Сверхзвуковые самолеты и конус Маха

Е.СОКОЛОВ

Сверхзвуковые самолеты не только покоряют воздушные океаны, но иногда появляются и в школьных задачах. Вот – примеры.

Задача 1. *Наблюдатель услышал звук сверхзвукового самолета через $\Delta t = 10$ с после того, как самолет пролетел над ним. На какой высоте летит самолет, если его скорость $v = 660$ м/с, а скорость звука $c = 330$ м/с?*

Для человека, который первый раз обращается к рассмотрению полетов сверхзвуковых самолетов, условие этой задачи в высшей степени загадочно.

– А почему так поздно наблюдатель услышал шум самолета? Ведь обычно мы слышим самолет задолго до того, как он пролетит над нами.

– Может, наблюдатель просто задумался над чем-то, поэтому и услышал звук не сразу?

– А может, и не надо ни о чем думать, а просто умножить время на скорость? Только скоростей в условии две…

Эти и другие подобные мысли роятся в голове, цепляются одна за другую и совершенно не проясняют сути дела. И это не удивительно. Привыкшим к миру дозвуковых скоростей очень сложно догадаться, чем полет сверхзвукового самолета отличается от полета обычного самолета и почему мы слышим сверхзвуковой самолет лишь после того, как он пролетит над нами. Первым эту загадку разгадал профессор Венского университета Эрнст Мах. С его именем связаны понятия «конус Маха» и «число Маха».

Чтобы понять, что такое конус Маха, его надо хоть раз в жизни построить самому. Сделаем это и мы. Для этого нам понадобятся лист бумаги в клетку, карандаш, линейка и циркуль. Пусть по листу нашей бумаги слева направо движется сверхзвуковой самолет, пролетающий 2 клетки в секунду, а скорость звука составляет 1 клетку в секунду. Начинаем построение. Если сейчас наш самолет находится в точке C (рис.1,*а*), то где он был пять секунд назад?

– На десять клеточек левее, в точке A (рис.1,*б*).

– Правильно. Излученный им в этот момент звук за пять секунд распространится на пять клеточек во все стороны. Поэтому ставим ножку циркуля в точку A и рисуем окружность радиусом 5 клеточек. Это мы построили геометрическое место точек, до которых дошел звук, излученный 5 секунд назад. И услышали этот звук к настоящему моменту все наблюдатели, находящиеся внутри и на самой этой окружности. Затем нарисуем круг для звука, излученного 4 секунды назад (ножку циркуля надо поставить в точку B, а радиус этого круга должен составлять 4 клеточки), потом – для трех секунд, для двух, для одной (рис.1,*в*). Ну а для звука, излученного только что, и рисовать ничего не надо – он еще не успел никуда распространиться, и его круг это просто точка C, сам самолет. Теперь понятно, в каких точках наблюдатели услышат звук, а в каких – нет.

Если рисовать звуковые фронты более часто, то картина станет еще подробнее, и мы увидим самое интересное – звуковые фронты-окружности имеют общие касательные (рис.2). Эти линии называют огибающими семейства окружностей. В нашей задаче эти прямые-огибающие делят все пространство на область, в которой уже был слышен звук самолета, и область, до которой звук еще не дошел. Точки самой огибающей – это точки, в которые звук только-только пришел. Вот вам и отгадка, почему сверхзвуковой самолет может уже пролететь над наблюдателем, а тот еще ничего не будет слышать – просто его еще не коснулись огибающие.

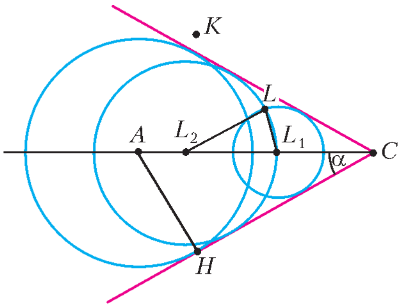


Рис. 2

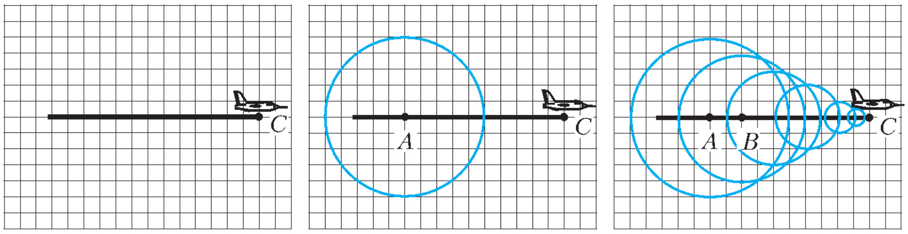
При построении на плоскости у нас для области слышимости получился некоторый угол α. А если бы все происходило в пространстве?

– Тогда получился бы конус.

– Правильно. Этот конус и называется конусом Маха. Давайте вычислим его главную характеристику – угол раствора α. Обратимся снова к рисунку 2. В точке K звука еще нет. В точке L наблюдатель уже некоторое время слышит звук, причем в данный момент он слышит сразу и звук, пришедший к нему из точки L_1, и звук, пришедший к нему из точки L_2. А вот наблюдатель, стоящий на огибающей в точке H, только-только услышал звук. И слышит он звук, идущий к нему из точки A, чей звуковой фронт касается огибающей в точке H. Так как угол между касательной и радиусом, проведенным в точку касания, прямой, треугольник ACH прямоугольный. Примем, что самолет пролетел гипотенузу этого треугольника AC за время t. Тогда сама гипотенуза будет равна vt, а катет AH (это расстояние, которое прошел звук) будет равен ct, и для угла Маха получим $\sin\alpha = \frac{c}{v}$. Число $M = \frac{v}{c}$, показывающее, во сколько раз скорость самолета превышает скорость звука, называют числом Маха. Используя это число, мы можем записать полученную формулу так, как когда-то ее записал сам Эрнст Мах:

$$\sin\alpha = \frac{1}{M}.$$

Итак, загадки сверхзвуковых самолетов



а) б) в)

Рис. 1

для нас больше нет. Задачи про сверхзвуковые самолеты – это задачи про движение конуса Маха. А вопросы типа «Когда наблюдатель услышит звук самолета?» следует сразу же превращать в вопросы типа «Когда конус Маха коснется точки H?»

Применим эти соображения к решению задачи 1. Посмотрите на рисунок 3, на котором главный элемент – конус Маха. Для треугольника $ЗCH$ (зенит, самолет, наблюдатель) нам известно следующее. Угол $HЗC$ – (по построению) прямой, угол $ЗCH$ – это угол Маха, который для нашего самолета равен $30°$, потому что $M = \frac{v}{c} = 2$. И еще известна сторона $ЗC$: после того, как самолет был в зените, прошло время Δt, следовательно, расстояние, которое он пролетел, равно $ЗC = v\Delta t$. Теперь мы можем определить высоту полета:

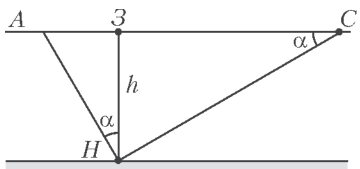


Рис. 3

$$h = ЗC\,\mathrm{tg}\,\alpha = v\Delta t \frac{1/M}{\sqrt{1-1/M^2}} = \frac{v\Delta t}{\sqrt{M^2-1}} = 3810 \text{ м}.$$

Первая задача решена.

Вот вам еще несколько задач. Некоторые – для самостоятельного решения, а некоторые мы решим вместе с вами.

Задача 2. *Сверхзвуковой самолет, летящий горизонтально со скоростью, вдвое большей скорости звука, пролетает мимо двух микрофонов. Через какое время после первого зафиксирует звук самолета второй микрофон, если расстояние между ними $\Delta l = 13{,}2$ м, а скорость звука $c = 330$ м/с? Рассмотрите два случая: а) микрофоны расположены горизонтально; б) микрофоны расположены вертикально.*

Задача 3. *Траектория сверхзвукового самолета проходит с запада на восток. Первый наблюдатель находится непосредственно под траекторией самолета, второй – на расстоянии $a = 4500$ м от него к югу, а третий – на расстоянии $b = 8000$ м к северу. Чему равны высота полета самолета и число Маха, если второй наблюдатель услышал звук на $\Delta t_2 = 2{,}28$ с позже первого, а третий – на $\Delta t_3 = 3{,}80$ с позже второго? Скорость звука $c = 330$ м/с.*

Задача 4. *Два сверхзвуковых самолета летят навстречу друг другу параллельными курсами. Число Маха для первого самолета M_1, для второго M_2. Скорость звука c. Второй летчик услышал звук первого самолета через время Δt после того, как первый летчик услышал звук второго самолета. Чему равно расстояние между траекториями самолета? Чему было равно расстояние между самолетами, когда первый летчик услышал звук? Чему было равно расстояние между самолетами, когда второй летчик услышал звук?*

Задача 5. *Самолет 1 летит со сверхзвуковой скоростью v_1. Летчик самолета 2 хочет лететь так, чтобы не слышать шума мотора первого самолета. При какой минимальной скорости ему это удастся? Какого курса ему следует при этом придерживаться?*

Эту задачу давайте решать вместе.

Пусть летчик второго самолета выбрал курс, составляющий угол β с курсом первого самолета (рис.4). Его траектория – прямая, и по этой прямой движутся две точки: сам второй самолет C_2 и точка A – точка пересечения этой прямой и образующей конуса Маха первого самолета. Летчик второго самолета никогда не услышит звука первого самолета, если точка A никогда не догонит его. Поэтому скорость второго самолета должна быть больше или равна скорости точки A. Найдем эту скорость.

