журнал© Квант ИЮЛЬ АВГУСТ 2010 №4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

4 Два занятия школьного кружка при МГУ. *В.Арнольд*
11 Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени (продолжение). *В.Гордин*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

19 Задачи М2184–М2190, Ф2190–Ф2197
20 Решения задач М2161–М2168, Ф2177–Ф2181

К М Ш

27 Задачи
28 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
28 Веревка из паутины. *Д.Багров*
30 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2009/10 учебного года

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

31 Замечательные точки треугольника и тригонометрия. *Г.Филипповский*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Квадрирование квадрата

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

36 О плавании одномерных объектов. *М.Давлетшин, В.Соловьев, Ф.Стрельников, Е.Юносов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

39 Долгий путь короля. *Н.Белухов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

42 Задачи на уравнение моментов сил. *А.Черноуцан*

ОЛИМПИАДЫ

47 XXXI Турнир городов
48 LXXIII Московская математическая олимпиада
51 Избранные задачи Московской физической олимпиады

55 Ответы, указания, решения

Памяти В.И.Арнольда (2)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Рисунок П.И.Чернуского*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Квант

Учредитель — Российская академия наук
Издатель – ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
В.В.Козлов

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников, С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Товарный знак «Журнал «Квант» является собственностью ООО НПП ОО «Бюро Квантум»
© 2010, РАН, журнал «Квант»

ПАМЯТИ ВЛАДИМИРА ИГОРЕВИЧА АРНОЛЬДА

Владимир Игоревич Арнольд
(12.06.1937 – 03.06.2010)

Невозможно осознать, что никогда больше не доведется увидеть Владимира Игоревича Арнольда, невозможно смириться с мыслью, что эта трагедия действительно произошла.

Утрата огромна и невосполнима. Наука потеряла ученого широчайшего диапазона. Мир утратил личность необычайной яркости и одаренности. Страна лишилась человека, которым по праву могла гордиться. Ученики и друзья осиротели, оставшись без учителя и верного товарища.

Вся жизнь Владимира Игоревича была восхождением. Детство его было счастливым. Оно прошло в окружении выдающихся личностей. Он родился в Одессе, где в Новороссийском университете у выдающегося математика С.О.Шатуновского учился его отец, ставший замечательным математиком и педагогом – первым доктором педагогических наук в СССР. Четыре поколения его родных были связаны с математикой. Среди близких родственников по отцу было также множество людей, служивших в Черноморском флоте (двоюродными братьями отца были пять адмиралов). Мама В.И.Арнольда была по профессии искусствоведом. Она была племянницей одного из выдающихся физиков нашей страны – Леонида Исааковича Мандельштама, основоположника знаменитой школы, среди учеников которого были И.Е.Тамм, М.А.Леонтович, А.А.Андронов и другие. Общение с ними оказало очень большое влияние на мальчика.

В Москве Арнольды жили в одном из арбатских переулков, в самом центре Москвы, которую мальчик знал, как никто. С самых ранних лет Арнольд стал проявлять необычайную любознательность, распространяющуюся на самые разнообразные области знания. Например, когда ему было семь лет, вооружившись компасом и взяв себе в помощники младшего брата, Арнольд провел «топографическую съемку» Садового кольца, измеряя расстояние шагами, обнаружив при этом многие несоответствия с тем, что изображалось на картах Москвы.

Он стал учиться в знаменитой пятьдесят девятой школе, из которой вышло множество выдающихся людей. Владимир Игоревич с большой любовью вспоминал своих учителей, особенно учителя математики Ивана Васильевича Морозкина. Одну из задач, предложенных ему учителем, двенадцатилетний мальчик обдумывал весь день, «и решение, – писал он спустя многие годы, – снизошло на меня, как откровение. Испытанный мною тогда (1949) восторг был в точности тем же, который я испытывал при решении гораздо более серьезных проблем».

Большое влияние на юношу оказало и его участие в домашнем кружке А.А.Ляпунова, носившем название «ДНО» – добровольное научное общество. Там обсуждались самые глубокие проблемы науки. Первые научные выступления мальчика с докладами на этом кружке запомнились глубиной и совершенством изложения трудных научных проблем.

В школьные годы Дима – так звали Арнольда родные и друзья – стал принимать участие в московском математическом кружке и московских математических олимпиадах. Об этом он как-то написал, что там «обычно получал вторую премию (как в свое время Максвелл или Кельвин)».

В 1954 году Арнольд становится студентом механико-математического факультета Московского университета. Это была пора расцвета механико-математического факультета. «Плеяда великих математиков, собранных на одном факультете, представляла собой явление совершенно исключительное, и мне не приходилось встречать ничего подобного более нигде», – писал впоследствии Владимир Игоревич. При этом им были названы имена А.Н.Колмогорова, И.М.Гельфанда, И.Г.Петровского, Л.С.Понтрягина, П.С.Новикова, А.А.Маркова, А.О.Гельфонда, Л.А.Люстерника, А.Я.Хинчина и П.С.Александрова.

На первом курсе Арнольд принял участие в кружках А.Г.Витушкина и Е.Б.Дынкина, а когда он учился на втором курсе, А. Н. Колмогоров объявил семинар для младшекурсников. На первом заседании, рассказывая о планах семинара, Андрей Николаевич говорил о различных задачах номографии, в которых процессы, задаваемые сложными функциями, приближенно представлялись более простыми. Говоря о дальних перспективах, Колмогоров сказал, что можно помечтать и о том, чтобы найти подходы к решению 13-й проблемы Гильберта. В 1900 году на Парижском математическом конгрессе Давид Гильберт, один из крупнейших математиков всех времен, поставил перед математическим миром задачи, исследование которых представляло, по мнению Гильберта, значение для будущего математической науки. 13-я из них касалась вопроса о том, существуют ли непрерывные функции многих переменных и не сводимы ли они к функциям от двух переменных. Гильберт определенно полагал, что не сводимы.

Вскоре после объявления своего семинара Колмогоров уехал за границу, и семинар некоторое время продолжался без него. В это время Арнольд решил одну из задач, предложенных Колмогоровым, что привело к его первой публикации.

