматривать первый случай (рис.2); второй разбирается аналогично. Пусть в треугольнике XMN точка I' – центр вневписанной окружности, касающейся стороны XM. Тогда точки I, J, I'

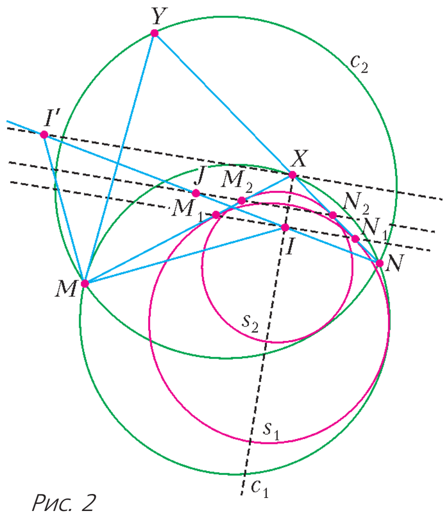


Рис. 2

лежат на одной прямой – биссектрисе угла XNM, прямые XI', M_1I и M_2J параллельны (они перпендикулярны биссектрисе угла MXN). Заметим, что при изменении точки X величины углов MIN, MJN, $MI'N$ не меняются

$$\left(\angle MIN = 90^\circ + \frac{\angle MXN}{2},\quad \angle MJN = 90^\circ + \frac{\angle MYN}{2},\right.$$

$$\left.\angle MI'N = 90^\circ + \frac{\angle MXN}{2}\right).$$

Поэтому (прямоугольные) треугольники MII' для любых положений точки X подобны, а точка J делит отрезок II' в фиксированном отношении.

Далее, из гомотетии с центром X вытекает, что отношение радиусов $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ равно $\frac{XM_1}{XM_2} = \frac{I'I}{I'J}$, т.е. не зависит от положения точки X.

Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что в условии задачи сумма $\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}$ не изменится, если точки A и C перемещать по соответствующим дугам окружности ω. Таким образом, можем считать, что точки A и C являются серединами дуг BD (рис.3). В таком случае из симметрии относительно диаметра AC следует, что окружности, вписанные в криволинейные треугольники ABD и CBD, касаются в точке Z. Из гомотетии с центром A следует, что $\frac{r_1}{R_1} = \frac{AZ}{AC}$. Аналогично, $\frac{r_2}{R_2} = \frac{CZ}{AC}$. Таким образом,

$$\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} = \frac{AZ}{AC} + \frac{CZ}{AC} = \frac{AZ + CZ}{AC} = 1.$$

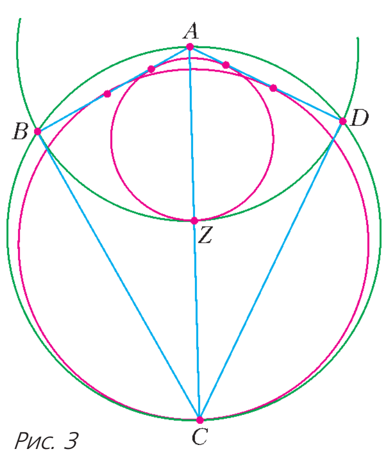


Рис. 3

Из леммы несложно вывести следующее ее обобщение. Если рассмотреть еще окружность (или прямую) c_3, проходящую через точки M и N, и окружность s_3, касающуюся отрезков XM, XN и фиксированной дуги окружности c_3, то отношение радиусов $\frac{\rho_2}{\rho_3}$ окружностей s_2 и s_3 не будет зависеть от выбора точки X.

На самом деле утверждение леммы эквивалентно теореме о сегменте (см. статью В.Протасова «Вокруг теоремы Фейербаха» в «Кванте» № 9 за 1992 г.).

Замечание. Из леммы легко вытекает **теорема Фейербаха**.

Пусть H – ортоцентр треугольника ABC; Ω и ω – описанная и вписанная окружности; Ω' – дуга окружности BCH, симметричная дуге BAC окружности Ω относительно BC; ω' – окружность, вписанная в угол BAC и касающаяся Ω' внутренним образом.