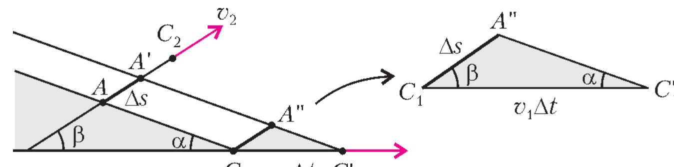


Рис. 4

Рассмотрим смещение первого самолета за некоторое время Δt. В треугольнике $C_1C_1'A''$ сторона C_1A'' равна смещению Δs точки A. Используя теорему синусов, получаем

$$\Delta s = \frac{v_1\Delta t \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

откуда для скорости точки A находим

$$v_A = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Обсудим полученное выражение. Если второй самолет будет лететь в том же направлении, что и первый ($\beta = 0$), то

$$v_2 = v_A = \frac{c}{\sin\alpha} = v_1$$

– второму самолету следует иметь скорость, большую или равную скорости первого самолета. Разумный результат. Для курса, перпендикулярного курсу первого самолета ($\beta = 90°$), скорость точки A будет равна

$$v_\perp = \frac{c}{\sin(\alpha+90°)} = \frac{c}{\cos\alpha} = \frac{c}{\sqrt{1-1/M^2}} = \frac{v_1}{\sqrt{M^2-1}}.$$

А вот минимальная скорость у точки пересечения будет в том случае, когда $\sin(\alpha+\beta) = 1$, т.е. когда $\alpha+\beta = 90°$. Это условие будет выполнено, если наша прямая будет перпендикулярна образующей конуса Маха. Тогда скорость точки пересечения будет просто равна скорости звука c. Об этой скорости часто говорят как о скорости движения волнового фронта или как о скорости движения огибающей.

Итак, ответ к нашей задаче таков. Минимальная скорость, при которой второй летчик может лететь так, чтобы ему не мешал шум первого самолета, это скорость звука c, т.е. достаточно, чтобы второй самолет был просто сверхзвуковым. А для того чтобы путешествовать в тишине, второму летчику следует выбрать курс, перпендикулярный образующей конуса Маха первого самолета.

Задача 6. *Сверхзвуковые самолеты летят перпендикулярно друг другу (рис.5) со скоростями, соответствующими числам Маха $M_1 = 3$ и $M_2 = 4$. Сколько времени второй летчик будет слышать шум мотора первого самолета, если первоначальное расстояние между самолетами $L = 6600$ м? Услышит ли когда-нибудь первый летчик звук второго самолета? Скорость звука $c = 330$ м/с.*

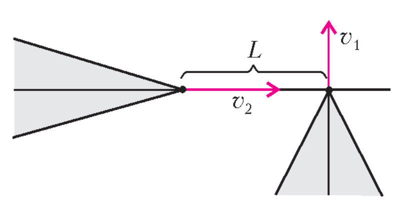


Рис. 5

Обжегшись на молоке, на воду дуют...

А.СТАСЕНКО

...И, ВИДНО, НЕСПРОСТА. НО ЧЕМ ЭТО ОБЪЯСНИТЬ? Наверное, многим знаком невольный эксперимент: быстро вынув палец из кипятка, хочется на него подуть или помахать рукой (лучше не пробуйте повторить этот эксперимент). Ясно, что тут речь идет об усилении теплоотвода от пальца в воздух. Физики давно научились описывать этот процесс. Считается, что плотность потока тепловой энергии $j_т$, измеряемая в $Дж/(м^2 \cdot с)$, в направлении некоторой координаты r пропорциональна скорости изменения (точнее, темпу изменения) температуры в противоположном направлении:

$$j_т \sim -\frac{\Delta T}{\Delta r}. \qquad (1)$$

Здесь Δr – расстояние между двумя точками среды, температуры которых отличаются на ΔT. А знак «минус» говорит о том, что тепло течет от горячих участков к холодным. Отношение $\frac{\Delta T}{\Delta r}$ называют градиентом температуры вдоль r, а сама зависимость (1) есть закон Фурье – по имени французского физика и математика Жана Батиста Фурье (1768–1830).

Но, оказывается, такая пропорциональность встречается не только в теории теплопроводности. Например, плотность электрического тока $j_э$, измеряемая в $А/м^2 = Кл/(м^2 \cdot с)$, пропорциональна градиенту электрического потенциала φ, который непосредственно определяет напряженность электрического поля $\vec{E}$:

$$j_э \sim -\frac{\Delta\varphi}{\Delta r} = E_r. \qquad (2)$$

Этот закон называется (обобщенным) законом Ома, по имени немецкого физика Георга Симона Ома (1787–1854). Сравнивая выражения (1) и (2), можно и температуру T назвать потенциалом – разность значений этого потенциала вызывает поток тепла.

Далее, если в каком-либо растворе, например сахара в воде или духов в воздухе, концентрация вещества неодинакова в разных точках, то возникает диффузия, и плотность потока молекул этого вещества j_n оказывается пропорциональной градиенту концентрации n, т.е. темпу ее изменения в пространстве:

$$j_n \sim -\frac{\Delta n}{\Delta r}. \qquad (3)$$

Это соотношение – закон Фика, в честь немецкого физиолога Адольфа Фика (1829–1901). Теперь можно и концентрацию вещества назвать потенциалом, разность значений которого вызывает диффузионный поток массы.

Но и это еще не все. Когда мы дуем на палец, скорость потока воздуха у его поверхности близка к нулю, а с удалением от поверхности она возрастает. Иными словами, имеет место изменение касательной составляющей скорости по направлению нормали $\Delta u/\Delta r$. В результате возникает касательное напряжение j_u, измеряемое в $Н/м^2$, т.е. трение слоев воздуха друг о друга и, в конечном счете, о саму поверхность обтекаемого тела. И, оказывается,

$$j_u \sim -\frac{\Delta u}{\Delta r}. \qquad (4)$$

А ведь это напряжение можно назвать плотностью потока импульса: $Н/м^2 = (кг \cdot м/с)/(м^2 \cdot с)$! Сравнивая выражение (4) с предыдущими, как не назвать скорость потенциалом? Жидкости, подчиняющиеся этому закону, называются ньютоновскими. Вы догадались, почему? Правильно: его установил великий Ньютон еще в 1687 году.

Теперь можно удивиться и восхититься: различные по своей природе физические процессы, описание которых более чем 100–300 лет назад предложено замечательными учеными разных стран, отражают некий общий факт: плотность потока любой физической сущности – тепловой энергии, электрического заряда, растворимого вещества, импульса... пропорциональна темпу пространственного изменения соответствующего потенциала – температуры, электрического напряжения, концентрации, скорости...

Все упомянутые процессы называются явлениями переноса. Знак пропорциональности в приведеных соотношениях можно заменить знаком равенства, если при каждом градиенте написать соответствующий коэффициент: теплопроводности, электропроводности, диффузии, вязкости... – это хорошо знают студенты уже первого курса университета.

Однако вернемся к обваренному кипятком пальцу. Кто же переносит тепло от пальца и почему хочется на него подуть? Конечно, этим занимаются молекулы, и, конечно, дуновение ускоряет теплоотвод.

Рассмотрим сферу (или полусферу) радиусом R с температурой поверхности $T_п$, моделирующую кончик пальца. Если окружающий воздух спокоен, «горячие» молекулы, тепловая скорость которых соответствует $T_п$, проталкиваются в направлении от поверхности (рис.1,*а*), а навстречу им также проталкиваются холодные молекулы из «бесконечности», где температура равна T_∞. Устанавливается некоторое

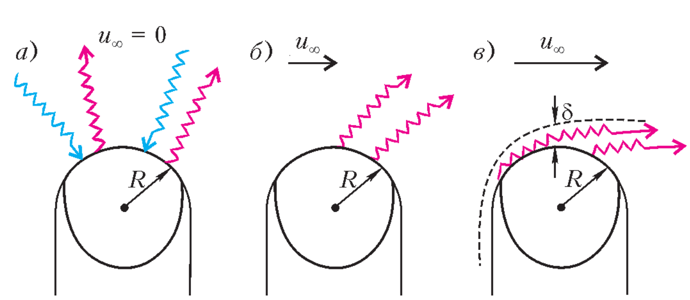


Рис. 1

распределение температуры, которое качественно представлено кривой *а* на рисунке 2. Можно показать, что температура падает в радиальном направлении довольно плавно, по гиперболическому закону, существенно изменяясь на расстоянии порядка R. (В этих рассуждениях не принята во внимание сила Архимеда, заставляющая всплывать теплый газ в атмосфере холодного и, конечно, помогающая отводу тепла.) В результате плотность потока тепловой энергии от

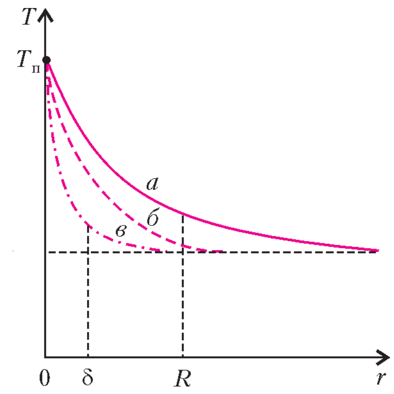


Рис. 2

поверхности можно записать в виде зависимости от конечной разности температур и расстояния, на котором происходит ее существенное изменение:

$$j_a \sim \frac{T_п - T_\infty}{R}.$$

Теперь начнем потихоньку дуть на палец. Ясно, что молекулы, уносящие тепло, «сдуваются» потоком воздуха (рис.1,*б*). Наконец, подуем что есть силы, тогда все молекулы, «стартующие» от поверхности, уместятся в тонком слое характерной толщины δ (рис.1,*в*), существенно меньшей радиуса сферы R $(\delta \ll R)$. (Соответствующие этим случаям графики распределения температуры качественно представлены кривыми *б* и *в* на рисунке 2.) В результате поток тепла увеличится:

$$j_б \sim \frac{T_п - T_\infty}{\delta} \gg \frac{T_п - T_\infty}{R} \sim j_a.$$

Этот тонкий слой называют пограничным. Он был впервые введен известным немецким аэродинамиком Людвигом Прандтлем (1875–1953) – конечно, не в применении к пальцу, а при решении проблем сопротивления тел в потоке жидкости или газа. Есть мнение, что только за введение этого плодотворного понятия Прандтлю следовало бы присудить Нобелевскую премию.