А далее произошло непредвиденное: Андрей Николаевич неожиданно для самого себя с неслыханной энергией стал атаковать 13-ю проблему Гильберта и сделал решительный прорыв в ее опровержении. Он доказал, что непрерывные функции многих переменных можно свести к функциям трех переменных. Последний шаг в решении проблемы Гильберта он предоставил своим последователям. Этим последователем оказался третьекурсник Арнольд. И в апреле 1957 года на стол Колмогорова легла ученическая тетрадочка в клетку, на которой было написано, что это – курсовая работа студента третьего курса В.Арнольда. В этой курсовой работе была решена тринадцатая проблема Гильберта. Это была первая работа Арнольда, сделавшая его имя известным всему математическому миру. А затем началась череда открытий, само перечисление которых заняло бы несколько страниц.

В своей дипломной работе Арнольд далеко развил один колмогоровский метод в теории динамических систем. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах выдающегося математика Юргена Мозера. Теория, построенная этими тремя математиками, получила название «КАМ-теории» – теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. Она нашла многочисленные приложения к математике, механике, космологии и физике.

Арнольдом были преобразованы целые математические области.

Например – «теория особенностей». В философии с давних времен высказывалась идея о том, что «при переходе количества в качество» эволюционные процессы нередко совершают скачки. На этом во многом строилась «теория революций». Процессы со скачками стали интенсивно изучаться в первой трети двадцатого века. Один из основоположников нового направления – французский математик Рене Том – предложил для него название «теория катастроф». В работах Арнольда эта теория получила выдающееся развитие. Всегда избегающий неоправданной рекламы, В.И.Арнольд называет это направление «теорией особенностей».

Арнольд далеко продвинул особый раздел современной геометрии, так называемую симплектическую геометрию, и заложил новое направление в топологии, получившее фундаментальное развитие, – симплектическую топологию.

Значителен вклад Арнольда в алгебраическую геометрию. Им были установлены связи шестнадцатой проблемы Гильберта об овалах вещественных алгебраических кривых с четырехмерной топологией, связь алгебраической геометрии и теории кос. Владимир Игоревич был выдающимся геометром, он занимался алгеброй и теорией чисел, комбинаторикой, логикой и основаниями математики, словом, его творчество охватило почти все разделы современной математики.

Велики его достижения в естествознании – в гидродинамике, космологии, теории потенциала. Он имел плодотворные контакты с крупнейшими физиками своего времени – Н.Н.Боголюбовым, В.Л.Гинзбургом, Я.Б.Зельдовичем. С увлечением и убежденностью В.И.Арнольд развивал и пропагандировал идеи Пуанкаре о том, что математика – это часть естествознания.

Арнольд служил своей профессии и просвещению на всех возможных поприщах. Он основал выдающуюся математическую научную школу, написал множество замечательных учебников (его учебник по классической механике сравнивают с величайшим произведением научной литературы – «Математическими началами натуральной философии» Ньютона), монографий и обзорных статей, посвященных проблемам математики. Начиная с руководства знаменитым школьным математическим кружком в пятидесятые годы (о том, что происходило на возглавлявшейся им секции этого кружка, можно прочитать в статье Арнольда, публикуемой в этом номере журнала), В.И.Арнольд очень много внимания уделял непосредственной работе со школьниками. В 1963 году он участвует в работе первой летней математической школы, а последние десять лет ежегодно проводил на юношеских школах в Дубне. Прочитанный Владимиром Игоревичем курс для первых выпускников ФМШ (ныне СУНЦ им. А.Н.Колмогорова), стал педагогическим шедевром. По инициативе В.И.Арнольда были созданы Московский центр непрерывного математического образования и Независимый Московский университет. Влияние В.И.Арнольда на весь математический мир было огромно.

В.И.Арнольд был удостоен множества званий, докторских степеней и наград. Среди премий – премия Московского математического общества (1958 г., которой Владимир Игоревич особенно гордился), Ленинская премия (1965, вместе с А.Н.Колмогоровым), Крафоордская премия Шведской академии наук (1982), Харвиевская премия Техниона (1994), премия Вольфа (2001), премия Жунь Жуньшоу (2005) (ее называют Нобелевской премией Востока), Государственная премия Российской Федерации (2008).

Общая одаренность его личности проявлялась в самых разнообразных его реакциях и увлечениях. Он был необычайно ярким экскурсоводом по Парижу. Он совершал длительные (где-то около ста километров) велосипедные прогулки по Подмосковью и по окрестностям Парижа. При этом он и здесь вел топографические съемки, фиксируя места, где находились поляны с грибами, щавелем или земляникой или кустарники с малиной. И когда наступало время, он отправлялся километров за сорок от дома в избранные некогда места с рюкзаком, который заполнялся «дарами леса». Зимой Арнольд совершал лыжные прогулки, порой до ста километров. Он также любил дальние плавания, ходил в походы, в том числе в горы. Он необыкновенно много читал и массу из прочитанного помнил в деталях, что делало его необычайно интересным собеседником, а среди его собеседников были крупнейшие ученые нашего времени. По ходу дела им совершались и гуманитарные открытия (вызвало всеобщий восторг его открытие связи эпиграфа к пушкинскому «Евгению Онегину» с текстом из «Опасных связей» Ш. де Лакло). Арнольд оставил множество замечательных автобиографических заметок, которые, думается, составляют лишь малую долю того, что могло бы быть им сказано. Им написаны прекрасные воспоминания о Колмогорове, Зельдовиче, Боголюбове.

Замечательную, на все времена характеристику дал Арнольду его учитель – Андрей Николаевич Колмогоров в приветствии своему ученику к его пятидесятилетию. В ту пору, когда Арнольд не имел крупных академических званий, Колмогоров выразил «свое убеждение в том, что происходит чествование первого советского математика, не только по силе полученных результатов, но и по темпераменту личности, по способности воспринимать новое и смелости в преодолении препятствий». Послание учителя ученику удивительным образом характеризует обоих: и Владимира Игоревича, личность и творчество которого получили столь восторженную и проницательную оценку, и самого Андрея Николаевича, стоявшего на пороге смерти, но сохранившего запас душевной щедрости и способности восхищаться. Это послание не воспринимается как прощание. Это благословение!

Владимир Игоревич Арнольд начал свой путь в бессмертие. Все связанное с ним – необыкновенная одаренность личности, творчество, служение человечеству – делает его образ незабываемым для всех, кому посчастливилось соприкоснуться с ним на своем жизненном пути.