По теореме «о луночках» $\frac{R(\omega')}{R(\omega)} = 2$. Действительно, при фиксации окружностей Ω и Ω' это отношение не зависит от положения точки A на дуге BAC, а для частного случая $AB = AC$ из симметрии и гомотетии с центром A (здесь M – середина BC, A' симметрична A относительно BC):

$$\frac{R(\omega')}{R(\omega)} = \frac{AA'}{AM} = 2.$$

Значит, при гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ окружности ω' и Ω' переходят соответственно в ω и окружность девяти точек треугольника ABC.

Н.Белухов, И.Богданов, П.Кожевников

Ф2177. *На корпусе фена, предназначенного для быстрой сушки волос, есть надпись: 1200 Вт. Диаметр отверстия, из которого выходит воздух с температурой 80 °С, равен 4 см. Температура воздуха в комнате 20 °С, давление воздуха 10^5 Па. С какой средней скоростью относительно корпуса фена движется выходящий наружу горячий воздух?*

В установившемся режиме работы кинетическая энергия деталей фена и внутренняя энергия его частей не меняются. Энергия, полученная феном из электрической сети, преобразуется в тепло и кинетическую энергию упорядоченного движения воздуха. Процесс нагрева воздуха (двухатомного газа) происходит при постоянном давлении. Молярная теплоемкость воздуха в таком процессе равна $7R/2$. Кинетическая энергия упорядоченного движения, приобретенная воздухом за определенное время, пропорциональна кубу скорости, а количество теплоты, нужное для нагрева воздуха в изобарном процессе, пропорционально первой степени скорости. Анализ показывает, что при заданных условиях кинетическая энергия упорядоченного движения воздуха во много раз меньше полученного количества теплоты, поэтому точное уравнение третьей степени для нахождения скорости горячего воздуха:

$$v\left(\frac{v^2}{2}+\frac{7R(T_1-T_2)}{2\mathrm{M}}\right)=\frac{PRT_1}{p\mathrm{M}\pi D^2/4}$$

можно заменить на приближенное уравнение:

$$v\frac{7R(T_1-T_2)}{2\mathrm{M}}=\frac{PRT_1}{p\mathrm{M}\pi D^2/4}.$$

Отсюда находим

$$v=\frac{8PT_1}{7p\pi D^2(T_1-T_2)}\approx 16\ \text{м/с}.$$

С.Варламов

Ф2178. *Твердое вещество* CO_2 *похоже на плотно слепленный снежок – белый непрочный кусок скомканного снега – и называется «сухой лед», который при атмосферном давлении имеет температуру* $-65\ °C$. *Некоторое количество этого вещества взвесили и положили в нерастянутую резиновую оболочку воздушного шарика, имеющую массу 3 г. Оболочку загерметизировали, завязав узлом резиновую входную трубку шарика, дождались, пока весь сухой лед испарился и нагрелся до комнатной температуры, а затем надувшийся шарик взвесили на тех же весах – получился результат 69 г. Что показывали весы при взвешивании твердого вещества?*

Объем конденсированного вещества очень мал в сравнении с его объемом в газообразном состоянии, поэтому объемом снежка мы пренебрежем. Резиновые стенки шарика создают внутри шарика дополнительное давление, которое во много раз (примерно в 50 раз) меньше атмосферного давления, поэтому отличие давления внутри шарика от атмосферного давления мы учитывать не будем. При таких предположениях условие равновесия шарика с газом на весах таково:

$$Mg+mg\frac{\mathrm{M}_{\text{возд}}}{\mathrm{M}_{\text{газа}}}=(m+m_0)g.$$

Отсюда находим ответ сначала в грубом приближении:

$$m=\frac{\mathrm{M}_{\text{газа}}(M-m_0)}{\mathrm{M}_{\text{газа}}-\mathrm{M}_{\text{возд}}}\approx 193{,}6\ \text{г}.$$

Если учесть дополнительное давление, создаваемое резиновой оболочкой, например считая, что оно составляет 2% от атмосферного, то получится другой результат:

$$m=\frac{1{,}02\mathrm{M}_{\text{газа}}(M-m_0)}{1{,}02\mathrm{M}_{\text{газа}}-\mathrm{M}_{\text{возд}}}\approx 186{,}5\ \text{г}.$$

С.Варламов

Ф2179. *Нагреватель идеальной тепловой машины имеет начальную температуру 2T, его теплоемкость C, температура холодильника в начальный момент T, его теплоемкость вдвое больше. Теплообмена с окружающей средой нет, машина имеет маленькую мощность даже при начальной разности температур. Найдите температуры тел через очень большое время. Какую работу может совершить машина за это очень большое время?*