Но продолжим наши рассуждения. Мы знаем, что именно молекулы уносят тепло от пальца (и приносят «холод» из окружающей среды). Значит, для оценки толщины теплового погранслоя следует использовать характеристики молекулярного хаоса. Какие именно? Разумеется, прежде всего это средняя скорость теплового движения $\langle c \rangle$ – чем быстрее движутся молекулы, тем интенсивнее теплообмен. Далее, это средняя длина свободного пробега молекулы l – чем она больше, тем дальше унесет молекула энергию, передав ее следующей молекуле при столкновении. Произведение этих двух величин имеет размерность $м^2/с$, а если его умножить на время прохождения воздухом характерного расстояния порядка радиуса R, то получим оценку квадрата толщины погранслоя:

$$\delta^2 \sim \langle c \rangle l \frac{R}{u} \sim \langle c \rangle lt. \qquad (5)$$

(Кстати сказать, именно Фурье первым стал применять метод размерностей.)

Соотношение (5) характерно для всех процессов блуждания. Оно восходит к первым попыткам описания броуновского движения частиц. А его образным аналогом является проблема пьяного матроса в незнакомом городе. Оказавшись на любом перекрестке, матрос наугад выбирает одно из четырех направлений. Спрашивается: как далеко матрос уйдет от начальной точки, пройдя N кварталов? Ответ: средний ожидаемый квадрат этого удаления пропорционален N. Понятно, что удаление δ будет зависеть и от скорости движения $\langle c \rangle$, и от длины кварталов l, т.е. будет описываться выражением (5). Осталось подставить его в формулу для плотности потока тепла от поверхности пальца:

$$j \sim \frac{(T_п - T_\infty)\sqrt{u}}{\sqrt{\langle c \rangle lR}}.$$

Отсюда видно, что от нас зависит только скорость потока воздуха u. Именно она превращает медленную диффузию молекул на дне погранслоя в быстрый конвективный перенос на его внешней границе. Так что дуйте посильнее. Но не переусердствуйте. Ибо если достичь сверхзвуковой скорости, то, наоборот, большая кинетическая энергия потока воздуха перейдет в точке торможения в тепло и даст высокую температуру поверхности. Действительно, из закона сохранения энергии

$$\frac{Mu_\infty^2}{2} + \frac{5}{2}RT_\infty = 0 + \frac{5}{2}RT_п,$$

записанного для одного моля воздуха, при скорости обдува, например, $u_\infty = 1000$ м/с получим

$$T_п = T_\infty + \frac{Mu_\infty^2}{5R} = 300\ К + \frac{0{,}029 \cdot 10^6}{5 \cdot 8{,}31}\ К \approx 1000\ К!$$

Впрочем, едва ли наши губы и легкие позволят обеспечить сверхзвуковое обтекание пальца воздухом.

Интересно заметить, что при ковке знаменитых сабель из дамасской стали кузнец вручал джигиту раскаленный клинок и джигит немедленно скакал во весь опор, усиленно размахивая им. По-видимому, такой режим охлаждения был оптимальным для тогдашней инновационной технологии.

Но все ли мы учли? Нет, не все: палец-то после кипятка мокрый! И тут вступает в силу еще процесс испарения молекул воды, за которым следует их диффузия в погранслое и унос воздухом. Для описания этого процесса нужно использовать соотношение (3). Нам это не в новинку – ведь и рассмотренная ранее теплопроводность есть не что иное как диффузия тепловой энергии. И теперь к отводу тепла молекулами воздуха добавится унос теплоты фазового перехода L вместе с испаряющейся массой воды:

$$j_m L \sim \frac{n_п - n_\infty}{\delta}.$$

Здесь $j_m = j_n m$ (m – масса молекулы) – это плотность потока массы, уносимой с обдуваемого тела, $n_п$ и n_∞ – соответствующие значения концентрации молекул воды. Этот унос тепла максимален, если окружающий воздух сухой ($n_\infty \to 0$). И это значительная добавка – ведь удельная теплота парообразования для воды достаточно велика: $L \approx 2$ МДж/кг.

Вот почему для охлаждения летательных аппаратов, входящих в атмосферу с большой скоростью, используют жидкость, продавливаемую изнутри через пористую поверхность тела: испаряясь, она уносит тепло и спасает аппарат от сгорания. Не напрасно также в жарких пустынях для охлаждения пепси ставят бутылку, обернутую мокрой тряпкой, на крышу автомобиля и гонят его как можно быстрее. Тут уж работают и u, и L, и...

Вот как полезно знать газотермодинамику!

О пользе графиков

М.ГОРЕЛОВ

В школьной программе заметное место уделяется построению графиков функций, но не всегда объясняется, зачем это нужно. Ниже приводится ряд задач, ключом к решению которых является построение графиков. Говорят, что «геометрией называется метод не делать ошибок в длинных вычислениях». Что ж, в каждой шутке есть доля истины.

Геометрические основы

Задача 1 (III этап Всероссийской олимпиады, 1998). *По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями несколько велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Может ли оказаться при некотором начальном расположении и некоторых скоростях, что как бы долго они ни ездили, у двух из них фляжка так и не побывает?*

Решение. Выберем двух любых велосипедистов и обозначим их A и B. Докажем, что у одного из них фляжка непременно побывает. Построим графики движения выбранных спортсменов и фляжки (на рисунке 1 графики движения A и B зеленые, а график движения фляжки – красный). За начало координат примем момент времени, когда B обогнал A, и точку трека, в которой это произошло. Пусть в следующий раз B обгонит A в момент времени T, а длина трека равна S. Поскольку велосипедисты движутся по кругу, точки с ординатами x и $x+S$ обозначают одно и то же место на треке. Это соглашение позволяет нам изображать графики прямыми линиями. При этом у нас остается свобода выбора начальных значений координат. Выберем их так, что в начальный момент времени координата A равна S, координата B равна нулю, а координата фляжки лежит на отрезке $[0;\ S]$.

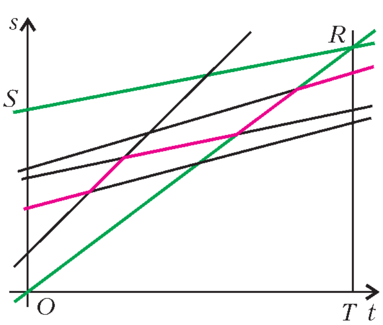


Рис. 1

В силу последнего условия, график движения фляжки «входит» в треугольник OSR (см. рис.1) через вертикальную сторону. Значит, он должен «выйти» из него через одну из других сторон. Но в момент первого пересечения графика движения фляжки с графиком движения велосипедиста фляжка по правилам переходит к этому спортсмену.

Запишем эти рассуждения более формально. Пусть $f(t)$ и $h(t)$ – координаты велосипедистов A и B в момент времени t, а $g(t)$ – соответствующая координата фляжки. В силу выбора начальных условий $f(0) \le g(0) \le h(0)$. Поскольку $f(T) = h(T)$, неравенства $f(T) < g(T) < h(T)$ не могут выполняться одновременно, т.е. либо $f(T) \ge g(T)$, либо $g(T) \le h(T)$. В первом случае разность $f(t) - g(t)$ меняет знак на отрезке $[0;\ T]$, а потому обращается в ноль. Тогда велосипедист A непременно получает фляжку. Второй случай рассматривается аналогично.

Анализ приведенного решения показывает, что в нем неявно использовалась

Теорема о промежуточном значении. *Если непрерывная функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка она обращается в ноль.*

В задаче 1 эта теорема применялась для кусочно-линейных функций. В этом случае она доказывается элементарными средствами. В общем случае доказательство можно найти в большинстве вузовских учебников математического анализа. Мы будем использовать как «очевидный» следующий геометрический факт: если непрерывная кривая соединяет две точки, лежащие по разные стороны от прямой, то она пересекает эту прямую. Пожалуй, в наиболее чистом виде этот факт используется при решении следующей задачи.

Задача 2. *Турист вышел на рассвете из базового лагеря и к вечеру поднялся на вершину горы. Переночевав там, он утром следующего дня отправился в обратный путь и вечером вернулся в базовый лагерь. Докажите, что по пути туда и обратно в какое-то время суток он находился на одной высоте.*

Решение. Нарисуем на одной координатной плоскости графики зависимости высоты туриста над уровнем базового лагеря от времени суток в два рассматриваемых дня (рис. 2). Пусть $f(t)$ – высота в момент времени t при подъеме, а $h(t)$ – при спуске. Из законов физики следует, что функции f и h непрерывны. По условию разность $f(0) - h(0)$ отрицательна, а разность $f(24) - h(24)$ положительна (время измеряется в часах). Поэтому найдется момент времени t, когда разность $f(t) - h(t) = 0$, или $f(t) = h(t)$, что и требуется доказать.

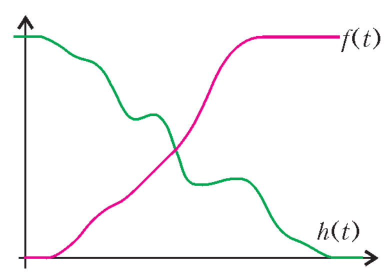


Рис. 2

Упражнения

1. Числа a, b и c таковы, что система уравнений $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ имеет решение. Докажите, что $a = b = c$.

2 (Н.Константинов). Из пункта A в пункт B ведут две непересекающиеся дороги. Два мотоцикла, выехавшие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины, меньшей l, смогли доехать в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза диаметра l, центры которых движутся навстречу друг другу из A и B соответственно?

Квадратные трехчлены

Задача 3. *Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a – натуральное, b и c – целые числа, имеет два различных корня внутри интервала $(0;\ 1)$. Докажите, что $a \ge 5$.*

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи, то им удовлетворяет и многочлен $f(1-x)$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $f(1) \ge f(0) = c$. Нарисуем графики многочленов

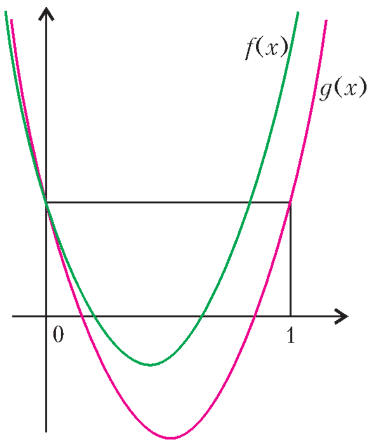


Рис. 3

$f(x)$ и $g(x) = ax(x-1) + c$ (рис. 3). Их разность – линейная функция, поэтому графики пересекаются в единственной точке $x = 0$, если только не совпадают. А так как $f(1) \geq g(1)$, то $f(x) \geq g(x)$ на всем интервале $(0;\ 1)$.