В.Тихомиров

Статья В.И.Арнольда, которую мы предлагаем вашему вниманию, впервые была опубликована во втором и третьем выпусках возобновленной серии «Математическое просвещение» (первый выпуск этой серии вышел в 1956 году, второй и третий – в 1957 и 1958 годах). В конце краткой аннотации к статье (посвященной истории школьного математического кружка при МГУ) автор пишет: «Ниже приводится изложение двух занятий кружка (секция для десятиклассников) на темы «Вариация кривой» и «Гармонические функции». Занятия проводил автор настоящей заметки». Представляется разумным кое-что пояснить.

Судя по всему, Арнольд проводил свои занятия в 1955/56 учебном году. В ту пору еженедельно по вечерам собирались секции школьного математического кружка, работавшие под руководством студентов и аспирантов мехмата. Всего тогда было 13 секций. У каждой секции был старший руководитель. Дима Арнольд (так все звали тогда Владимира Игоревича) был студентом второго курса. Он был младшим среди старших руководителей секций.

В середине пятидесятых годов появились секции очень широкого профиля, где обсуждались самые разнообразные темы, нередко очень далекие от школьной математики. Такова была и секция Арнольда.

По поводу возникновения первого сюжета статьи – о вариации кривых – надо назвать два имени – Александра Семеновича Кронрода и Анатолия Георгиевича Витушкина.

А.С.Кронрод оставил большой след в математике, в становлении того, что ныне называется Computer Science и в математическом просвещении. Он стал последним учеником Н. Н. Лузина – одного из величайших научных наставников всех времен, создателя московской математической школы. Лузин дал импульс для творческих поисков Кронрода, которые привели его к осмыслению понятия *вариации функции двух переменных*.

В 1949 году Кронрод объявил семинар для младшекурсников. Стиль семинара был необычным – это был по сути дела научно-исследовательский семинар, посвященный разработке тематики, где руководитель семинара занимал ведущее положение в мире. Одним из участников семинара стал первокурсник А. Витушкин, ставший выдающимся математиком, академиком Российской Академии наук. Витушкин глубоко продвинул теорию Кронрода, определив понятия вариаций множеств. В 1954 году он объявил семинар для младшекурсников, в котором принял участие Дима Арнольд. На следующий год тема «Вариация кривых», находящаяся на самом острие науки того времени, была прекрасно обработана Арнольдом для школьников.

Во второй части статьи перед нами блистает фейерверк красивейших математических сюжетов, где сменяют друг друга тригонометрия, геометрия, интегральное исчисление, комплексный анализ, и все это в итоге приводит к геометрическому определению гармонической функции. С этим фундаментальным понятием анализа студенты мехмата МГУ знакомятся на третьем и четвертом курсах. Но оказывается, что за определение гармонической функции можно взять такое ее свойство: среднее значение этой функции по любой окружности равно значению этой функции в центре окружности. И далее следуют замечательные комментарии, где доказываются фундаментальные свойства гармонических функций и даются им глубокие физические интерпретации.

Статья второкурсника Арнольда написана рукой зрелого мастера, воодушевленного красотой математики.

Два занятия школьного кружка при МГУ

В.АРНОЛЬД

I. Вариация кривой

Пусть на плоскости дан отрезок AB длины 1. Если этот отрезок освещать параллельными лучами, то длина тени, отбрасываемой на различные прямые, будет колебаться от 0 до 1. Точнее, длина проекции отрезка на прямые, лежащие в той же плоскости, будет для разных прямых разная, однако во всех случаях она заключена между 0 и 1. Длина проекции AB на прямую l называется *вариацией отрезка AB в направлении l* (рис.1): мы будем ее обозначать $V_l\,(AB)$ или просто V_l, если ясно, от какого отрезка берется вариация.

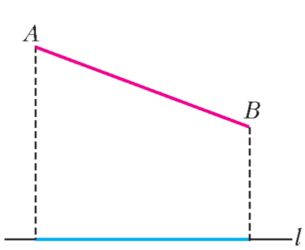

Рис. 1

Интуитивно ясно, что существует среднее значение «тени» по всем направлениям и что оно больше 0 и меньше 1. Точно это означает, что если разделить угол в 360° на n равных частей и взять среднее арифметическое

$$V_n = \frac{V_{l_1} + V_{l_2} + \ldots + V_{l_n}}{n}$$

вариаций отрезка AB в направлениях $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (рис. 2), то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} V_n = K,$$

причем K заключено между 0 и 1.

Это число K называется *средней вариацией* или просто

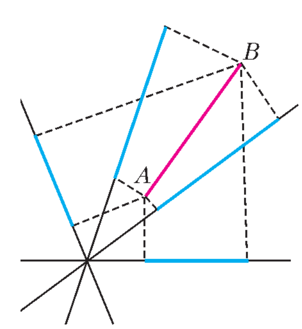

Рис. 2

вариацией единичного отрезка AB.

Найти предел K не очень трудно[1]; он равен $\frac{2}{\pi} \approx 0,637$. Мы, однако, сейчас не будем его находить, а вычислим K позже – косвенным путем (задача 7); однако фактом существования предела мы будем пользоваться с самого начала.

Задача 1. *Чему равна вариация отрезка длины a?*

Решение. Так как, очевидно, по любому направлению такой отрезок имеет вариацию в a раз большую, чем параллельный ему отрезок единичной длины, то и среднее арифметическое вариаций по n направлениям здесь будет в a раз больше, чем для единичного отрезка, а предел этой величины, т.е. средняя вариация отрезка длины a, равен Ka.

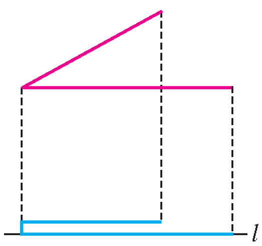

Рис. 3

Вариация ломаной по какому-нибудь направлению определяется как сумма длин проекций ее звеньев на это направление (рис.3).

Задача 2. *Определите вариации квадрата со стороной 1 в направлениях его сторон и диагоналей.*

Решение. Очевидно, вариация квадрата в направлении каждой стороны равна 2, а в направлении каждой диагонали равна $2\sqrt{2}$.

Средняя вариация ломаной по всем направлениям или просто *вариация ломаной* по всем направлениям определяется, как и выше, с помощью предельного перехода: $V = \lim_{n\to\infty} V_n$, где V_n – среднее арифметическое вариаций ломаной по n направлениям сторон правильного n-угольника.