Обычно, когда рассматривают принципы работы тепловой машины, считают, что температуры нагревателя и холодильника в процессе отдачи или получения тепла не изменяются. Это означает, что теплоемкости нагревателя и холодильника являются бесконечно большими. Если же теплоемкости этих тел конечны, необходимо учитывать, что их температуры в процессе работы машины будут изменяться. Очевидно, что в конце концов температуры нагревателя и холодильника сравняются. Действительно, в процессе работы машины рабочее тело берет некоторое количество теплоты у нагревателя, часть его превращает в работу, оставшуюся часть передает холодильнику. Другими словами, происходит теплообмен между горячим нагревателем и холодным холодильником с одновременным «уходом» части энергии из этой системы в виде механической работы. Учтем этот «уход» в уравнениях теплового баланса.

Пусть в какой-то момент времени температуры нагревателя и холодильника равны T_1 и T_2 соответственно. По условию на этих телах работает идеальная тепловая машина. А поскольку в идеальной тепловой машине, работающей по циклу Карно, передачи тепла от нагревателя к рабочему телу и от рабочего тела к холодильнику должны осуществляться при фиксированных температурах, необходимо проводить много циклов Карно с бесконечно малыми передачами тепла так, чтобы в каждом цикле температуры нагревателя и холодильника можно было считать неизменными.

Итак, возьмем количество теплоты δQ_1 у нагревателя. Поскольку КПД цикла Карно равен $\eta=1-\frac{T_2}{T_1}$, работа двигателя составит

$$\delta A=\eta\delta Q_1=\delta Q_1-\frac{T_2}{T_1}\delta Q_1,$$

а более холодному телу будет передано количество теплоты

$$\delta Q_2=\delta Q_1-\delta A=\frac{T_2}{T_1}\delta Q_1.$$

Найдем теперь, как изменятся температуры тел после осуществления рассмотренного процесса. Так как нагреватель отдает количество теплоты δQ_1, его температура уменьшится на величину

$$\Delta T_1=-\frac{\delta Q_1}{C}.$$

Аналогично, температура холодильника возрастет на величину

$$\Delta T_2=\frac{\delta Q_2}{2C}=\frac{\delta Q_1}{2C}\frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}=-2\frac{T_1}{T_2},\ \text{или}\ \frac{\Delta T_1}{T_1}=-2\frac{\Delta T_2}{T_2}.$$

Это означает, что в рассмотренном процессе не меняется произведение температуры нагревателя на квадрат температуры холодильника. Причем этот результат будет иметь место и для начальных ($2T$ и T) и для конечных (T_x) температур нагревателя и холодильника:

$$2T(T)^2 = T_x(T_x)^2 \text{, откуда } T_x = \sqrt[3]{2}T = 1{,}26T .$$

Таким образом, в результате работы рассмотренной тепловой машины в течение длительного времени температуры нагревателя и холодильника сравняются и станут равными $T_x = 1{,}26\ T$.

Если бы энергия не уходила из системы, т.е. если бы тепловая машина не совершала механическую работу, то в результате теплообмена между нагревателем и холодильником их температуры также сравнялись бы, но установившаяся температура T_y была бы другой. Ее можно найти из «обычного» уравнения теплового баланса – количество теплоты, отданное нагревателем, равно количеству теплоты, полученному холодильником:

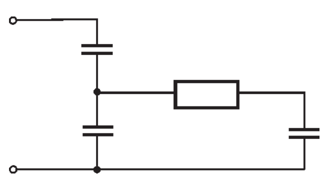
$$C(2T - T_y) = 2C(T_y - T) \text{, откуда } T_y = \frac{4}{3}T = 1{,}3T .$$

Энергия, связанная с разностью установившихся температур $T_y - T_x$, и есть полная механическая работа, совершенная двигателем до того момента, как температуры нагревателя и холодильника сравняются и двигатель больше не сможет совершать работу. Поскольку суммарная теплоемкость тел равна $3C$, то эта работа равна

$$A = 3C(T_y - T_x) = 3C \cdot 0{,}07T = 0{,}21CT .$$

С.Муравьев

Ф2180. *Конденсаторы в схеме (см.рисунок) одинаковые, емкость каждого 100 мкФ, сопротивление резистора 100 Ом. Батарейку напряжением 12 В с малым внутренним сопротивлением подключают к этой схеме. Какое количество теплоты выделится за большое время в резисторе? Какое полное количество теплоты выделится при подключении батарейки?*



Сразу после подключения батарейки происходит такой быстрый процесс – «ближние» конденсаторы заряжаются большими токами, а ток через резистор, он же заряжает оставшийся конденсатор, ограничен и за малый интервал времени не выделяет заметного количества теплоты в резисторе. (Тепло выделяется в сопротивлении проводов и внутреннем, хотя и малом, сопротивлении батарейки.)

