КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2009 г.)

11. Знаки арифметических действий и скобки можно расставить, например, так: $(7^5-7^4-7^3):7^2\cdot 7\cdot 1=2009$. Но есть и другие способы.

12. Пусть $A=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ – возрастающее число, т.е. $0<a_n<a_{n-1}<\ldots<a_1<a_0$. Тогда

$$9A=10A-A=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0 0}-\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}=$$

$$=a_n\cdot 10^{n+1}+(a_{n-1}-a_n)\cdot 10^n+\ldots+(a_0-a_1-1)\cdot 10+(10-a_0).$$

В последнем выражении все коэффициенты перед степенями 10 суть неотрицательные целые числа (очевидно, не превосходящие 9), а коэффициент a_n при старшей степени положителен. Значит, это и есть цифры числа $9A$, а их сумма равна

$$a_n+(a_{n-1}-a_n)+\ldots+(a_1-a_2)+(a_0-a_1-1)+10-a_0=10-1=9.$$

13. Можно.

Покажем, как получить расположение, изображенное на рисунке 2 условия задачи.

Заметим, что если не обращать внимания на перемещение остальных фишек, то фишки 1 и 2 нетрудно поменять местами. Для этого нужно выполнить всего четыре вращения квадратов 2×2 на углы, кратные 90°, в такой последовательности: левый – по часовой стрелке на 90°, правый – против часовой стрелки на 90°, левый – против часовой стрелки на 90°, и правый – на 180°. На рисунке 4 показано перемещение фишек при этих вращениях.

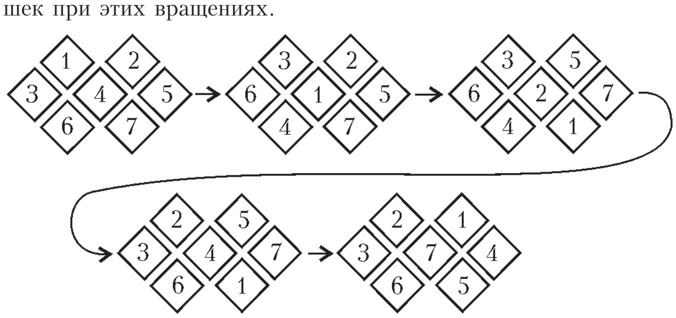

Рис. 4

Сравнивая начальное и конечное расположение фишек, проследим, какое перемещение совершила каждая фишка. Перемещение каждой фишки обозначим стрелкой. Точками отметим фишки, которые вновь оказались на своих местах. Получим схему, показанную на рисунке 5.

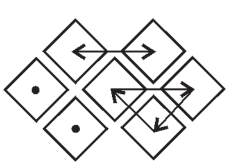

Рис. 5

Заметим, что фишки 1 и 2, как мы и ожидали, поменялись местами, фишки 3 и 6 остались на своих местах, фишки 4, 5 и 7 переместились по циклу. Это значит, что если эту серию из четырех вращений повторить трижды, то фишки 4, 5 и 7 снова станут на свои места, а фишки 1 и 2 поменяются местами.

Теперь покажем, как получить расположение, изображенное на рисунке 3 условия.

С помощью двух вращений левого и правого квадратов переместим фишку 3 на место фишки 1, а фишку 5 переместим на место фишки 2. Далее, фишки 3 и 5 поменяем местами (как мы уже научились при ответе на первый вопрос задачи). Остается вращением правого квадрата переместить фишку 3 в крайнее правое положение, а вращением левого квадрата переместить фишку 5 в крайнее левое положение. Процесс перемещения показан на рисунке 6.

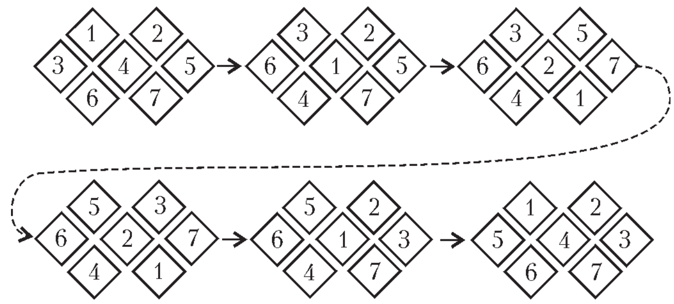

Рис. 6

14. Заметим, что всегда $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$ (домножив это неравенство на 2 и перенеся все в левую часть, его можно привести к виду $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$).