Поэтому минимальное значение $g(x)$ на отрезке $[0;1]$ не превосходит минимального значения $f(x)$ на том же отрезке, которое отрицательно. Но минимум $g(x)$ достигается при $x = \frac{1}{2}$, т.е. $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, откуда $\frac{1}{4}a > c \geq 0$, или $a > 4$.

Задача 4 (III этап Всероссийской олимпиады, 1998). *Про квадратные трехчлены с различными старшими коэффициентами известно, что их разности $f-g$, $g-h$, $h-f$ имеют по одному корню. Докажите, что корни разностей совпадают.*

Решение. Пусть многочлен $g(x)$ имеет средний по величине старший коэффициент. Тогда график многочлена, имеющего самый большой старший коэффициент, лежит выше графика $g(x)$ при больших по модулю значениях x. Так как эти два графика имеют единственную общую точку, то же отношение верно при всех значениях x, кроме одного (рис.4).

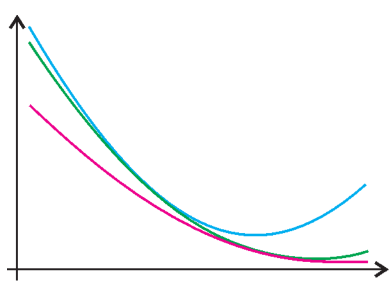


Рис. 4

По аналогичным соображениям график третьего многочлена лежит ниже графика $g(x)$ во всех точках, кроме одной. Значит, графики этих многочленов f и h могут пересечься только на графике многочлена g. Но поскольку каждый из них имеет с g всего по одной общей точке, эти точки совпадают.

Упражнения

3 (Польская олимпиада, 1950). Какому условию должны удовлетворять коэффициенты двух квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ для того, чтобы между корнями каждого из них был заключен корень другого?

4 (Московская олимпиада, 1954). Известно, что модули всех корней уравнений $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ меньше 1. Докажите, что модули всех корней уравнения $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$ тоже меньше 1.

5 (III этап Всероссийской олимпиады, 1988). Найдите соотношения между коэффициентами a, b, c, при которых имеет решение система с одним неизвестным $ax^2 - bx + c = 0$, $bx^2 - cx + a = 0$, $cx^2 - ax + b = 0$.

6 (IV этап Всероссийской олимпиады, 1985). Докажите, что для любых чисел x и y, отличных от нуля, выполняется неравенство $x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$.

Многочлены третьей степени

Для решения следующих задач полезно знать, что коэффициенты p, q и r многочлена

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - px^2 + qx - r$$

определяются условиями

$$p = a + b + c,\ q = ab + ac + bc,\ r = abc$$

(это доказывается раскрытием скобок). Эти формулы называются формулами Виета. Если $a < b < c$, то значения многочлена положительны на интервалах $(a;b)$ и $(c;+\infty)$ и отрицательны на интервалах $(-\infty;a)$ и $(b;c)$. Графики таких многочленов изображены на рисунке 5.

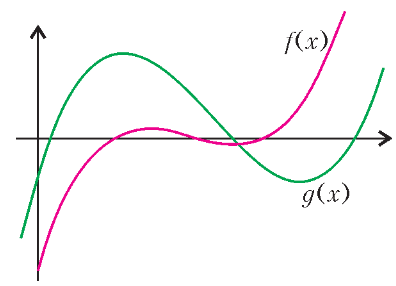


Рис. 5

Задача 5 (М2046). *Докажите, что если числа a, b и c положительны и $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = abc$, то $a = b = c$.*

Решение. Отрицательным может быть не более чем одно из трех чисел $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$. Но их произведение положительно, поэтому все эти числа положительны.

Не ограничивая общности, можно считать, что $a \leq b \leq c$. Тогда $a+b-c \leq a+c-b \leq b+c-a$.

Формулы Виета наводят на мысль рассмотреть многочлены $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ и $g(x) = (x-a-b+c)(x-a-c+b)(x-b-c+a)$. На отрезке $[a+b-c;\ b+c-a]$ лежат все три корня многочлена $f(x)$, поэтому на этом отрезке он меняет знак (см. рис. 5). А поскольку на концах рассматриваемого отрезка многочлен $g(x)$ обращается в ноль, на этом отрезке меняет знак и разность $f(x) - g(x)$. Но тогда эта разность имеет на данном отрезке корень. По условию есть и второй корень $x = 0$.

Но разность многочленов – линейная функция. Значит, она тождественно равна нулю, т.е. многочлены совпадают. В частности, совпадают их множества корней, следовательно, $a = a+b-c$ и $c = b+c-a$, откуда $b = c$ и $a = b$.

Разумеется, приблизительная картинка, каковой является график, не может служить доказательством. Но «построить график» не означает просто «нарисовать картинку». Нужно еще доказать, что некоторые характерные, интересные в данном контексте точки расположены так, а не иначе. Что и было сделано.

Задача 6. *Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a < b < c$, $a \leq x \leq y \leq z \leq c$ и $a+b+c \leq x+y+z$. Докажите, что $abc \leq xyz$ и $ab+bc+ac \leq xy+yz+xz$.*

Решение. Нарисуем графики многочленов $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$ и $g(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$ (рис. 6). Очевидно, что $f(a) = 0$, $g(a) \leq 0$, $f(c) = 0$, $g(c) \geq 0$, поэтому $g(a) - f(a) \leq 0$ и

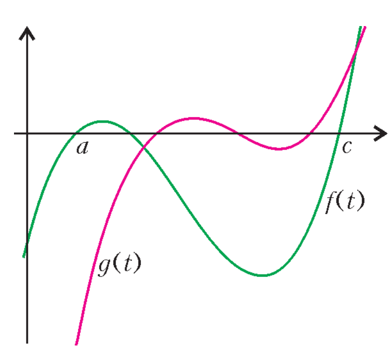


Рис. 6

$g(c)-f(c)\geq 0$. Следовательно, на отрезке $[a;c]$ разность $g(t)-f(t)$ имеет корень.

Если $a+b+c=x+y+z$, то эта разность – линейная функция, и других корней нет. Поэтому $g(0)-f(0)$ и $g(a)-f(a)$ имеют одинаковый знак, т.е. $g(0)-f(0)\leq 0$, что дает первое из доказываемых неравенств. Чтобы получить второе неравенство, нужно заметить, что значения $g(t)-f(t)$ при больших t имеют тот же знак, что и $g(c)-f(c)$, т. е. неотрицательны, а потому коэффициент при t неотрицателен.

Если же $a+b+c<x+y+z$, то график разности $g(t)-f(t)$ – парабола ветвями вниз, а значит, $g(t)-f(t)\to-\infty$ при $t\to+\infty$. Так как $g(c)-f(c)\geq 0$, второй корень этой разности лежит на луче $[c;+\infty)$. Тогда $g(0)-f(0)\leq 0$, что дает первое неравенство $abc\leq xyz$. Поскольку разность $g(t)-f(t)$ имеет два положительных корня, по теореме Виета для квадратного трехчлена коэффициент при t положителен, откуда следует второе неравенство.

У доказанных неравенств много важных частных случаев. При $x=y=z=\dfrac{a+b+c}{3}$ получим неравенство Коши $abc\leq\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ и неравенство $3(ab+bc+ac)\leq(a+b+c)^2$. Если $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{a+c}{2}$, $z=\dfrac{b+c}{2}$, получим неравенство Чезаро $8abc\leq(a+b)(a+c)(b+c)$. И так далее.

Упражнения

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0. \end{cases}$$

8 (Всесоюзная олимпиада, 1970). Докажите, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

9. Рассмотрим многочлен $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, где $a<b<c$ – действительные числа. Пусть p и q – значения этого многочлена в точках локального максимума и локального минимума соответственно. Докажите, что $p+q>0$ тогда и только тогда, когда $b-a>c-b$.

10 (IV этап Всероссийской олимпиады, 1990). Пусть a, b, c – неотрицательные числа, такие что $a+b+c=1$. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$.

11 (III этап Всероссийской олимпиады, 1994). Докажите, что для положительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

12. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a<b<c$, $a\leq x\leq y\leq z\leq c$ и $a+b+c\leq x+y+z$. Докажите, что

Рис. 8

$$(x+y+z)^2 abc\leq(a+b+c)^2 xyz.$$

13 (М840, б). Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^3b+b^3c+c^3a\geq a^2bc+b^2ac+c^2ab.$$

14 (III этап Всероссийской олимпиады, 1993). Докажите, что для любых действительных чисел $a>b>c>0$ выполняется неравенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}<\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$.

15. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c^2}}+\sqrt{\frac{ac}{b^2}}+\sqrt{\frac{bc}{a^2}}\geq\frac{ab}{c^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{bc}{a^2}.$$

16. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a<b<c$, $a\leq x\leq y\leq z\leq c$ и $abc\geq xyz$. Докажите, что

$$a+b+c\geq x+y+z.$$

17. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a<b<c$, $a\leq x\leq y\leq z\leq c$ и $ab+bc+ac\geq xy+yz+xz$. Докажите, что $a+b+c\geq x+y+z$.

18. Докажите, что если a, b и c – длины сторон треугольника, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{a+c-b}}+\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}\geq\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

19 (М7). Пусть a,b,c – стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Неравенства для сторон треугольника

Если числа a, b и c выражают длины сторон треугольника, то для них, разумеется, справедливы все неравенства, верные для любых положительных чисел. Но можно доказать и неравенства иного типа. Приведем пример.