Проведем расчет выделившегося количества теплоты в два этапа. Сначала посчитаем тепло в резисторе. После быстрого процесса заряда последовательно соединенных конденсаторов (третий конденсатор пока не заряжен) разность потенциалов на резисторе составит $U_0/2$, где U_0 – напряжение батарейки. Эта разность потенциалов по мере перезарядки конденсаторов спадает до нуля, через резистор при этом протекает полный заряд $CU_0/3$, и количество теплоты в резисторе определяется средней разностью потенциалов между его выводами и протекшим зарядом:

$$Q_R = \frac{1}{2}\frac{U_0}{2}\frac{CU_0}{3} = \frac{CU_0}{12} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж} .$$

Полное количество теплоты в системе посчитать совсем просто. После установления зарядов полная емкость системы равна $C_{\text{общ}} = 2C/3$ (два конденсатора соединены параллельно и к ним еще один конденсатор подключен последовательно). Энергия этой системы равна $C_{\text{общ}}U_0^2/2$. Батарейка совершает работу $C_{\text{общ}}U_0^2$. Полное выделившееся количество теплоты определим из баланса энергий:

$$Q_{\text{общ}} = C_{\text{общ}}U_0^2 - \frac{C_{\text{общ}}U_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{3} = 4{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж} .$$

А.Повторов

Ф2181. *В однородном электрическом поле напряженностью E_0 удерживают диполь, состоящий из легкого жесткого стержня длиной d, на концах которого укреплены одинаковые маленькие шарики массой m каждый с зарядами q и $-q$. Найдите максимальную угловую скорость стержня после отпускания диполя. Сила тяжести отсутствует.*

Это простая задача. Угловая скорость вращения определяется начальным положением диполя, и максимальная угловая скорость получится в том случае, когда работа сил поля максимальна. При этом к моменту достижения максимальной угловой скорости диполь из начального положения поворачивается на $180°$, каждый из зарядов смещается на d и электрическое поле совершает работу

$$2 \cdot qE_0 \cdot d = 2qE_0d .$$

Из закона сохранения энергии

$$2\frac{m(\omega d/2)^2}{2} = 2qE_0d$$

находим максимальную угловую скорость стержня:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{2qE_0}{md}} .$$

А.Простов

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

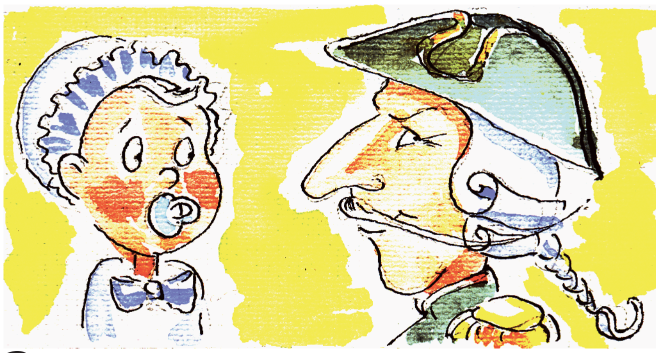
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Задачи

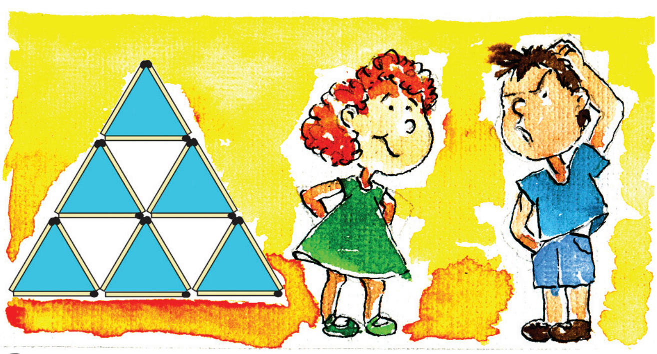
1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что найдутся три натуральных числа *a*, *b*, *c*, обладающие таким свойством: ни *a*, ни *b* не делятся на *c*, но *ab* делится на c^2. Не ошибается ли барон?