Задача 3. *Определите вариацию ломаной длины a.*

Решение. Очевидно, вариация ломаной по каждому направлению есть сумма вариаций ее звеньев по этим же направлениям. А так как среднее значение суммы равно сумме средних значений[2], то вариация ломаной есть сумма вариаций ее звеньев. Так как, в силу задачи 1, вариация каждого звена равна произведению длины этого звена на K, то вариация ломаной есть Ka.

Перенесение определения вариации на кривые требует уточнения понятия кривой. В общем случае это сделать трудно. Но пусть кривая выпуклая или состоит из нескольких выпуклых кусков. Тогда при проектировании кривой на любое, но определенное, направление можно разбить ее на конечное число кусков, каждый из которых пересекается только один раз[3] любой проектирующей прямой. Тогда *вариацией кривой по выбранному направлению назовем сумму длин проекций ее кусков на это направление* (рис.4). Можно показать, что существует среднее значение этой величины по всем направлениям. Его мы и назовем средней вариацией или просто *вариацией* кривой линии.

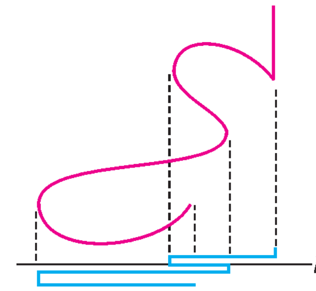

Рис. 4

Очевидно, если кривая – ломаная, то мы приходим к прежнему определению.

Задача 4. *Найдите вариацию окружности диаметра D.*

Решение. Сначала выберем какое-нибудь направление. Диаметр этого направления делит окружность на два куска – на две дуги, каждая из которых пересекается с любой перпендикулярной к выбранному направлению прямой не более, чем в одной точке. Отсюда вытекает, что вариация окружности относительно выбранного направления равна $2D$. Очевидно, что такова же и вариация и по любому другому направлению, а значит, и средняя вариация окружности равна $2D$.

Выберем теперь на кривой несколько точек и соединим их последовательно, но подряд (рис.5). Получим ломаную. Можно показать, что для достаточно хороших (например, для всех выпуклых) кривых существует предел длин этих ломаных, при условии, что при изменении ломаной длина ее наибольшего звена стремится к нулю. Этот предел называется *длиной кривой.*

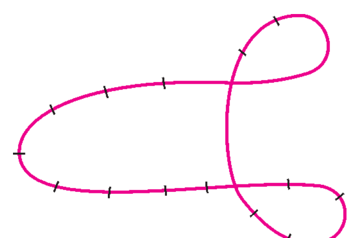
Рис. 5

Можно показать также, что для кривых, которые могут быть разбиты на конечное число выпуклых кусков, существует предел вариаций этих ломаных, когда длина наибольшего звена стремится к 0.

Задача 5. *Найдите предел, к которому стремится вариация ломаной, вписанной в «достаточно хорошую» кривую длины a, когда ломаная изменяется так, что длина наибольшего ее звена стремится к нулю.*

Решение. Так как для каждой ломаной длины a_n вариация равна Ka_n, а для «достаточно хороших» кривых $a_n \to a$, то предел вариаций ломаных равен Ka.

Задача 6. *Докажите, что вариация («достаточно хорошей») кривой длины a равна Ka.*

Решение. Достаточно заметить, что в такую кривую можно вписать ломаную со сколь угодно малыми звеньями, вариация которой по каждому из n данных направлений совпадает с вариацией кривой. Поэтому, раз существует предел, отыскиваемый в задаче 5, то он равен вариации кривой.

---

[1] *См., например, в книге А.М.Яглома и И.М.Яглома «Элементарные задачи в неэлементарном изложении» (М.: Гостехиздат, 1954) задачу 147б.*

[2] *Точный смысл этой фразы такой: среднее арифметическое вариаций ломаной по n направлениям равно сумме средних арифметических вариаций ее звеньев по этим же направлениям. Поэтому и предел при $n \to \infty$ средних арифметических вариаций ломаной по разным направлениям равен сумме пределов средних арифметических вариаций отдельных звеньев.*

[3] *Здесь не исключаются случаи, когда подобный кусок представляет собой прямолинейный отрезок и, следовательно, при проектировании в одном из направлений полностью попадает на проектирующую прямую.*

01-18.p65 5 30.07.10, 17:38

Задача 7. *Найдите численное значение K, т.е. вариацию отрезка длины 1.*

Решение. Так как, с одной стороны, окружность диаметра D имеет длину π и, значит, вариацию $K\pi D$ (задачи 5 и 6), а с другой стороны (задача 4), вариация этой окружности равна $2D$, то $K = \frac{2}{\pi}$.

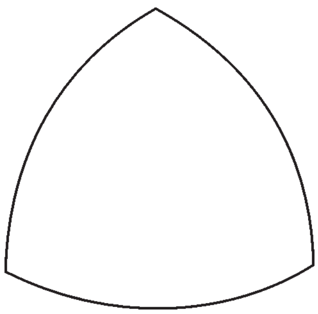

Рис. 6

Шириной кривой по данному направлению называется наименьшее расстояние между двумя прямыми этого направления, между которыми лежит кривая.

Кривая имеет *постоянную ширину*, если ее ширина по всем направлениям одинакова. Примером кривой постоянной ширины может служить окружность или так называемый *треугольник Рело*, составленный из трех равных дуг окружностей (рис.6).[4] *С помощью вариаций* получается весьма изящное доказательство следующей *теоремы Барбье*:

Задача 8. *Докажите, что все кривые постоянной ширины h имеют одну и ту же длину πh.*

Решение. Это следует из того, что вариация каждой такой кривой по любому направлению равна $2h$, из результатов задач 6 и 7.

Вот еще одна задача, которая на первый взгляд представляется довольно сложной:

Задача 9. *В круге C радиуса 1 заключена какая-то кривая L длины 22. Докажите, что найдется прямая, пересекающая L не менее чем в 8 точках.*

Решение. Вариация L равна $\frac{2}{\pi} \cdot 22 > 14$ (задача 6 и 7); с другой стороны, длина проекции L на любое направление не превосходит 2 (L заключена внутри C!). Отсюда вытекает, что для некоторых направлений определенные участки проекции L будут покрываться проекциями отдельных дуг L более чем 7-кратно (т.е. не менее чем 8-кратно), что и доказывает наше утверждение.