Поэтому в нашем случае

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)\ge 3(ab+bc+ac)=3.$$

Осталось доказать, что $a+b+c>0$ (тогда, извлекая квадратный корень, получим требуемое). Пусть, например, $c<0$, тогда числа a и b положительные. Из данного в условии равенства получим (так как $ac<0$)

$$ab+bc>0\Rightarrow |ab|>|bc|\Rightarrow |a|>|c|,\text{ откуда } a+b+c>0.$$

15. Пусть P, Q, R, S – середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ соответственно (рис. 7). Рассмотрим угол параллелограмма $PQRS$, не являющийся острым. Пусть это угол PQR. Тогда основания перпендикуляров, опущенных из точек Q и S на прямую PR, лежат на отрезке PR. Пусть это точки K и L соответственно.

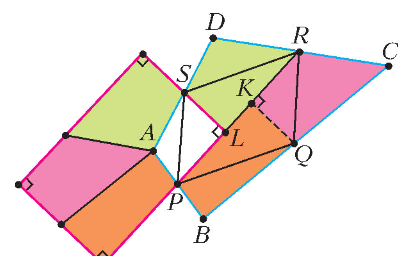

Рис. 7

Проведем разрезы по отрезкам PR, QK и SL. Обозначим получившиеся части:

$APLS$ – (1), $BPRKQ$ – (2), $CRKQ$ – (3), $DRLS$ – (4).

Соединим части следующим образом:

(2) повернем вокруг точки P так, чтобы точка B совместилась с точкой A;

(4) повернем вокруг точки S так, чтобы точка D совместилась с точкой A;

часть (3) вставим в образовавшийся зазор между повернутыми частями (2) и (4), совместив точку C с точкой A.

Легко видеть, что в результате получится прямоугольник.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Да; да; нет.

2. См. рис.8.

3. Будет в обоих случаях.

4. Постукивать необходимо, чтобы заставить частицы двигаться, так как магнитные силы не могут преодолеть сил трения покоя. За счет намагничивания каждой частицы в продольном направлении поле около ее концов увеличивается, что создает условия для соединения частиц цепочкой.

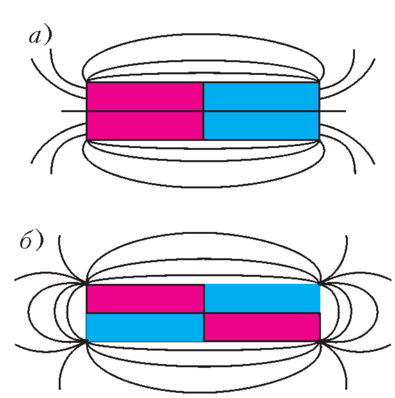

Рис. 8

5. По действию конца одного стержня на середину другого – один из стержней можно подвесить к динамометру или разместить на поплавке.
6. Все куски будут намагничены одинаково.
7. Нет, так как поле каждого магнита будет слабее.
8. Для того чтобы предохранить магнит от размагничивания.
9. Магнитное поле в основном будет замкнуто якорем, поэтому магнитное притяжение ослабевает, и шарик падает.
10. В первом случае по мере приближения нижнего магнита цилиндры будут один за другим отрываться от гирлянды и притягиваться к нижнему магниту. Во втором случае «прочность» гирлянды будет возрастать по мере приближения нижнего магнита. Когда второй магнит вплотную подойдет к нижнему цилиндру, он притянется к гирлянде и останется висеть на ней.
11. Стрелки расположатся параллельно противоположным сторонам треугольника – это положение устойчивого равновесия. Также стрелки могут расположиться перпендикулярно противоположным сторонам, однако это положение равновесия неустойчиво.
12. Удары по магниту нарушают правильное расположение доменов в веществе, и постоянный магнит из любого материала размагнитится. Напротив, постукивание по стальному стержню, расположенному параллельно линиям магнитного поля, даже такого слабого, как земное, способствует выстраиванию доменов вдоль поля, и стержень таким способом можно намагнитить.
13. Вблизи полюсов мала горизонтальная составляющая земного магнитного поля, и поэтому мал вращающий момент, действующий на стрелку компаса.
14. Вообще говоря, нет. В каждой точке земного шара имеется некоторое магнитное наклонение, т.е. направление магнитного поля не горизонтальное.
15. Нет. На Луне отсутствует магнитное поле.
16. Ферромагнетизм связан со свойствами довольно протяженных структур – доменов, которые могут существовать только в твердых телах.
17. Перешла во внутреннюю энергию раствора.