Фольклор



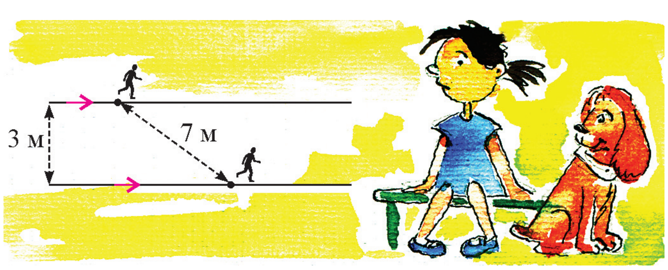
2. Восемнадцать спичек лежат на плоскости, образуя девять не перекрывающихся равносторонних треугольников. Можно ли переложить спички так, чтобы получилось десять не перекрывающихся равносторонних треугольников (не обязательно одинаковых)?

Н.Авилов



3. В парке на расстоянии трех метров друг от друга проходят две параллельные прямые дорожки. Петя и Вася одновременно побежали, каждый по своей дорожке, в одну и ту же сторону. Сначала расстояние между ребятами было три метра, а через минуту стало семь метров. Какое расстояние будет между Петей и Васей еще через минуту? (Каждый из ребят бежит с постоянной скоростью.)

С.Дориченко



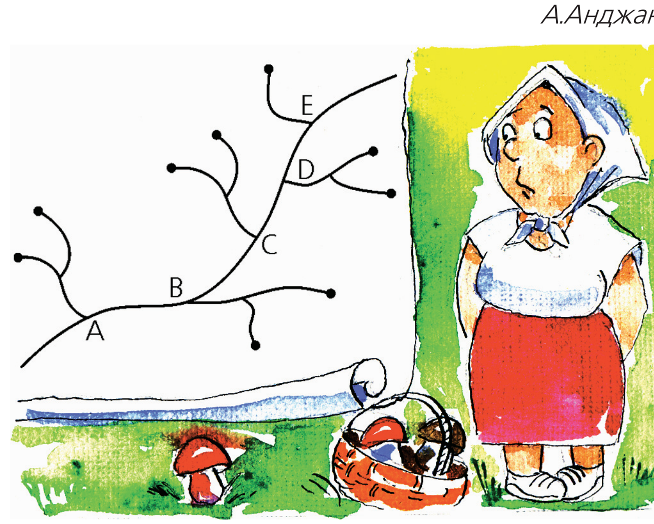
4. Однажды в мебельном магазине между клиентом (К) и продавцами (П1), (П2) произошел следующий диалог:
(К) Сколько стоит этот диван?
(П1) 60000 рублей.
(К) Почему так дорого?
(П2) Не удивляйтесь, этот продавец все числа завышает в 3 раза!
(К) Ага, значит диван стоит гораздо дешевле?
(П1) Это сказал мой напарник? Так ведь он все числа занижает в 12 раз!

Сколько же на самом деле стоит диван, если продавцы, когда называют числа, изменяют их каждый в свое число раз, а в остальном говорят правду?

И.Иванов

5. На плане изображено шоссе, от которого отходят несколько дорог к селам. Где на шоссе нужно расположить автобусную остановку, чтобы суммарное расстояние от нее до всех сел (по дорогам и шоссе) было наименьшим?

А.Анджанс



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу:* math@kvant.info *(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

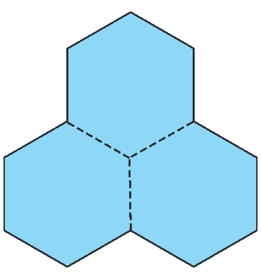
Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Найдутся ли 10 разных натуральных чисел, ни одно из которых не является квадратом целого числа, со свойством:

а) произведение любых двух из этих чисел является квадратом целого числа;

б) произведение любых трех из этих чисел является квадратом целого числа?

С.Дориченко



2. Фигура «соты» представляет собой объединение трех равных правильных шестиугольников. Разрежьте эту фигуру на три одинаковые части и сложите из них один правильный шестиугольник.