Задача 7 (М1317). *Докажите для любого треугольника ABC неравенство $\dfrac{1}{4}<\dfrac{IA\cdot IB\cdot IC}{l_A\cdot l_B\cdot l_C}\leq\dfrac{8}{27}$, где I – центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C – длины его биссектрис.*

Решение. Проведем биссектрису AL, высоту AH и опустим перпендикуляр IK на сторону BC (рис.7,*а*). Из подобия

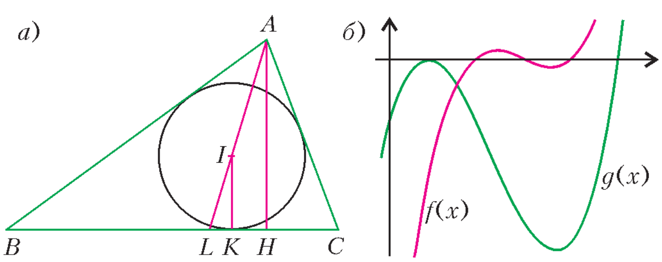


Рис. 7

треугольников LIK и LAH будем иметь $\dfrac{IA}{LA}=\dfrac{AH-IK}{AH}$. Применяя выражения для площади треугольника через высоту и радиус вписанной окружности, получим отсюда $\dfrac{IA}{l_A}=\dfrac{b+c}{a+b+c}$. Аналогично, $\dfrac{IB}{l_B}=\dfrac{a+c}{a+b+c}$ и $\dfrac{IC}{l_C}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$. Поэтому доказываемое неравенство перепишется в виде $\dfrac{1}{4}<\dfrac{(b+c)(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^3}\leq\dfrac{8}{27}$, где, как обычно, a, b и c – длины сторон треугольника.

Правое неравенство – это неравенство Коши для трех чисел $\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b+c}{2}$.

Левое неравенство переписывается в виде

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)(a+b+c)\leq(a+b)(a+c)(b+c).$$

Поэтому естественно рассмотреть многочлены $f(x)=(x-(a+b))(x-(a+c))(x-(b+c))$ и $g(x)=(x-p)^2(x-2p)$, где p – полупериметр треугольника. В силу неравенства треугольника их графики расположены так, как показано на рисунке 7,*б*. Поэтому единственный корень линейной функции $f(x)-g(x)$ лежит на отрезке $[p;2p]$ и значение $f(0)-g(0)$ меньше 0, откуда следует левое неравенство.

Упражнения

20 (III этап Всероссийской олимпиады, 1991). Докажите, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то $\frac{1}{4} < \frac{ab+ac+bc}{(a+b+c)^2} \le \frac{1}{3}$.

21. Пусть a, b, c – стороны треугольника, $u = a + b - c$, $v = a + c - b$, $w = b + c - a$. Докажите неравенство

$$\frac{uvw}{uv+uw+vw} \le \frac{abc}{ab+ac+bc}.$$

Рациональные функции

Задача 8 (Независимый московский университет, 2003). *Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство* $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Решение. Выражение в левой части неравенства заметно упрощается, если в каждый знаменатель добавить недостающую переменную. Поэтому рассмотрим функцию $f(x) = \frac{a+cx}{a+b+cx} + \frac{b+ax}{b+c+ax} + \frac{c+bx}{c+a+bx}$ (числители подобраны так, чтобы при $x = 1$, когда знаменатели одинаковы, получилась двойка, стоящая в правой части неравенства). График этой функции получается «сложением» трех гипербол, соответствующих функциям $f_1(x) = \frac{a+cx}{a+b+cx} = 1 - \frac{b}{a+b+cx}$ и т.д., а потому выглядит так, как на рисунке 8.

Функция $f(x)$ имеет три точки разрыва, лежащие на отрицательной половине оси абсцисс. Эти три точки делят ось абсцисс на два луча и два отрезка. На каждом из этих двух отрезков значения функции непрерывно меняются от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому на каждом из этих отрезков уравнение $f(x) = 2$ имеет корень. Еще один корень $x = 1$ легко угадывается.

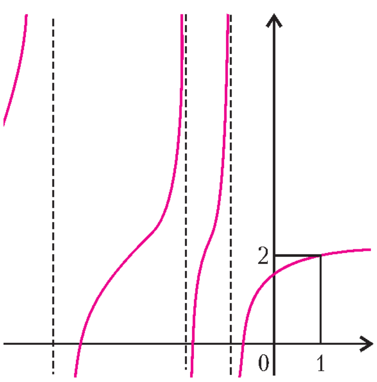


Рис. 8

А других корней нет, потому что после умножения уравнения на общий знаменатель (от чего число корней не может уменьшиться) получится кубическое уравнение, которое не может иметь больше трех корней.

Значит, на интервале от самой правой точки разрыва до 1 значения функции меняются от $-\infty$ до 2, в частности $f(0) < 2$, что и требуется доказать.

Эти рассуждения верны, если все три числа a, b и c различны. Если среди них есть совпадающие, то число отрезков будет меньше, но и степень уравнения, получающегося в результате умножения уравнения $f(x) = 2$ на наименьший общий знаменатель, будет на столько же меньше. Поэтому основной вывод сохраняется.

Задача 9 (М182). *Докажите, что если* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – *положительные числа, то*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n} + \frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}} \ge \frac{n}{n-1}.$$

Решение. Пусть $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Построим графики функций $f(x) = \frac{a_1}{Ax-a_1} + \frac{a_2}{Ax-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{Ax-a_n}$ и $g(x) = \frac{A}{Ax - \frac{1}{n}A}$ (рис. 9).

Все точки разрыва функции $f(x)$ лежат на интервале (0; 1). Они вырезают на оси абсцисс $n - 1$ отрезок, на каждом из которых значения функции меняются от $-\infty$ до $+\infty$. На всех этих отрезках, кроме одного, функция $g(x)$ непрерывна. Значит, на этих $n - 2$ отрезках имеется по одному корню уравнения $f(x) = g(x)$. Кроме того, $f(0) = g(0) = n$. (Выбор функции f выглядит достаточно естественно, а функция g подбиралась так, чтобы выполнялось последнее равенство и, кроме того, при $x = 1$ ее значение равнялось правой части неравенства.)

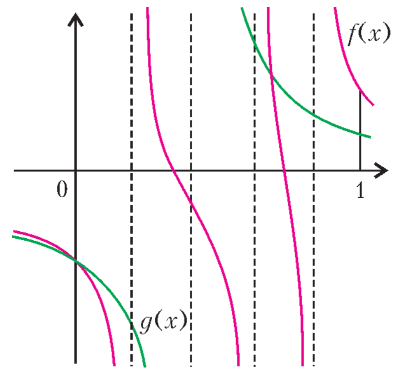


Рис. 9

После умножения уравнения $f(x) = g(x)$ на общий знаменатель, члены, содержащие x^n, сократятся, и получится уравнение степени $n - 1$, которое не может иметь более $n - 1$ корней. Поэтому других корней у уравнения $f(x) = g(x)$ нет.

Следовательно, разность $f(x) - g(x)$ сохраняет знак справа от последней точки разрыва функции $f(x)$. А поскольку в правой полуокрестности этой точки она положительна, она будет положительной и при $x = 1$. Отсюда немедленно следует нужное неравенство.

Упражнения

22 (III этап Всероссийской олимпиады, 1982). Пусть числа x и y таковы, что $x \ne y$ и $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy}$. Докажите, что $xy = 1$.

23 (III этап Всероссийской олимпиады, 1993). Пусть $x \le 1$, $y \le 1$, $z \le 1$, $x + y + z = 0$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{2-x} + \frac{y}{2-y} + \frac{z}{2-z} \ge 0.$$

24 (IV этап Всероссийской олимпиады, 1988). Пусть $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ и $a + b + c \le 3$. Докажите неравенства

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \le \frac{3}{2} \le \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

25. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + \ldots + a_n = 1$, и положительного числа x справедливо неравенство $\frac{a_1}{1+xa_1} + \ldots + \frac{a_n}{1+xa_n} \le \frac{n}{n+x}$.

26. Пусть $0 \le a_1, \ldots, a_n < 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{1-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{1-a_n} \ge \frac{n(a_1+\ldots+a_n)}{n-(a_1+\ldots+a_n)}.$$

27 (Ленинградская олимпиада, 1993). Докажите, что для любых положительных чисел a_k, b_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) выполнено неравенство $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \le \frac{AB}{A+B}$, где $A = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

28 (Ленинградская олимпиада, 1990). Числа a, b и c лежат на отрезке [0;1]. Докажите, что $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \le 2$.

Каустики на плоскости и в пространстве

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

Каустики – это вездесущие оптические поверхности и кривые, возникающие при отражении и преломлении света. Каустики можно описать как линии или поверхности, вдоль которых концентрируются световые лучи.

Каустики на плоскости (2D каустики)

Сначала посмотрим, что происходит, когда все световые лучи и кривая, от которой они отражаются, лежат в одной плоскости. Самый важный пример – это отражение параллельных лучей от окружности. Возникающая здесь каустика – яркая линия с острием, расположенным между вершиной и центром зеркала (рис.1).

Рис.1. Каустика при отражении от окружности

Если мы имеем дело с параболой, то все лучи, параллельные ее оси, после отражения собираются в одной точке – фокусе параболы. Для окружности и для других зеркал это не так, отраженные лучи не сходятся в одной точке. Но когда на зеркало падает узкий пучок параллельных лучей, то после отражения он становится сходящимся. Иными словами, отраженный пучок целиком не сходится в одной точке, но узкие пучки, состоящие из близких лучей, будут сходящимися. Точки, в которых они сходятся, это точки концентрации энергии, именно из них и состоит каустика. Эти соображения позволят нам нарисовать каустику.

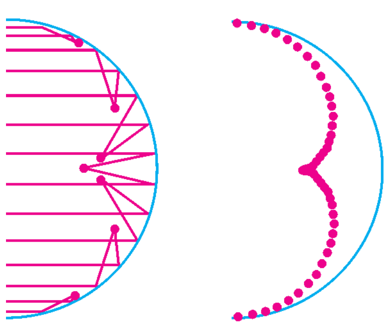


Рис.2. Слева на зеркало запущены 14 лучей, справа – 102 луча, и отмечены точки их попарного пересечения

Запустим на круглое зеркало большое количество параллельных лучей. Разобьем их на пары и отметим точки пересечения лучей в каждой паре после отражения (рис.2). Если число лучей увеличивать, то расстояния между точками попарного пересечения будут уменьшаться. Точки будут располагаться все ближе друг к другу и в пределе заполнят каустическую кривую.