Переходим к изложению занятия, посвященного теме «Гармонические функции».

II. Гармонические функции

Две первые задачи из приведенных ниже не имеют отношения к основной теме. Для полноты освещения занятия кружка мы приводим их; близкая к ним по методу решения третья задача являлась подготовительной к четвертой, с которой, по существу, и начиналась тема.

Задача 1. *Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения*

$$a \sin\varphi + b\cos\varphi$$

(a и b положительны).

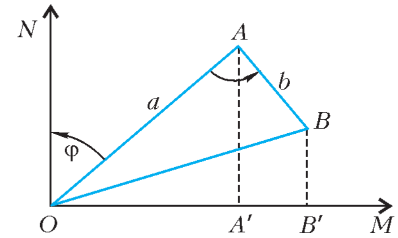

Рис. 1

Решение. Проведем два взаимно-перпендикулярных луча OM и ON и построим прямоугольный треугольник OAB с катетами $OA = a$ и $AB = b$, расположив их, как на рисунке 1 (прямые углы MON и OAB ориентированы против часовой стрелки). Обозначим угол AON через φ, тогда, проектируя ломаную OAB на OM (проекции направленные!), получаем[5]:

$$(OB') = \text{пр.}\,OB = \text{пр.}\,OA + \text{пр.}\,AB = a\sin\varphi + b\cos\varphi .$$

Если вращать треугольник OAB вокруг вершины O, то угол φ изменяется; наибольшее и наименьшее значения проекции (OB') достигаются, когда отрезок OB коллинеарен OM, т.е. когда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$; они равны $\sqrt{a^2+b^2}$ и $-\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 2. *Докажите, что если*

$$a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2 + \ldots + a_m\cos\varphi_m = 0 \qquad (1)$$

и

$$a_1\cos(\varphi_1+1) + a_2\cos(\varphi_2+1) + \ldots + a_m\cos(\varphi_m+1) = 0 \qquad (2)$$

(все коэффициенты a_i положительны), то и при любом α

$$a_1\cos(\varphi+\alpha) + a_2\cos(\varphi_2+\alpha) + \ldots + a_m\cos(\varphi_m+\alpha) = 0 . \qquad (3)$$

Решение. Выберем в плоскости луч OM и построим ломаную линию $OA_1A_2\ldots A_m$ (рис. 2; $m = 3$), где $OA_1 = a_1$, $A_1A_2 = a_2$, …, $A_{m-1}A_m = a_m$, причем векторы $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_{m-1}A_m}$ образуют с лучом OM соответственно углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$.

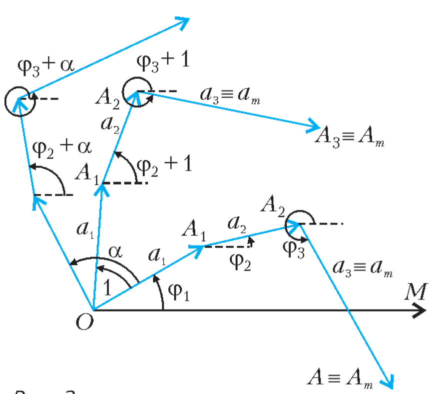

Рис. 2

Легко видеть, что условие (1) означает, что $OA_m \perp OM$, а условие (2) – что $O\tilde{A}_m \perp OM$, где $O\tilde{A}_m$ получается из OA_m вращением против часовой стрелки (при обычном направлении

[4] *Много сведений о кривых постоянной ширины можно найти в книге И.М.Яглома и В.Г.Болтянского «Выпуклые фигуры» (М.: Гостехиздат, 1951).*

[5] (OB') *– величина направленной проекции.*

01-18.p65 6 30.07.10, 17:38

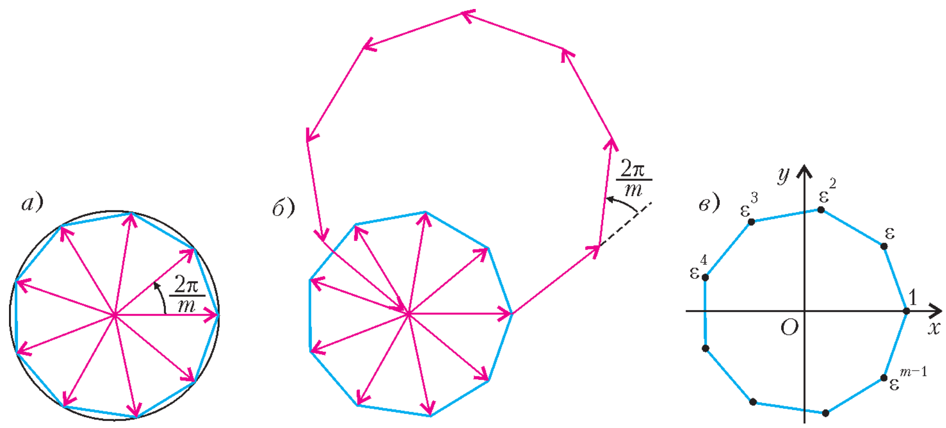

Рис. 3

отсчета углов) на угол 1 (радиан). Оба условия вместе означают поэтому, что $\overrightarrow{OA_m} = 0$, т.е. A_m совпадает с O. Но в таком случае проекция вектора $\overrightarrow{OA_m}$, повернутого на угол α (т.е. выражение $\sum_{i=1}^{m} a_i \cos(\varphi_i + \alpha)$), тоже равна нулю, что и доказывает (3).

Задача 3. *Вычислите сумму m векторов с общим началом в центре правильного m-угольника и с концами в его вершинах (рис.3,а).*

На занятии кружка было предложено три решения.

Решение 1. Пусть сумма этих векторов – вектор $\overrightarrow{OA}$. Повернем многоугольник вокруг точки O на угол $\frac{2\pi}{m}$. Каждый вектор-слагаемое повернется на $\frac{2\pi}{m}$; тогда и сумма $\overrightarrow{OA}$ повернется на тот же угол, приняв положение $\overrightarrow{OA'}$. Вместе с тем каждый вектор перейдет при таком повороте в следующий, так что сумма не изменится, следовательно, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA}$. Но эти векторы образуют угол $\frac{2\pi}{m}$. Это может быть лишь при условии $\overrightarrow{OA} = 0$.