Микроопыт

Все железные предметы находятся в магнитном поле Земли. Под действием этого поля они намагничиваются, причем нижняя часть предмета обнаруживает северный магнитный полюс, а верхняя – южный (разумеется, в северном полушарии), что и «выдает» магнитная стрелка.

СВЕРХЗВУКОВЫЕ САМОЛЕТЫ И КОНУС МАХА

Задача 2. В обоих случаях надо найти время, через которое конус Маха, коснувшись первого микрофона, коснется второго.
а) Посмотрите на рисунок 9,*а*, на котором нарисована лишь половинка конуса Маха и трасса самолета проложена прямо через микрофоны. Вершина конуса – это сам самолет, поэтому движется она со скоростью самолета. Чтобы дойти до второго микрофона, ей понадобится время

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v} = \frac{\Delta l}{2c} = 2\cdot 10^{-2}\ \text{с}.$$

б) В этом случае посмотрите на рисунок 9,*б*. Чтобы конус Маха коснулся второго микрофона, самолету надо пройти путь $\Delta s = \Delta l \operatorname{ctg}\alpha = \Delta l\sqrt{M^2-1}$. Для этого нужно время

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\Delta l\sqrt{M^2-1}}{2c} = 3{,}46\cdot 10^{-2}\ \text{с}.$$

Задача 3. В пространственном случае под точкой *З* надо понимать не зенит, а ближайшую к наблюдателю точку на траектории самолета, и для длины отрезка *ЗН* брать не высоту

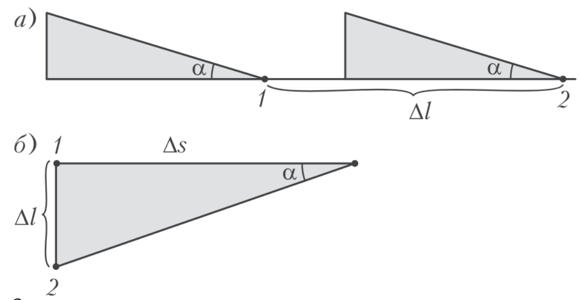

Рис. 9

полета *h*, а минимальное расстояние $\sqrt{h^2+d^2}$ от наблюдателя до траектории (рис. 10). Воспользуемся формулой (полученной в задаче 1) $h = \frac{v\Delta t}{\sqrt{M^2-1}}$ и запишем для каждого наблюдателя выражение

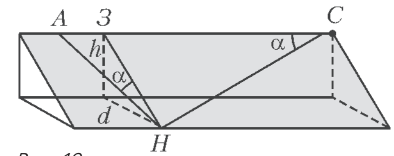

Рис. 10

для времени регистрации звукового сигнала:

$$t_1 = \frac{\sqrt{M^2-1}}{M}\frac{h}{c},\quad t_2 = \frac{\sqrt{M^2-1}}{M}\frac{\sqrt{h^2+a^2}}{c},$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{M^2-1}}{M}\frac{\sqrt{h^2+b^2}}{c}.$$

Все времена отсчитаны от момента прохождения самолетом «зенита», которым для всех трех наблюдателей является точка *З*. В условии задачи задаются не сами времена, а разности времен, поэтому система уравнений будет иметь вид

$$c\Delta t_2 = \frac{\sqrt{M^2-1}}{M}\left(\sqrt{h^2+a^2}-h\right),$$

$$c\Delta t_3 = \frac{\sqrt{M^2-1}}{M}\left(\sqrt{h^2+b^2}-\sqrt{h^2+a^2}\right).$$