Это один способ понять, как устроена каустика. Другой способ увидеть каустику – это нарисовать много лучей. На полученном таким образом рисунке каустика выделяется как кривая, которой касаются все отраженные лучи (рис.3). Это просто другое проявление той же самой концентрации световой энергии – каждый световой луч касается каустики, значит, проходит вдоль нее значительную часть своего пути и «отдает» ей большую часть своей энергии. Линия, которая касается каждой прямой из некоторого семейства прямых, является огибающей этого семейства. Так что каустика – это огибающая световых лучей. Можно сказать, что каустика представляет собой остов, на который нанизаны все световые лучи.

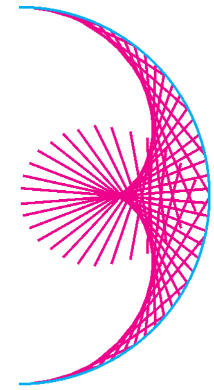


Рис.3. Каждый из отраженных лучей касается каустики

Как самим можно нарисовать предыдущие картинки?

Достроим зеркало до полной окружности (рис.4). Тогда из того, что «угол падения равен углу отражения», следует, что

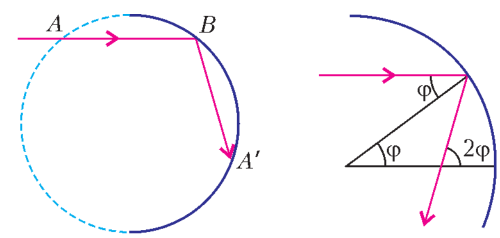


Рис.4. Хорды AB и BA' равны, отраженный луч направлен вдоль вектора $(-\cos\varphi, \sin2\varphi)$

хорды AB и BA', высекаемые падающим и отраженным лучами, равны между собой. Так что нужно с помощью циркуля нарисовать окружность с центром в точке B и радиусом AB и отметить ее пересечение с зеркалом – точку A', а потом по линейке провести отраженный луч BA'. Если для рисования используется компьютер, то тут нужно знать, что горизонтальный (идущий параллельно оси абсцисс) световой луч, отраженный в точке единичной окружности $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ с угловой координатой φ, направлен вдоль вектора $(-\cos 2\varphi, -\sin 2\varphi)$. Это позволяет нарисовать все отраженные лучи. А если мы еще хотим добраться от окружности до каустики, то расстояние, которое нужно пройти вдоль этого вектора, равно $(\cos\varphi)/2$. Таким образом, точки, лежащие на каустике, будут иметь координаты

$$\left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi}{2}\cos 2\varphi,\ \sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{2}\sin 2\varphi\right).$$

Это хорошо известная кривая (ее описывает фиксированная точка окружности, катящейся снаружи по большей в два раза окружности), она имеет собственное имя – нефроида.

Каустики в пространстве (3D каустики)

Все гораздо сложнее и гораздо интереснее в трехмерном пространстве. Там на каждом отраженном луче есть две точки концентрации энергии. В этом смысле можно сказать, что каустическая поверхность в пространстве состоит из двух листов.

В качестве примера возьмем отражающую поверхность вида

$$z = x^2 + 2y^2$$

и осветим ее сверху пучком, идущим параллельно оси z. Если ограничиться плоскостью $y = 0$, то мы имеем отражение от параболы $z = x^2$, а в плоскости $x = 0$ отражение идет от параболы $z = 2y^2$. Это разные параболы, и лучи от них сфокусируются на разных высотах, в разных точках оси z. Одна из точек будет лежать на одном листе каустической поверхности, другая – на другом.

В последние годы в Интернете появились фотографии ярких четырехугольных звезд на стенах домов (рис.5). Это

Рис.5. Отражение от пластиковых окон

результат отражения солнечного света от пластиковых окон из расположенных напротив домов. В пластиковых окнах промежуток между стеклами герметизируется, и оттуда частично выкачивается воздух. За счет перепада давления стекла деформируются внутрь стеклопакета и приобретают вид, представленный на рисунке 6 (изображение сильно растянуто вдоль вертикальной оси). Такую поверхность можно хорошо приблизить графиком функции

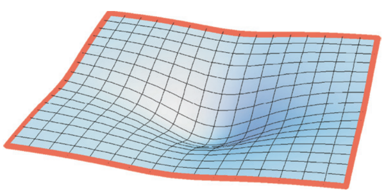


Рис.6. За счет перепада давления стекла прогибаются внутрь

$$z = -\frac{k}{\left(1 + mx^2\right)\left(1 + my^2\right)},$$

подобрав соответствующие постоянные k и m.

Если ограниченный кусок такой поверхности – «окно» – осветить падающим сверху пучком параллельный лучей, а на пути отраженных лучей поставить экран, то при небольшом удалении от окна мы увидим на экране картину, основным фрагментом которой служит восьмиугольная звезда (рис. 7,*а*). При большем удалении экрана мы увидим на нем

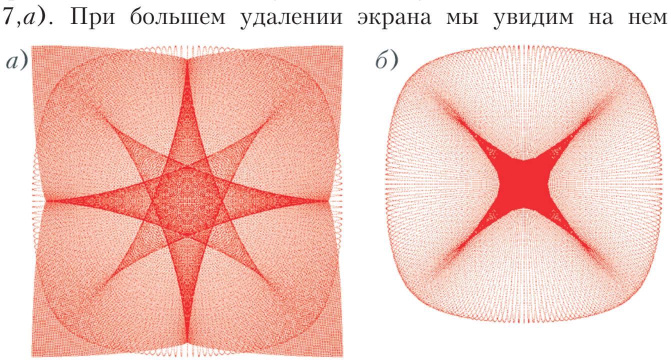


Рис.7. Изображение на экране – стене дома – при малом удалении (а) и при большем удалении (б)

четырехугольную звезду на фоне менее яркого овала (рис.7,*б*), что соответствует реальным фотографиям. Четыре отсутствующих по сравнению с левым рисунком луча оказались отрезанными от звезды из-за того, что мы рассматриваем отражение только от ограниченного куска поверхности – от квадратного окна.

Теперь нарисуем саму каустическую поверхность, соответствующую этой оптической картине. Она на самом деле состоит из двух листов. На рисунке 8 цветом закодировано

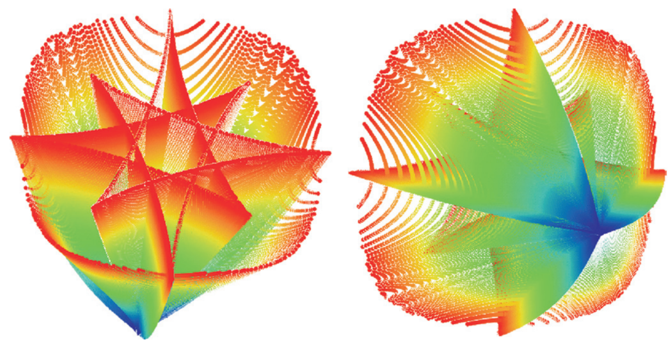


Рис.8. Два вида на каустическую поверхность

удаление точек каустики от отражающей поверхности: синие точки находятся ближе к ней, красные – дальше от нее. Сечение одного из листов каустики – восьмиугольная звезда, сечение другого – граница окружающего звезду овала.

Каустики могут образовываться не только при отражении, но и при преломлении света, скажем на поверхности воды. На фотографиях, воспроизведенных на рисунке 9, солнечные лучи преломляются либо на воздушном пузырьке, либо на мениске, возникающем из-за поверхностного натяжения на иголке, погруженной в воду. И тут и там на дне мы видим небольшую четырехугольную звезду.

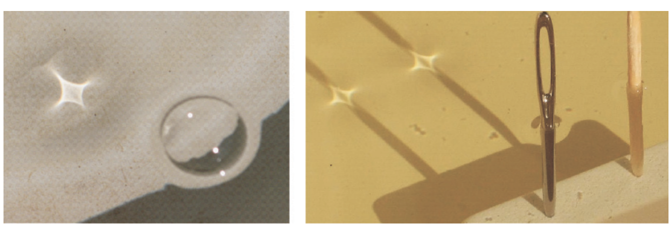


Рис.9. Каустики, возникающие при преломлении света, самый яркий элемент – четырехугольная звезда

Смоделируем это явление, задав преломляющую поверхность (рис.10) уравнением

$$z = e^{-k\left(x^2+y^2\right)}.$$

Зафиксируем постоянную k и угол падения солнечных лучей α и вспомним, что для воды показатель преломления $n = 1{,}33$. С помощью закона преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$ можно рассчитать направление преломленных лучей – угол β – и, значит, построить картину, которую формируют лучи на экране, расположенном под поверхностью воды – на дне сосуда. Отчетливо видна та же самая асимметричная четырехугольная звезда (рис. 11), что и на фотографии (см. рис.9).

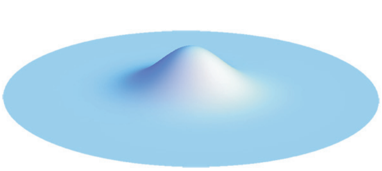


Рис.10. Вздутие на поверхности воды, имитирующее пузырек или мениск

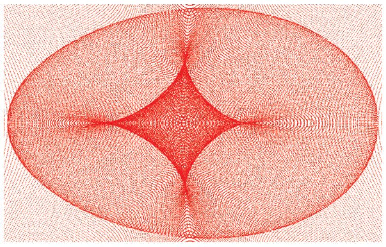


Рис.11. Изображение на экране – на дне сосуда

А вот и соответствующая каустическая поверхность для преломленных лучей (рис.12). Синие точки расположены ближе к поверхности воды, красные более удалены от нее. Сечение внутренней поверхности – четырехугольная звезда, а внешней – граница овала, содержащего эту звезду.

В заключение – наши рекомендации для дальнейшего чтения.

1. Об оптических свойствах параболы и других кривых можно прочитать в книге А.Г.Дорфмана «Оптика конических сечений» (Популярные лекции по математике, выпуск 31. – М.: Физматлит, 1950).