Решение 2. Складывая векторы по «правилу треугольника» в порядке следования вершин, получим, очевидно, m-звенную ломаную, все звенья которой равны (они равны радиусу окружности, описанной около многоугольника) и все внешние углы равны (они равны $\frac{2\pi}{m}$; рис.3,*б*). Отсюда следует, что ломаная образует правильный m-угольник; так как он замкнут, то искомая сумма равна нулю.

Решение 3. Достаточно доказать это для правильного m-угольника, расположенного в комплексной плоскости так, что его вершины изображают все корни m-й степени из 1 : $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1}$ (рис.3,*в*). Такой правильный m-угольник мы в дальнейшем будем называть основным m-угольником. Центр основного m-угольника изображает число 0, а одна из вершин – число 1.

Как известно, вершины основного m-угольника изображают все решения уравнения $z^m - 1 = 0$. По теореме Виета, сумма этих решений равна нулю, ибо коэффициент при z^{m-1} в этом уравнении равен нулю. Но комплексные числа складываются по правилу сложения изображающих их векторов. Следовательно, сумма векторов, о которых говорится в условии задачи, равна нулю.

Задача 4. *Вычислите предел K*

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n}$$

– среднее значение функции $y = \sin x$ на отрезке $0 \le x \le \pi$.

Решение. Рассмотрим снова правильный m-угольник, о котором говорилось в предыдущей задаче; на этот раз будем считать радиус описанной окружности равным 1, а число его сторон четным: $m = 2n$ (рис. 4; $m = 8$). Сложим теперь только «правую половину» векторов:

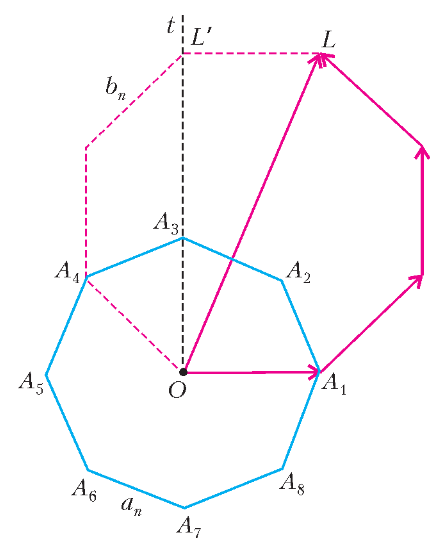

Рис. 4

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OL}$. Замыкающая OL рассматриваемой суммы будет совпадать с диаметром D_n окружности, описанной около нового m-угольника. Легко видеть, что если вектор $\overrightarrow{OA_1}$ направить горизонтально, то эта замыкающая при большом m близка к ее проекции OL' на вертикальную прямую Ot. А так как проекции единичных векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, …, $\overrightarrow{OA_n}$ на эту вертикаль равны как раз

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{2\pi}{m} = \sin\frac{\pi}{n},\ \sin\frac{4\pi}{m} = \sin\frac{2\pi}{n},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

то среднее значение K равно пределу, к которому стремится частное $\frac{D_n}{n}$. Но из подобия m-угольников, изображенных на рисунке 4, ясно, что $\frac{b_n}{a_n} = \frac{D_n}{2}$ (радиус $OA_1 = 1$), где $a_n = 2\sin\frac{\pi}{n}$, а $b_n = 1$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|OL|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n\cdot 2\sin\frac{\pi}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}:\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}:\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}=\frac{2}{\pi}:1=\frac{2}{\pi}.$$

Замечания.

1. Таким образом, этот предел оказался равным тому значению K, которое мы раньше назвали *средней вариацией* единичного отрезка. Это не случайно; решение всего цикла задач о вариациях кривых может рассматриваться как косвенное вычисление указанного в этой задаче предела.

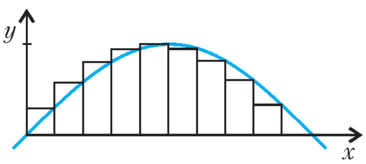

Рис. 5

2. Полученный результат имеет следующий геометрический смысл: предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке 5, между полуволной синусоиды и осью абсцисс, равен 2.

Задача 5. *Докажите, что среднее значение произвольного многочлена с комплексными коэффициентами*

$$P_k(z)=z^k+a_1z^{k-1}+\ldots+a_k \qquad (*)$$

в n вершинах правильного n-угольника на комплексной плоскости, при n > k, равно значению многочлена в центре этого многоугольника.

Решение производится в три этапа.

1°. Пусть сначала $P_k(z)=z^k$ и правильный n-угольник является основным (см. решение 3 задачи 3). Тогда сумма k-х степеней комплексных чисел, изображаемых вершинами n-угольника, равна нулю при любом $k<n$.

В самом деле, при замене каждого числа z на $z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z\cdot\varepsilon$ многоугольник переходит в себя (он поворачивается на $\frac{2\pi}{n}$), а каждое значение z^k умножается на $\varepsilon^k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\neq 1$. Значит, сумма значений z^k в вершинах n-угольника не меняется и в то же время умножается на ε^k. Следовательно, она может равняться только нулю.

Это же рассуждение непосредственно переносится и на случай $P_k(z)=az^k$.

2°. Так как среднее значение $P_l(z)=az^l$ $(1\le l\le n)$ в вершинах основного n-угольника равно нулю, то и среднее значение суммы $z^k+a_1z^{k-1}+\ldots+a_{k-1}z$ равно нулю. Следовательно, среднее значение многочлена $P_k(z)$ в его вершинах равно a_k, т.е. $P_k(0)$.