Решение этих уравнений дает

$$H = 6000\ \text{м},\ M = 1{,}16.$$

Задача 4. На рисунке 11 изображен момент, когда первый летчик (более быстрый) услышит звук второго самолета. Рассмотрим треугольник AC_1C_2. В этом треугольнике нам заданы три величины:

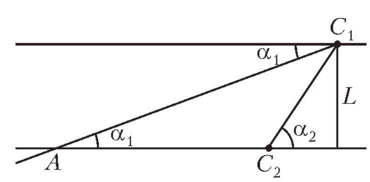

Рис. 11

$\angle C_1AC_2 = \alpha_1$, $\angle AC_2C_1 = 180° - \alpha$ и $AC_2 = (v_1+v_2)\Delta t$. Расстояние между самолетами в тот момент, когда первый летчик слышит самолет второго, равно

$$C_1C_2 = (v_1+v_2)\Delta t\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} = c\Delta t\frac{(M_1+M_2)M_2}{\sqrt{M_1^2-1}-\sqrt{M_2^2-1}},$$

расстояние между самолетами в момент, когда второй летчик услышит первый самолет, равно

$$AC_1 = (v_1+v_2)\Delta t\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} = c\Delta t\frac{(M_1+M_2)M_1}{\sqrt{M_1^2-1}-\sqrt{M_2^2-1}},$$

а расстояние между траекториями самолетов составляет

$$L = C_1C_2\sin\alpha_2 = (v_1+v_2)\Delta t\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} =$$

$$= c\Delta t\frac{M_1+M_2}{\sqrt{M_1^2-1}-\sqrt{M_2^2-1}}.$$

Задача 6. Сразу после того, как первый самолет пересечет

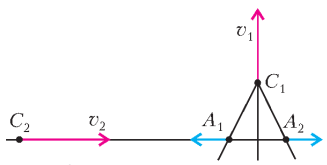

Рис. 12

траекторию второго, на ней появятся две точки: A_1 и A_2 (рис.12). Первая будет двигаться навстречу второму самолету, а вторая – от него. Скорости обеих точек равны

$$v_\perp = \frac{v_1}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

Второй летчик будет слышать звук первого самолета, пока будет находиться внутри конуса Маха первого самолета, т.е. между точками A_1 и A_2. Пусть t_1 – время встречи второго самолета с точкой A_1, а t_2 – время, когда второй самолет догонит точку A_2, тогда для «длительности звучания первого самолета» Δt получим

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Если расстояние между самолетами было равно L и они движутся навстречу друг другу со скоростями v_2 и $v_\perp$, то они встретятся через время

$$t_1 = \frac{L}{v_2 + v_\perp}.$$

Если же один из самолетов движется в другую сторону, то второй нагонит первого через время

$$t_2 = \frac{L}{v_2 - v_\perp}.$$

Объединяя эти два ответа, окончательно получаем

$$\Delta t = \frac{2v_\perp}{v_2^2 - v_\perp^2} L = \frac{2M_1\sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1^2 M_2^2 - M_1^2 - M_2^2}\frac{L}{c} = 2{,}85 \text{ с}.$$

А вот пилот первого самолета никогда не услышит звука второго самолета, так как его скорость $v_1 = M_1 c = 990$ м/с больше скорости точки пересечения его траектории с конусом Маха второго самолета $v = \dfrac{v_2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} = 341$ м/с.

НЕРАВЕНСТВО КОШИ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

1. $v_{\min} = \sqrt{lg} = 20$ м/с, причем минимум достигается при броске под углом $45°$.

2. Поезд B будет находиться в самом городе; наименьшее расстояние между поездами будет $l_{\min} = 7$ км.

3. $h = \dfrac{v_0^2}{4g} = 3{,}6$ м; $s_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2g} = 7{,}2$ м.

4. $\alpha < \arcsin\dfrac{\sqrt{8}}{3} \approx 70{,}5°$. **5.** $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}\right)$.

6. Скорость пассажира равна $\sqrt{la}$ и составляет угол $45°$ с направлением движения поезда.

XVIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. 6.

2. $30°$.

Указание. Опустите из точки D перпендикуляр на прямую BC.