2. Как записать уравнение огибающей, можно узнать в книге В.Г.Болтянского «Огибающая» (Популярные лекции по математике, выпуск 36. – М.: Физматлит, 1961).

3. Наконец, об особенностях устройства каустических кривых и каустических поверхностей вы можете прочитать в книге В.И.Арнольда «Теория катастроф» (М.: Наука, 1990).

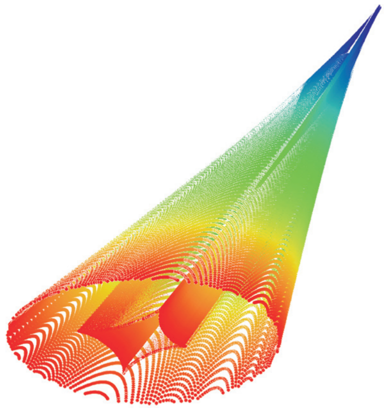


Рис.12. Каустическая поверхность, образующаяся при преломлении на воздушном пузырьке

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Неравенство Коши в задачах по физике

В.ГРЕБЕНЬ

Из школьного курса математики известно такое неравенство:

$$a+b \ge 2\sqrt{ab}\ , \text{ или } \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

– среднее арифметическое двух неотрицательных чисел a и b не меньше, чем их среднее геометрическое, причем равенство достигается при $a=b$. Это неравенство называют неравенством Коши. Полезно знать некоторые следствия из него. Во-первых, произведение двух неотрицательных переменных, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение тогда, когда эти переменные равны друг другу. Во-вторых, аналогично, наименьшее значение суммы двух неотрицательных переменных, произведение которых постоянно, достигается при равенстве переменных.

Рассмотрим применение неравенства Коши при решении конкретных задач по физике.

Задача 1. *С какой минимальной начальной скоростью $v_{0\min}$ следует бросить под углом α к горизонту камень, чтобы он достиг высоты h? Чему равно время подъема камня t до этой высоты?*

Решение. Совместим начало отсчета вертикальной оси OY с точкой бросания. Тогда уравнение движения камня по вертикали примет вид

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\,.$$

В момент, когда камень находится на указанной высоте, $y=h$. Выразим из уравнения движения начальную скорость v_0 и применим неравенство Коши:

$$v_0 = \frac{gt}{2\sin\alpha} + \frac{h}{t\sin\alpha} \ge 2\sqrt{\frac{gt}{2\sin\alpha}\frac{h}{t\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha}\,.$$

Отсюда находим минимальную начальную скорость камня:

$$v_{0\min} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha}\,,$$

причем минимум достигается при условии

$$\frac{gt}{2\sin\alpha} = \frac{h}{t\sin\alpha}\,.$$

Из этого условия можно узнать время подъема камня на высоту h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Задача 2. *Конькобежец проходит дистанцию $l = 500$ м с постоянной скоростью v, а затем тормозит с ускорением $a = 0{,}05$ м/с^2. При какой скорости v время движения конькобежца до остановки наименьшее?*

Решение. Время движения, очевидно, состоит из двух слагаемых: времени движения с постоянной скоростью и времени равнозамедленного движения до полной остановки:

$$t = \frac{l}{v} + \frac{v}{a} \ge 2\sqrt{\frac{l}{v}\frac{v}{a}} = 2\sqrt{\frac{l}{a}}\,.$$

Понятно, что наименьшее время движения

$$t_{\min} = 2\sqrt{\frac{l}{a}} = 200 \text{ с} \approx 3{,}3 \text{ мин}$$

достигается при равенстве слагаемых, т.е. при

$$v = \sqrt{la} = 5 \text{ м/с}\,.$$

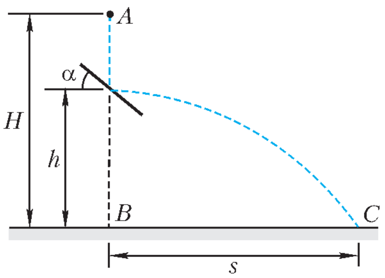


Рис. 1

Задача 3. *Небольшой шарик свободно падает из точки A на массивную плиту, ориентированную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту (рис.1). После упругого отражения от плиты шарик падает на поверхность земли в точке C на расстоянии s от вертикальной прямой AB. На какой высоте h необходимо расположить плиту (не меняя ее ориентации), чтобы расстояние s было максимальным, если AB = H? Чему равно s? Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Решение. Исходя из закона сохранения энергии, определим скорость шарика перед ударом о плиту:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H-h),\quad v = \sqrt{2g(H-h)}\,.$$

После удара скорость шарика по модулю останется неизменной, но направление изменится на горизонтальное. По горизонтали шарик пролетит расстояние $s = vt$, где t – время падения шарика на землю после удара, а по вертикали – $h = \frac{gt^2}{2}$. Тогда

$$s = \sqrt{2g(H-h)}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)} \le h + (H-h) = H = \text{const}\,.$$

Если сумма слагаемых постоянна, то среднее геометрическое достигает максимума при равенстве множителей:

$$h = H - h,\quad \text{откуда}\quad h = \frac{H}{2}\,.$$

Задача 4. *Даны n гальванических элементов (рис.2) с электродвижущей силой каждого $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Все элементы соединены в k групп по*

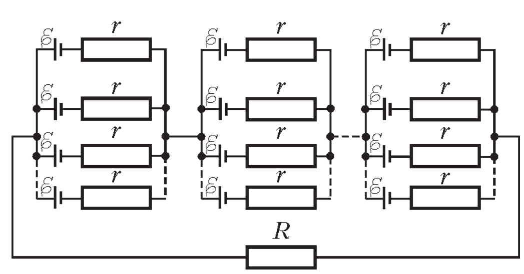


Рис. 2

n/k элементов в группе, причем в каждой группе элементы соединены параллельно, а группы между собой – последовательно. Чему должно быть равно k, чтобы получить максимальную силу тока во внешнем сопротивлении R?

Решение. Зная, что при параллельном соединении одинаковых элементов электродвижущая сила не изменяется, а внутреннее сопротивление уменьшается пропорционально числу элементов, найдем, что каждую группу можно заменить одним элементом с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением kr/n. Далее, приняв во внимание, что при последовательном соединении электродвижущая сила и внутреннее сопротивление возрастают пропорционально числу элементов, получим, что в цепи электродвижущая сила будет $k\mathcal{E}$, а внутреннее сопротивление k^2r/n. Согласно закону Ома для полной цепи, ток в цепи равен

$$I = \frac{k\mathcal{E}}{(k^2r/n) + R} = \frac{\mathcal{E}nk}{rk^2 + nR}\,.$$

Очевидно, что наибольшая сила тока будет при таком значении k, при котором дробь $\dfrac{1}{kr + \dfrac{nR}{k}}$ принимает наибольшее значение, а для этого знаменатель дроби должен быть минимальным. Исходя из неравенства Коши, должно выполняться равенство

$$kr = \frac{nR}{k}\,,\ \text{откуда}\ k = \sqrt{\frac{nR}{r}}\,.$$

При этом

$$I_{\max} = \frac{n\mathcal{E}}{2\sqrt{rnR}} = \frac{\mathcal{E}}{2}\sqrt{\frac{n}{rR}}\,.$$

Интересно, а чему равно в этом случае внутреннее сопротивление батареи? Оно, как мы видели, есть

$$r_{\text{бат}} = \frac{rk^2}{n} = r\frac{nR}{nr} = R\,.$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу: ток батареи оказывается максимальным тогда, когда ее внутреннее сопротивление равно внешнему.

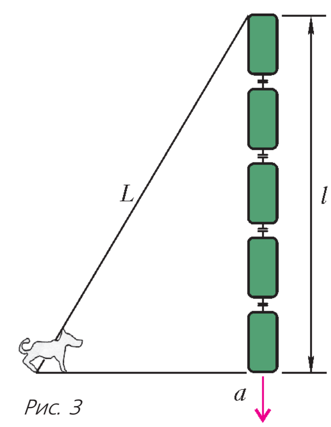


Рис. 3

Задача 5 (XLI Всероссийская олимпиада школьников по физике). *Пассажирский поезд длиной l стоял на первом пути. В последнем вагоне сидел Дядя Федор (герой книги Э. Успенского «Каникулы в Простоквашино») и ожидал письмо, которое ему должен был передать Шарик от кота Матроскина. В тот момент, когда поезд тронулся, на привокзальной площади как раз напротив первого вагона появился Шарик (рис.3). Он определил, что расстояние до последнего вагона равно L. С какой минимальной скоростью v_0 должен бежать пес, чтобы передать письмо, если поезд движется с постоянным ускорением a?*

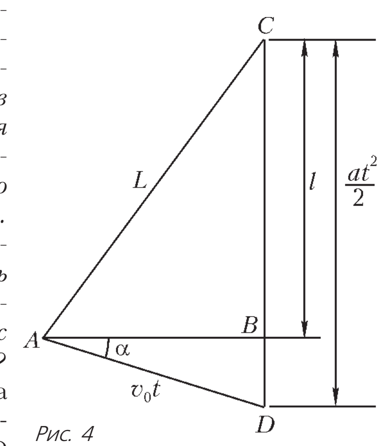


Рис. 4

Решение. Пусть встреча Шарика с последним вагоном произошла в точке D (рис.4). Треугольники ABC и ABD – прямоугольные. Тогда, используя теорему Пифагора, можно записать

$$AB^2 = AC^2 - CB^2 = AD^2 - DB^2\,,$$

или

$$L^2 - l^2 = v_0^2t^2 - \left(\frac{at^2}{2} - l\right)^2.$$

Отсюда выразим квадрат начальной скорости:

$$v_0^2 = \frac{L^2}{t^2} + \frac{a^2t^2}{4} - al\,.$$

Для того чтобы скорость v_0 была минимальной, необходимо, чтобы сумма $\frac{L^2}{t^2}+\frac{a^2t^2}{4}$ принимала минимальное значение. Используем неравенство Коши:

$$\frac{L^2}{t^2}+\frac{a^2t^2}{4}\ge 2\sqrt{\frac{L^2}{t^2}\frac{a^2t^2}{4}}=La$$

и получаем

$$v_0=\sqrt{a(L-l)}\,.$$

Обратим внимание на то, что минимальная скорость достигается при условии

$$\frac{L^2}{t^2}=\frac{a^2t^2}{4}\,,\ \text{или}\ L=\frac{at^2}{2}\,.$$

Значит, $DC=CA=L$, т.е. треугольник ACD – равнобедренный, и

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BD}{AB}=\frac{L-l}{\sqrt{L^2-l^2}}\,.$$

Получили, что Шарику следует бежать под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{L-l}{\sqrt{L^2-l^2}}$ к AB со скоростью $v_0=\sqrt{a(L-l)}$.