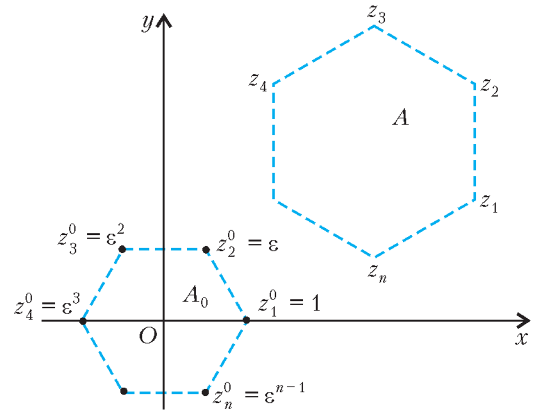

Рис. 6

3°. Обозначим теперь комплексные числа – вершины основного n-угольника A_0 через $z_1^0=1$, $z_2^0=\varepsilon$, $z_3^0=\varepsilon^2$, …, $z_n^0=\varepsilon^{n-1}$ (рис.6) и рассмотрим произвольно расположенный одноименный правильный многоугольник A с вершинами $z_1,z_2,\ldots,z_n$. Очевидно, правильный многоугольник A можно получить из A_0 поворотом, гомотетическим расширением (или сжатием) и параллельным переносом. Другими словами, найдутся два таких комплексных числа α и β, что

$$z_i=\alpha z_i^0+\beta \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь модуль α равен отношению сторон многоугольников A и A_0, аргумент – углу поворота, а β – комплексное число, изображаемое центром многоугольника A.

Теперь заметим, что среднее значение многочлена $(*)$ в вершинах $z_1,z_2,\ldots,z_n$ равно

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}P_k(z_i)}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}P_k\left(\alpha z_i^0+\beta\right)}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}Q_k\left(z_i^0\right)}{n},$$

где

$$Q_k(z)=P_k(\alpha z+\beta)=(\alpha z+\beta)^k+$$
$$+\ a_1(\alpha z+\beta)^{k-1}+\ldots+a_{k-1}(\alpha z+\beta)+a_k$$

есть многочлен k-й степени относительно z (той же, что и $P_k(z)$), принимающий в точках $z_1^0,z_2^0,\ldots,z_n^0$ соответственно значения $P(z_1)$, $P(z_2)$, …, $P(z_n)$. Поэтому среднее значение $P_k(z)$ в точках $z_1,z_2,\ldots,z_n$ равно среднему значению $Q_k(z)$ в точках $z_1^0,z_2^0,\ldots,z_n^0$, т.е. (см. этап 2°) равно

$$Q_k(0)=\beta^k+\alpha_1\beta^{k-1}+\ldots+a_{n-1}\beta+a_n.$$

Но $Q_k(0)$ совпадает с значением многочлена $P_k(z)$ в центре многоугольника A, что и завершает доказательство.

Пусть $f(z)$ – некоторая функция комплексного переменного z. Рассмотрим последовательность правильных n-угольников ($n=3,\ 4,\ 5,\ \ldots$), вписанных в определенную окружность комплексной плоскости, и последовательность средних арифметических $f(z)$ в вершинах этих многоугольников. Если при $n\to\infty$ эти

01-18.p65 8 30.07.10, 17:39

средние арифметические стремятся к определенному пределу, не зависящему от выбора вписанных в окружность многоугольников, то этот предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_1)+f(z_2)+\ldots+f(z_n)}{n}$$

называется *средним значением функции* $f(z)$ *по окружности.*

Из задачи 5 следует, что *среднее значение произвольного многочлена по любой окружности равно значению этого многочлена в центре окружности.*

Можно говорить не только о среднем значении функции в смысле среднего арифметического, но и о *среднем геометрическом* функции $f(z)$ по некоторой окружности. Под этим понимается действительное неотрицательное число

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(z_1)||f(z_2)|\ldots|f(z_n)|}$$

(значение корня арифметическое!), где z_i – также вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность.

Рассмотрим задачу, связанную с понятием среднего геометрического функции по окружности.

Задача 6. *Докажите теорему: если многочлен* $P_k(z)$ *степени k не имеет корней внутри или на окружности, то его среднее геометрическое на этой окружности равно модулю его значения в центре окружности.*

Решение проведем снова в три этапа.

1°. Пусть сначала окружность есть окружность $|z|=1$, правильные n-угольники – основные, а многочлен $P_1(z)=z+a$. (Очевидно, $|a|>1$, так как иначе корень $P_1(z)$ лежал бы внутри окружности.)

Рассмотрим произведение

$$(z_1+a)(z_2+a)+\ldots(z_n+a).$$

Это комплексное число есть значение многочлена

$$F_n(z)=(z-(-z_1))(z-(-z_2))\ldots(z-(-z_n))$$

в точке $z=a$. «Старший коэффициент» многочлена $F_n(z)$ при z^n равен единице, а корни его равны $-z_1,-z_2,\ldots,-z_n$; поэтому $F_n(z)\equiv z^n-(-1)^n$. Следовательно,

$$F_n(a)=a^n-(-1)^n \text{ и } \left|a^n\right|-1\le|F_n(a)|\le\left|a^n\right|+1.$$

Но так как $|a|>1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|^n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|^n-1}=|a|,$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{F_n(a)}=|a|$, что и доказывает теорему в этом частном случае.

2°. Так как, очевидно, *среднее геометрическое произведения равно произведению средних геометрических*, то доказываемая теорема справедлива и для любого многочлена $P_n(z)$, все корни которого по модулю больше 1, так как такой многочлен есть произведение сомножителей вида $(z+a_i)$, где $-a_i$ – корни $P_n(z)$.

3°. Наконец, пусть данная окружность S – произвольная, имеющая центр в точке, изображающей комплексное число β, а радиус a; ее уравнение $|z-\beta|=a$. Рассмотрим преобразование комплексной плоскости

$$w=\alpha z+\beta.$$

Оно переводит единичную окружность $|z|=1$ и круг $|z|\le1$ соответственно в окружность S и в ограничиваемый ею круг.

Подставим в данный многочлен $P_n(z)$ вместо z выражение $\alpha z+\beta$. Получим:

$$P_n(\alpha z+\beta)=Q_n(z);$$

при этом значения многочлена $Q_n(z)$ в вершинах основного n-угольника равны значениям $P_n(z)$ в вершинах n-угольника, вписанного в S (ср. с решением задачи 5). Все корни $Q(z)$ лежат вне круга $|z|\le1$ (все корни $P(z)$ лежат вне круга, ограниченного S); среднее геометрическое $P_n(z)$ по окружности S равно среднему геометрическому $Q_n(z)$ по окружности $|z|=$ $=1$. Но это последнее среднее вычислено в п. 2°; оно равно $|Q_n(0)|=|P_n(\beta)|$, что и требовалось.