3. $x = y = z = 2$. Почленно вычитая из первого уравнения второе, затем – из второго третье, получим

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = y - z, \\ y^3 - z^3 = z - x. \end{cases}$$

Докажем, что $x = y = z$. Пусть $x > y$. Тогда из системы имеем $x > y > z > x > y$, т.е. $y > y$. Противоречие.

Аналогично доказывается невозможность неравенства $y > x$. Осталось решить уравнение $x^3 - x - 6 = 0$, равносильное уравнению $(x-2)\left(x^2 + 2x + 3\right) = 0$; у второго сомножителя отрицательный дискриминант.

4. 0. Поскольку $\dfrac{x^2}{y+z} + x = \dfrac{x^2 + xy + zx}{y+z}$, находим, что $\dfrac{x^2}{y+z} = \dfrac{x}{y+z}(x+y+z) - x$. Выписав еще два аналогичных равенства, сложим почленно все три. Получим

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = (x+y+z)\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - 1\right).$$

5. а) Можно; б) нет.

а) Пусть за победу команда получает 1 очко. Каждая команда сыграла 7 игр, в каждой из которых разыгрывалось 1 очко, поэтому всего разыграли $\dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ очков.

Заметим теперь, что найдется команда, выигравшая у 4-х команд (иначе все 8 команд набрали всего не более чем $3 \cdot 8 = 24 < 28$ очков). Пусть это команда A, а выиграла она у команд B, C, D и E.

Аналогично, среди команд B, C, D и E найдется команда, выигравшая у двух других из этих четырех команд. Пусть B выиграла у C и D. В паре C и D одна команда выиграла у другой, пусть это команда C. Тогда четверка A, B, C, D искомая.

б) Построим контрпример.

Команды A, B, C, D, E, F, G изобразим точками на плоскости (рис.13) и направим стрелку от точки, изображающей команду-победительницу, в точку, изображающую проигравшую команду. Из рисунка видно, что каждая команда выиграла ровно у трех других команд, выигравших друг у друга «по циклу». Поэтому ситуация, описанная в условии, невозможна.

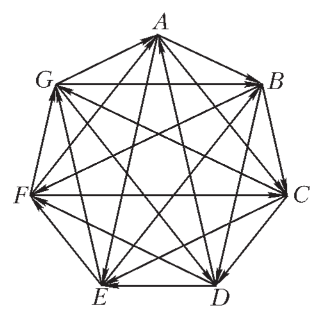

Рис. 13

6. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ – площади указанных в условии треугольников, взятых в некотором порядке, S – площадь данного четырехугольника, x – площадь треугольника CEF (рис. 14,а). Тогда $S = 4n + 6$, а поскольку EF – средняя линия треугольника BCD и отсекает поэтому от него четверть

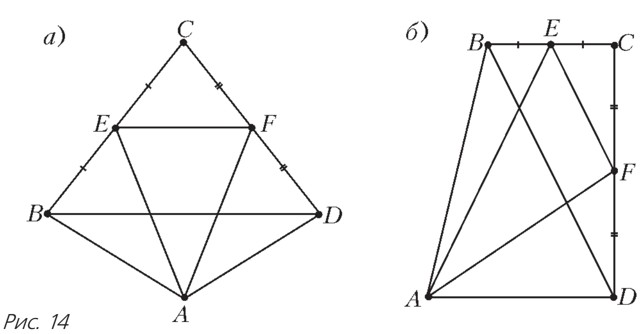

Рис. 14

площади, то площадь треугольника BCD равна $4x$. Значит, для площади треугольника ABD, с учетом очевидного неравенства $x \ge n$, справедливы соотношения:

$$S_{ABD} = 4n + 6 - 4x = 4(n - x) + 6 \le 6.$$

Приведем пример четырехугольника, для которого выполнены условия задачи и при этом $S_{ABD} = 6$.

Возьмем прямоугольную трапецию $ABCD$ (рис.14,*б*) с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$, прямым углом при вершине C и боковой стороной $CD = 4$, точки E и F пусть будут серединами сторон BC и CD соответственно. Тогда $S_{CEF} = 1$, $S_{ABE} = 2$, $S_{AFD} = 3$, $S_{ABCD} = 10$, $S_{AEF} = 4$, $S_{ABD} = 6$.