Н.Авилов

3. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как обычная шахматная ладья. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в ее цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на черную доску размером 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить ее в шахматном порядке?

Фольклор

4. В прямоугольном треугольнике вписанная окружность касается одной из средних линий. Докажите, что длины сторон этого треугольника относятся друг к другу как 3:4:5.

Р.Гордин

5. В числе, являющемся натуральной степенью двойки, переставили цифры. Может ли полученное число оказаться большей натуральной степенью двойки?

Фольклор

Веревка из паутины

Д.БАГРОВ

Каждый может легко смахнуть паутину, висящую между ветками дерева или под потолком в дальнем углу комнаты. Но мало кто знает, что если бы паутина имела диаметр 1 мм, то она могла бы выдержать груз массой приблизительно 200 кг. Стальная проволока того же диаметра выдерживает существенно меньше: 30–100 кг, в зависимости от типа стали. Почему же паутина обладает такими исключительными свойствами?

Некоторые пауки прядут до семи типов нитей, каждая из которых имеет собственное назначение. Нити могут использоваться не только для ловли добычи, но и для строительства коконов и парашютирования (взлетая на ветру, пауки могут уходить от внезапной угрозы, а молодые пауки таким способом расселяются на новые территории). Каждый из типов паутины производится специальными железами.

Паутина, используемая для ловли добычи, состоит из нескольких типов нитей (рис.1): каркасной, радиальной, ловчей и вспомогательной. Наибольший интерес ученых вызывает каркасная нить: она имеет одновременно высокую прочность и высокую эластичность – именно это сочетание свойств является уникальным. Предельное напряжение на разрыв каркасной нити паука Araneus diadematus составляет 1,1–2,7 ГПа. Для сравнения: предел

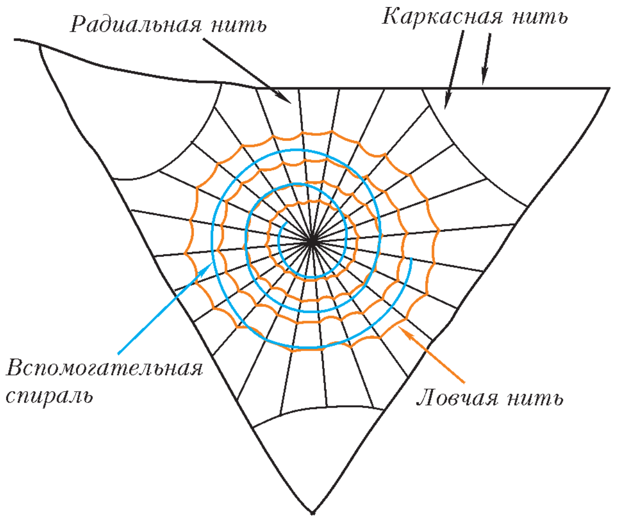


Рис.1. Различные нити в составе паутины: каркасная нить самая прочная, она держит всю паутину в целом; радиальная нить тонкая и не липкая, она поддерживает липкую ловчую нить; вспомогательная спираль помогает расположить ловчую нить

прочности стали 0,4–1,5 ГПа, человеческого волоса ~ 0,25 ГПа. В то же время каркасная нить способна растягиваться на 30–35%, а большинство металлов выдерживают деформацию не более 10–20%.

Представим себе летящее насекомое, которое ударяется в натянутую паутину. При этом нить паутины должна растянуться так, чтобы кинетическая энергия летящего насекомого превратилась в тепло. Если бы паутина запасала полученную энергию в виде энергии упругой деформации, то насекомое отскочило бы от паутины, как от батута. Важное свойство паутины состоит в том, что она выделяет очень большое количество теплоты при быстром растяжении и последующем сокращении: энергия, выделяемая в единице объема, составляет более $150\ \text{МДж/м}^3$ (сталь выделяет $\sim 6\ \text{МДж/м}^3$). Это позволяет паутине эффективно рассеивать энергию удара и не слишком сильно растягиваться, когда в нее попадает жертва. Паутина или полимеры, обладающие аналогичными свойствами, могли бы стать идеальными материалами для легких бронежилетов.