Задача 7. *На плоскости имеются две фиксированные точки A и B (рис.7). Рассмотрим функцию* $\theta=f(M)$ *точки M этой плоскости, равную углу* θ *(наименьшему, отсчитываемому против часовой стрелки), на который поворачивается луч MA до совмещения с MB. Докажите, что среднее значение функции* $f(M)$ *по любой окружности S, не пересекающей лучей AP и BQ, равно значению* $f(M)$ *в центре O окружности.* [6]

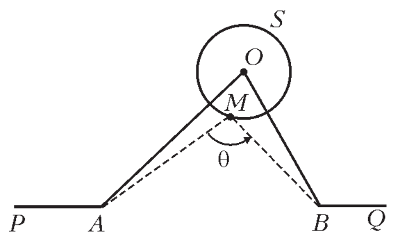

Рис. 7

Решение. Пусть $M_1M_2\ldots M_n$ – правильный n-угольник, вписанный в окружность S. Обозначим углы AM_iB через θ_i, а угол AOB через θ_0. Нужно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n}{n}-\theta_0=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\theta_1-\theta_0)+(\theta_2-\theta_0)+\ldots+(\theta_n-\theta_0)}{n}=0.$$

Но, очевидно, для любой точки M на окружности S

$$\theta-\theta_0=\angle OBM-\angle OAM;$$

[6] *Приведенное ниже решение задачи 7 заимствовано из заметки В.А.Успенского «Геометрический вывод основных свойств гармонических функций» («Успехи математических наук», 1949, вып. 2(30)), в которой эта задача кладется в основу теории гармонических функций.*

таким образом, требуется доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\angle OBM_1+\angle OBM_2+\ldots+\angle OBM_n}{n}-\right.$$
$$\left.-\frac{\angle OAM_1+\angle OAM_2+\ldots+\angle OAM_n}{n}\right)=0,\ (*)$$

т.е. что среднее значение угла OBM на окружности S равно среднему значению угла OAM на этой окружности. Предположим теперь, что $n = 2m$ четно и $2m$-угольник $M_1M_2\ldots M_{2m}$ имеет прямую OA осью симметрии, проходящей через середины сторон M_1M_{2m} и M_mM_{m+1}. В этом случае, очевидно,

$$\angle OAM_1+\angle OAM_{2m}=2\pi,$$

$$\angle OAM_2+\angle OAM_{2m-1}=2\pi,$$

$$\ldots$$

$$\angle OAM_n+\angle OAM_{m-1}=2\pi$$

и, следовательно,

$$\frac{\sum_{i=1}^{2m}\angle OAM_i}{2m}=\pi$$

независимо от значения n.

Отсюда вытекает, что *если среднее значение функции $\angle OAM$ существует* (а это мы будем предполагать, не задерживаясь на доказательстве), то оно равно π. Точно так же равно π и среднее значение по окружности функции $\angle OBM$, что и доказывает $(*)$ и требуемую теорему.

Функции, среднее значение которых на каждой окружности равно значению в центре окружности, называются гармоническими.

Из задачи 5 вытекает, что действительная часть и коэффициент при мнимой части любого многочлена от комплексного переменного (точки комплексной плоскости) являются гармоническими функциями; задача 6 связана с гармоничностью логарифма модуля многочлена (в области, где многочлен не имеет корней), задача 7 дает геометрический пример гармонической функции.

Гармонические функции играют выдающуюся роль в математике, физике и технике. Для примера упомянем здесь о задаче нахождения распределения температур в произвольной плоской однородной пластинке. Ясно, что если распределение температур – установившееся, т.е. самопроизвольного перераспределения температур не происходит, то оно дается гармонической функцией, ибо если бы среднее значение температуры на малой окружности было, например, больше температуры в центре O, то точка O нагревалась бы.

Очевидно, что *заданная в некоторой области гармоническая функция может принимать наибольшее и наименьшее значения лишь на границе этой области,* ибо если бы наибольшее значение достигалось во внутренней точке O, то среднее значение по окружности с центром в O не могло бы совпадать со значением в O. Это предложение называется *принципом максимума* и играет большую роль в теории гармонических функций. Из него следует, что значения гармонической функции в области полностью определяются ее значениями на границе этой области: так, например, распределение температур на пластинке определяется температурами на крае пластинки. Действительно, если бы существовали две разные гармонические функции, то их разность (которая, очевидно, тоже будет гармонической функцией) была бы равна нулю на границе области и отлична от нуля где-то внутри нее; но это противоречит тому, что гармоническая функция принимает наибольшее и наименьшее значения на границе.

Функции, заданные в отдельных точках плоскости, например в центрах квадратов бумаги «в клетку», называются *функциями на сетке. Гармонической функцией на сетке* называется такая, у которой значение в каждой точке равно среднему арифметическому ее значений в соседних точках. Как и для гармонических функций на плоскости, здесь можно показать, что наибольшее и наименьшее значения гармоническая на сетке функция принимает на границе сетки и что значения гармонической функции на сетке однозначно определяются ее значениями в граничных узлах сетки.

При математическом приближенном решении задач, связанных с гармоническими функциями, их часто заменяют гармоническими на сетке функциями. Таким образом, например, можно вычислить температуру в точке однородной плоской пластинки, если известна температура на краю. Для этого пластинка делится на мелкие квадратики, где температура предполагается неизменной, и выписывается условие гармоничности на сетке, состоящей из центров квадратиков: среднее арифметическое температур соседей данного квадратика равно его собственной температуре; решение задачи удобно проводить методом последовательных приближений.

Легкая задача 8 касается одного важного свойства гармонических функций на сетке.

Задача 8. *В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано натуральное число, равное среднему арифметическому чисел, стоящих в четырех соседних клетках. Докажите, что во всех клетках написано одно и то же число.*

Решение. Четыре соседа-числа в такой таблице, как указано в условии, не могут быть все больше его и не могут быть все меньше его. Вместе с тем среди любого количества натуральных чисел всегда есть наименьшее n. Все четыре его соседа равны n, так как они не меньше n, и если хотя бы одно было больше, то среднее арифметическое тоже было бы больше n, тогда как по условию оно равно n.

Точно так же соседи этих соседей равны n и т.д. Так мы убеждаемся, что все числа в клетках равны n.

01-18.p65 10 30.07.10, 17:39