7. а) Выигрывает первый; б) при $m \neq 1$ выигрывает первый, при $m = 1$ – второй.

а) Пусть для определенности $m \leq n$ и меньшая сторона вертикальна. Тогда первый игрок своим первым ходом закрывает квадрат, центр которого совпадает с центром данного прямоугольника, а сторона равна m, а далее на каждый ход второго отвечает симметрично относительно вертикальной средней линии исходного прямоугольника (рис.15,*а*).

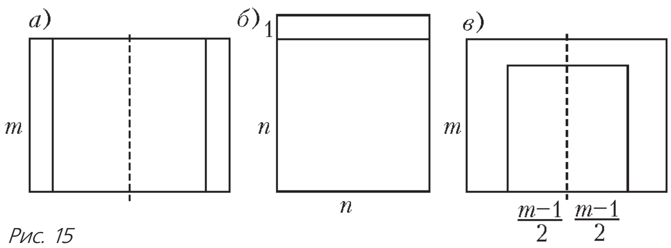

Рис. 15

б) Пусть снова сторона длины m исходного прямоугольника вертикальна. В случае $n + 1 = m$ первый игрок сначала закрашивает квадрат со стороной n. Останется незакрашенная горизонтальная полоска $1 \times n$ (см. рис.15,*б*) и первый игрок снова выигрывает, т.к. после каждого хода второго остается нечетное число незакрашенных клеток.

Если же $n + 1 > m > 1$, то первый игрок первым ходом закрашивает квадрат $(m-1)\times(m-1)$, вертикальная ось симметрии которого совпадает с осью симметрии исходного прямоугольника (рис.15,*в*). Останется незакрашенной фигура в форме буквы П, симметричная относительно оси прямоугольника. На любой ход второго игрока первый отвечает симметричным относительно этой оси ходом и тем самым выигрывает.

Если же $m = 1$, то, очевидно, выигрывает второй.

Замечание. Если m – нечетно, n – четно и $m > n$, то, по-видимому, выигрывает второй. Попробуйте это доказать.

Физика

1. $l = v_0\sqrt{\dfrac{L}{\mu g}} \approx 28{,}3$ м; $t = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{L}{\mu g}} \approx 4{,}44$ с. **2.** $A = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h}$.

3. *Указание.* Двигатель и холодильную машину можно рассматривать как одну термодинамическую систему, совершающую циклический процесс.

4. $p_2 = p_1\sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$, $p_3 = p_1\sqrt{\dfrac{T_3}{T_1}}$.

5. $\Delta h = \dfrac{mv_0}{Mg}\left(\sqrt{v_0^2\left(1+\dfrac{m}{M}\right)^2 + 2gL} - v_0\left(1+\dfrac{m}{M}\right)\right) \approx 8{,}8$ см.

6. $v = \sqrt{\dfrac{2q^2}{3\pi\varepsilon_0 am}}$.

7. $T = 4\sqrt{2}\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} \approx 14500$ с ≈ 4 ч 1 мин; $\dfrac{v_{\text{а}}}{v_{\text{п}}} = \dfrac{1}{3}$.

Устный командный тур

Математика

1. 69. На 8 делятся только те натуральные числа, последние три цифры которых образуют число, делящееся на 8. Поэтому в искомом числе надо взять максимально возможные первые 5 цифр. Далее несложным перебором находим ответ – это число 99999888.

2. $60°$. Пусть O – точка пересечения указанных в условии линий, M – середина стороны AB исходного треугольника. Тогда прямоугольные треугольники AMO и AHO равны (по гипотенузе и острому углу), поэтому равны отрезки AM и AH. Это означает, что в прямоугольном треугольнике ABH катет AH равен половине гипотенузы AB, откуда угол ABH равен $30°$, а искомый угол A исходного треугольника равен $60°$.

3. 407 = 250 + 125 + 32.