В народной медицине есть такой рецепт: на рану или ссадину, чтобы остановить кровь, можно приложить паутину, аккуратно очистив ее от застрявших в ней насекомых и мелких веточек. Оказывается, паутина обладает кровеостанавливающим действием и ускоряет заживление поврежденной кожи. Хирурги и трансплантологи могли бы использовать ее в качестве материала для наложения швов, укрепления имплантантов и даже как заготовки для искусственных органов. С помощью паутины можно существенно улучшить механические свойства множества материалов, которые в настоящее время применяются в медицине.

Итак, паутина – необычный и очень перспективный материал. Какие же молекулярные механизмы отвечают за ее исключительные свойства?

Мы привыкли к тому, что молекулы – чрезвычайно маленькие объекты. Однако это не всегда так: вокруг нас широко распространены полимеры, которые имеют длинные молекулы, состоящие из одинаковых или похожих друг на друга звеньев. Все знают, что генетическая информация живого организма записана в длинных молекулах ДНК. Все держали в руках полиэтиленовые пакеты, состоящие из длинных переплетенных молекул полиэтилена. Молекулы полимеров могут достигать огромных размеров.

Например, масса одной молекулы ДНК человека порядка $1{,}9\cdot10^{12}$ а.е.м. (однако это приблизительно в сто миллиардов раз больше, чем масса молекулы воды), длина каждой молекулы составляет несколько сантиметров, а общая длина всех молекул ДНК человека достигает 10^{11} км.

Важнейшим классом природных полимеров являются белки, они состоят из звеньев, которые называются аминокислотами. Разные белки выполняют в живых организмах чрезвычайно разные функции: управляют химическими реакциями, используются в качестве строительного материала, для защиты и т.д.

Каркасная нить паутины состоит из двух белков, которые получили названия спидроинов 1 и 2 (от английского spider – паук). Спидроины – это длинные молекулы с массой от 120000 до 720000 а.е.м. У разных пауков аминокислотные последовательности спидроинов могут отличаться друг от друга, но все спидроины имеют общие черты. Если мысленно вытянуть длинную молекулу спидроина в прямую линию и посмотреть на последовательность аминокислот, то окажется, что она состоит из повторяющихся участков, похожих друг на друга (рис.2). В молекуле чередуются два типа участков: относительно гидрофильные (те, которым энергетически выгодно контактировать с молекулами воды) и относительно гидрофобные (те, которые избегают контакта с водой). На концах каждой молекулы присутствуют два неповторяющихся гидрофильных участка, а гидрофобные участки состоят из множества повторов аминокислоты, называемой аланином.

Длинная молекула (например, белок, ДНК, синтетический полимер) может быть представлена как скомканная запутанная веревка. Растянуть ее не составляет труда, потому что петли внутри молекулы могут расправляться, требуя сравнительно небольшого усилия. Некоторые полимеры (например, резина) могут растягиваться на 500% своей начальной длины. Так что способность паутины (материала, состоящего из длинных молекул) деформироваться больше, чем металлы, не вызывает удивления.

Откуда же берется прочность паутины?

Чтобы понять это, важно проследить за процессом формирования нити. Внутри железы паука спидроины накапливаются в виде концентрированного раствора. Когда происходит формирование нити, этот раствор выходит из железы по узкому каналу, это способствует вытягиванию молекул и ориентации их вдоль направления вытяжки, а соответствующие химические изменения вызывают слипание молекул. Фрагменты молекул, состоящие из аланинов, соединяются вместе и образуют упорядоченную структуру, похожую на

Рис.2. Молекула спидроина и модель ее укладки в волокне

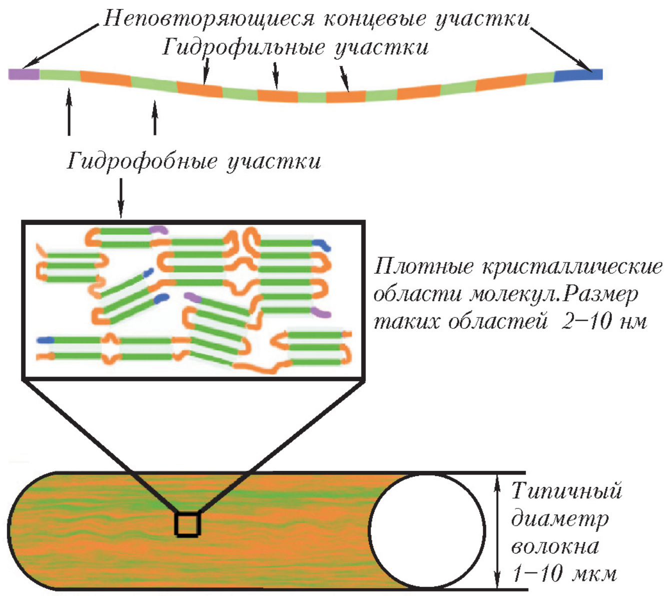


Рис.3. Рекомбинантный белок паутины, способный образовывать особые структуры – тончайшие нити диаметром 3-5 нм