4. 40 км/ч. *Указание.* Пусть t – промежуток времени, упомянутый в условии. Тогда при прохождении автобуса мимо первого наблюдателя расстояние от него до грузовика и легкового автомобиля равны соответственно $30t$ и $120t$. При прохождении автобуса мимо второго наблюдателя расстояния будут равны $60t$ и $60t$, т.е. в этот момент легковой автомобиль догонит грузовик. Поэтому от момента прохождения автобуса мимо первого наблюдателя до момента его прохождения мимо второго, проходит время $\dfrac{90t}{60-30} = 3t$. Пусть V – скорость автобуса. Так как расстояние от легкового автомобиля до автобуса во второй момент равно $60t$, то

$$\frac{20t - 60t}{60 - V} = 3t,$$

Откуда $V = 40$ км/ч.

5. Верно. Среди любых двенадцати двузначных чисел найдутся два, дающие при делении на 11 одинаковые остатки. Их разность делится на одиннадцать и является двузначных числом.

6. 2525. Если из каждого числа, большего 50, вычесть 50, то вместе с числами, не превосходящими 50, полученный набор состоит из всех чисел 1, 2, …, 50. Поэтому суммы всех данных чисел равны $1 + 2 + \ldots + 50 + 50 \cdot 25 = 2525$.

7. а) Нет; б) нет; в) да.

Дискриминант трехчлена $ax^2 + bx + c$ равен $b^2 - 4ac$.

а) Равенство $b^2 - 4ac = 2010$ при целых a, b и c невозможно, ибо при нечетном b левая часть нечетна, а при четном b она делится на 4.

б) Равенство $b^2 - 4ac = 2011$ невозможно (при нечетном b левая часть при делении на 4 дает в остатке 1, а правая – 3).

в) Например, подходит трехчлен $2x^2 + 46x + 13$.

8. $AD + BC \geq CD$. Продлим отрезок DM за точку M до точки E так, что $EM = MD$ (рис.16). Тогда $ADBE$ – параллелограмм (диагонали этого четырехугольника в точке пересечения делятся пополам). Поэтому $AD = BE$. Кроме того, треугольник CDE – равнобедренный (в нем высота CM одновременно и медиана), поэтому $CD = CE$ и $AD + BC = BE + BC \geq CE = CD$. Равенство возможно лишь при $AD \parallel BC$.

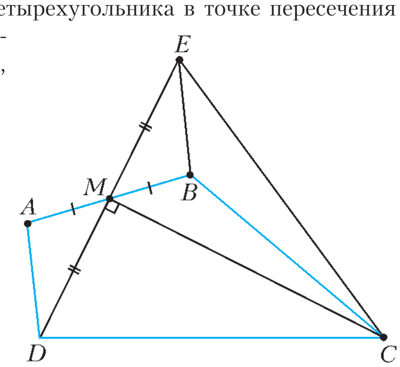

Рис. 16

9. Существуют. Рассмотрим 1000 последовательных натуральных чисел, начиная с числа 2. Понятно, что среди них больше 5 простых (первые 5 простых чисел – 2, 3, 5, 7, 11). Начнем сдвигать наши 1000 чисел по натуральному ряду на одно число. При каждом сдвиге количество простых чисел среди них может измениться не более чем на 1. На каком-то шаге у нас получится (см., например, условие), что простых чисел 0. Значит, где-то по дороге оно было равно 5.

10. Верно. Если $\sqrt{a+b} < \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, то $\sqrt{a+b} > 2$ и $a + b > 4$.

11. Нет. При любой расстановке десяти цифр 0, 1, …, 9 в вершинах 45 угольника хотя бы одна из цифр будет записана не более, чем в 4-х вершинах. Но тогда она будет образовывать не более 8 пар со своими соседями, тогда как всего пар с участием этой цифры 9.

12. Верно. Рассмотрим квадратный трехчлен $y(x) = ax^2 + bx + c$. Неравенство из условия может быть записано так: $f(0) \cdot f(1) < 0$. Это значит, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет в точности один корень в промежутке (0; 1). Следовательно $b^2 > 4ac$.

Физика

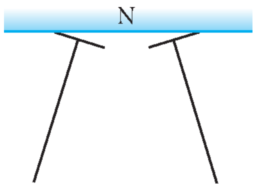

Рис. 17

1. См. рис.17. *Указание.* Гвозди намагничиваются так, что нижние концы гвоздей становятся одноименными полюсами магнита.

2. Нет, если под вертикалью понимать перпендикуляр к горизонтальной плоскости (касательной к земному шару).

3. $\Delta m = \dfrac{cmt}{\lambda} = 105$ г (здесь c – удельная теплоемкость воды, λ – удельная теплота плавления льда).

4. $\beta = 45°$.

5. Ускорение мяча максимально в начальный момент полета и минимально в момент окончания полета.

6. При малом угле наклона плоскости сила, прижимающая к ней цилиндр, больше силы, прижимающей цилиндры друг к другу, в результате чего между цилиндрами возникает проскальзывание. При большом угле наклона прижимающая сила между цилиндрами больше, и верхний цилиндр скользит по плоскости.

7. $q_1' = 0$, $q_2' = 4\pi\varepsilon_0 (r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2) \approx 5{,}3$ нКл,

$\varphi_1' = \varphi_2' = \dfrac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = 477$ В.

8. $U_{34} = 2U_0$. **9.** $I_r = 0$.

10. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{gt^2}{2L}$; после того как бусинка соскользнет со стержня, он продолжит вращение с постоянной скоростью.

История научных идей и открытий

Математика

1. $\sqrt{\dfrac{2a^2 + b^2}{3}}$ и $\sqrt{\dfrac{a^2 + 2b^2}{3}}$. *Указание.* Длина отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам, равна $\sqrt{\dfrac{u^2 + v^2}{2}}$, где u и v – длины оснований трапеции.

2. 29 чи. Прокатим дерево по горизонтальной плоскости так, чтобы лиана распрямилась и стала диагональю прямоугольника со сторонами 20 чи и 21 чи.

3. Бесконечно. Заметим, что точка $A(1;1)$ удовлетворяет уравнению. Проведем произвольную прямую с рациональным угловым коэффициентом k. Уравнение такой прямой имеет вид $y - 1 = k(x - 1)$. Подставив $y = kx - k + 1$ в исходное уравнение, придем после преобразований к уравнению $Ax^2 + Bx + C = 0$ с целыми A, B и C, причем $x_1 = 1$ – корень последнего уравнения. Второй корень его $x_1 = \dfrac{C}{A}$ – рациональное число. Пара (x_1, y_1), где $y_1 = kx_1 - k + 1$, – решение исходного уравнения в рациональных числах.

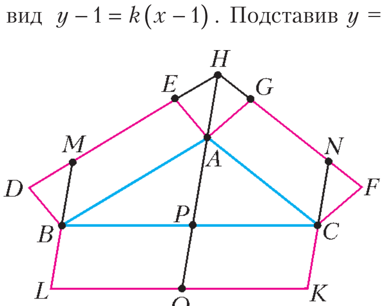

Рис. 18

4. а) Пусть $BCKL$ – параллелограмм со стороной CK, равной и параллельной AH (рис.18). Тогда параллелограммы $CPQK$, $AHNC$ и $ACFG$ имеют одинаковые площади. Аналогично, равны площади параллелограммов $BLQP$, $BMHA$ и $ABDE$. Поэтому $S_{BLKC} = S_{BLQP} + S_{CKQP} = S_{ABDE} + S_{ACFG}$, что и требовалось.

б) Теоремы Пифагора: сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

5. Существуют. Преобразуем произведение

$$\left(x_1^2 + 2y_1^2\right)\left(x_2^2 + 2y_2^2\right) = x_1^2x_2^2 + 4y_1^2y_2^2 + 2x_1^2y_1^2 + 2x_2^2y_1^2 =$$

$$= x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2y_1y_2 + 4y_1^2y_2^2 + 2\left(x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2\right) =$$

$$= \left(x_1x_2 - 2y_1y_2\right)^2 + 2\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)^2 = x_3^2 + 2y_3^2.$$

Физика

1. а) Луи де Бройль; б) Франция.

2. Филолай; Аристарх Самосский.

3. а) Оптический телескоп; б) Галилео Галилей; в) Италия; г) окуляром телескопа Галилея является рассеивающая линза, а телескопа Кеплера – собирающая.

4. а) Атомно-силовой микроскоп; б) например, электронный микроскоп, ионный проектор, сканирующий туннельный микроскоп, трехмерный атомно-зондовый томограф и др.

5. а) Джеймс Клерк Максвелл; б) теория электромагнитного поля.

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова,

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59