кристалл (рис.3). Внутри такой структуры фрагменты уложены параллельно друг другу и сцеплены между собой водородными связями. Именно эти участки, сцепленные между собой, и обеспечивают прочность волокна. Типичный размер таких плотно упакованных участков молекул составляет несколько нанометров. Расположенные вокруг них гидрофильные участки оказываются неупорядоченно свернутыми, похожими на скомканные веревки, они могут расправляться и этим обеспечивать растяжение паутины.

Многие композиционные материалы, например армированные пластмассы, устроены по тому же принципу, что и каркасная нить: в относительно мягком и подвижном матриксе, который дает возможность деформации, находятся малые по размерам твердые области, которые делают материал прочным. Хотя материаловеды давно работают с подобными системами, созданные человеком композиты только начинают приближаться к паутине по своим свойствам.

Любопытно, что, когда паутина намокает, она сильно сокращается (это явление получило название суперконтракции). Это происходит потому, что молекулы воды проникают в волокно и делают неупорядоченные гидрофильные участки более подвижными. Если паутина растянулась и провисла от попадания насекомых, то во влажный или дождливый день она сокращается и при этом восстанавливает свою форму.

Отметим также интересную особенность формирования нити. Паук вытягивает паутину под действием собственного веса, но полученная паутина (диаметр нити приблизительно 1–10 мкм) обычно позволяет выдержать массу, в шесть раз большую массы самого паука. Если же увеличить вес паука, вращая его в центрифуге, он начинает выделять более толстую и более прочную, но менее жесткую паутину.

Когда заходит речь о применении паутины, возникает вопрос о том, как ее получать в промышленных количествах. В мире существуют установки для «доения» пауков, которые вытягивают нити и наматывают их на специальные катушки. Однако такой способ неэффективен: чтобы накопить 500 г паутины, необходимо 27 тысяч средних пауков. И тут на помощь исследователям приходит биоинженерия. Современные технологии позволяют внедрить гены, кодирующие белки паутины, в различные живые организмы, например в бактерии или дрожжи. Эти генетически модифицированные организмы становятся источниками искусственной паутины. Белки, полученные методами генной инженерии, называются рекомбинантными. Отметим, что обычно рекомбинантные спидроины гораздо меньше природных, но структура молекулы (чередование гидрофильных и гидрофобных участков) остается неизменной.

Есть уверенность, что искусственная паутина по своим свойствам не будет уступать природной и найдет свое практическое применение как прочный и экологически чистый материал. В России исследованиями свойств паутины совместно занимаются несколько научных групп из различных институтов. Получение рекомбинантной паутины осуществляют в Государственном научно-исследовательском институте генетики и селекции промышленных микроорганизмов, физические и химические свойства белков исследуют на кафедре биоинженерии биологического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова, изделия из белков паутины формируют в Институте биоорганической химии РАН, их медицинскими применениями занимаются в Иституте трансплантологии и искусственных органов.

Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2009/10 учебного года

Лучших результатов в конкурсе добились школьник

Дэниэл Линг, Беэр-Шева (Израиль)

и кружки:

лицея 14, Тамбов, руководитель *А.В.Бурмистрова*,
«Сигнум», Москва, руководитель *С.А.Иванов*.

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы школьников:

Никиты Александрова, Набережные Челны, гимназия 26,
Бакина Михаила, Челябинск, гимназия 93

и кружков:

лицея 130, Новосибирск, руководитель *Л.Н.Чусовитина*,
Центра дополнительного математического образования, Курган, руководители *Е.Г.Пушкарева, О.И.Южаков*,
«Эврика», Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Бернштейн*.

Победители конкурса награждаются DVD-дисками – электронным архивом журнала «Квант» с 1970 по 2008 год.