Задача 6. *Определите, при каком минимальном коэффициенте трения μ однородного тонкого стержня о пол человек может медленно без проскальзывания поднять его с пола до вертикального положения, прилагая к концу стержня силу, перпендикулярную ему.*

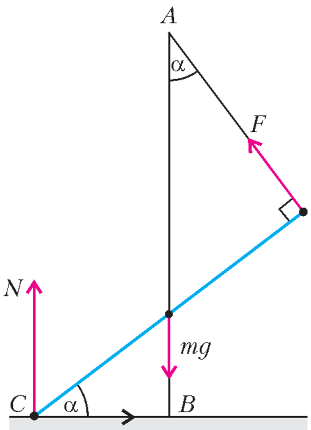


Рис. 5

Решение. Найдем зависимость минимального значения коэффициента трения $\mu=\frac{F_{тр}}{N}$, где N – вертикальная сила реакции пола, при котором не будет проскальзывания, от угла подъема стержня α (рис.5).

В качестве оси вращения возьмем точку A пересечения линий, вдоль которых действуют силы $\vec F$ и $m\vec g$. Относительно точки A моменты приложенной силы $\vec F$ и силы тяжести $m\vec g$ равны нулю, поскольку плечи этих сил равны нулю. Определим плечо силы трения $F_{тр}$, т.е. длину отрезка AB. Пусть длина стержня l, тогда

$$AB=\frac{l}{2}\sin\alpha+\frac{l/2}{\sin\alpha}=\frac{l}{2}\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

Плечо силы реакции $\vec N$ – это отрезок CB:

$$CB=\frac{l}{2}\cos\alpha\,.$$

Запишем условие равновесия стержня относительно выбранной точки A:

$$N\frac{l}{2}\cos\alpha=F_{тр}\frac{l}{2}\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

Отсюда получим

$$\mu=\frac{F_{тр}}{N}=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha+1}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha+1}=\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}\,.$$

Дробь принимает максимальное значение, когда знаменатель минимален. Воспользуемся неравенством Коши:

$$2\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\ge 2\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=2\sqrt2\,.$$

Таким образом,

$$\mu\le\frac{1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{4}\approx 0{,}35\,.$$

В ходе подъема трубы μ не превосходит 0,35. Максимальное значение μ требуется при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt2}{2}$, т.е. при $\alpha\approx 35{,}26°$.

Задача 7. *Каков максимальный угол θ упругого рассеяния α-частицы на дейтроне? Дейтрон – ядро изотопа водорода дейтерия, состоит из протона и нейтрона, α-частица – ядро гелия, состоит из двух протонов и двух нейтронов. Считайте, что масса дейтрона в два раза меньше массы α-частицы.*

Решение. Пусть m_1 и m_2 – массы α-частицы и дейтрона соответственно, v_0 и v_1 – скорости α-частицы до и после столкновения, v_2 – скорость дейтрона после столкновения, δ и φ – углы отклонения α-частицы и дейтрона от направления движения α-частицы до столкновения (рис.6). Запишем закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

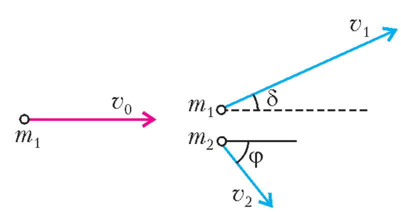


Рис. 6

$$m_1v_0=m_1v_1\cos\delta+m_2v_2\cos\varphi\,,\quad m_1v_1\sin\delta=m_2v_2\sin\varphi\,,$$

или, поскольку $m_1=2m_2$,

$$2v_0=2v_1\cos\delta+v_2\cos\varphi\,,\quad 2v_1\sin\delta=v_2\sin\varphi\,.$$

Избавимся от угла φ. Для этого из первого равенства выразим $v_2\cos\varphi$ и возведем в квадрат, после чего сложим с квадратом второго равенства:

$$4\left(v_0-v_1\cos\delta\right)^2=v_2^2\cos^2\varphi\,,\quad 4v_1^2\sin^2\delta=v_2^2\sin^2\varphi\,,$$

откуда

$$4v_1^2\sin^2\delta+4v_0^2-8v_0v_1\cos\delta+4v_1^2\cos^2\delta=v_2^2\,,$$

или

$$4v_1^2+4v_0^2-8v_0v_1\cos\delta=v_2^2\,.$$

Теперь применим закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1v_0^2}{2}=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\,,\ \text{или}\ 2v_0^2=2v_1^2+v_2^2\,.$$

Отсюда и из последнего выражения закона сохранения импульса после упрощения получим

$$3v_1^2-4v_0v_1\cos\delta+v_0^2=0\,,$$

откуда найдем

$$\cos\delta = \frac{3v_1^2 + v_0^2}{4v_0v_1} = \frac{1}{4}\left(\frac{3v_1}{v_0} + \frac{v_0}{v_1}\right).$$

Применим неравенство Коши:

$$\cos\delta = \frac{1}{4}\left(\frac{3v_1}{v_0} + \frac{v_0}{v_1}\right) \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3v_1}{v_0}\frac{v_0}{v_1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как функция $\cos\delta$ на промежутке $[0;\pi]$ убывающая, для максимального угла рассеяния получим

$$\theta = \delta_{\max} = \frac{\pi}{6}.$$

Задача 8. *В широкий сосуд с жидкостью частично погружается плоский конденсатор. Конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора постоянную разность потенциалов U. Расстояние между пластинами d, плотность жидкости ρ, ее диэлектрическая проницаемость ε. На какую высоту h поднимается жидкость в конденсаторе?*

Решение. Обозначим высоту пластин через a, а размер пластин в направлении, перпендикулярном рисунку 7, через b. Рассмотрим полную энергию системы в зависимости от высоты h жидкости в конденсаторе. Очевидно, что при некотором значении h энергия системы будет минимальной. Это и будет установившаяся высота подъема жидкости.

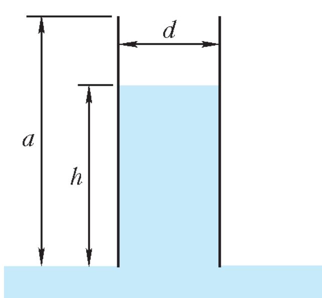


Рис. 7

Наша система состоит из источника тока, конденсатора и жидкости в гравитационном поле Земли. Энергию, запасенную в батарее, можно записать в виде

$$W_1 = W_0 - CU^2,$$

где W_0 – первоначальный запас энергии батареи, а CU^2 – это энергия, которую израсходовала батарея, заряжая конденсатор до напряжения U. Прежде чем находить энергию конденсатора W_2, определим его емкость при подъеме жидкости на высоту h. Мы имеем систему двух параллельно соединенных конденсаторов, поэтому общая емкость равна их сумме:

$$C = \frac{\varepsilon_0(a-h)b}{d} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 bh}{d} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}\left(a + h(\varepsilon - 1)\right).$$

Тогда

$$W_2 = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 bU^2}{2d}\left(a + h(\varepsilon - 1)\right).$$

Так как сосуд достаточно широкий, после втягивания части жидкости в конденсатор уровень жидкости в самом сосуде не изменился заметным образом. Центр масс жидкости между обкладками находится на высоте $\frac{h}{2}$, если за нулевой уровень принять поверхность жидкости в сосуде. Потенциальная энергия поднятой жидкости составляет

$$W_3 = \frac{\rho gdbh^2}{2}.$$

Таким образом, полная энергия нашей системы равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = W_0 - W_2 + W_3 =$$
$$= W_0 - \frac{\varepsilon_0 baU^2}{2d} - \frac{\rho gbd}{2}h\left(\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{\rho gd^2} - h\right).$$

Так как нас интересует минимум энергии, то выражение $h\left(\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{\rho gd^2} - h\right)$ должно принимать максимальное значение. Произведение двух чисел, сумма которых неизменна:

$$h + \left(\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{\rho gd^2} - h\right) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{\rho gd^2}$$

принимает максимальное значение в случае их равенства:

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{\rho gd^2} - h.$$

Откуда находим искомую высоту жидкости в конденсаторе:

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{2\rho gd^2}.$$

Упражнения

1. С какой минимальной по модулю скоростью $v_{\min}$ нужно бросить с горизонтальной поверхности земли камень, чтобы он упал на землю на расстоянии l = 40 м от точки бросания? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Два железнодорожных пути сходятся в городе под углом $\alpha = 60°$ (рис.8). Со станции, находящейся на первом пути на расстоянии $l_1 = 32$ км от города, вышел по направлению к нему поезд A. В то же время со станции, находящейся на втором пути на расстоянии $l_2 = 50$ км от города, вышел другой поезд B по направлению к тому же городу, но со скоростью, вдвое большей скорости первого поезда. Найдите, где будет поезд B во время наименьшего расстояния между ним и поездом A, и определите это расстояние.

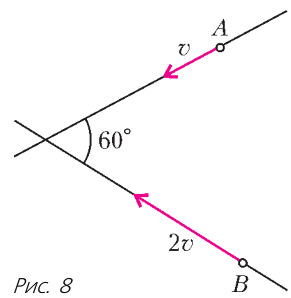


Рис. 8

3. Шайба, скользившая по гладкому полу со скоростью $v_0 = 12$ м/с, поднимается на закрепленный трамплин, верхняя часть которого горизонтальна, и соскальзывает с него (рис.9). При какой высоте трамплина h дальность полета шайбы s будет максимальной? Какова эта дальность? Потерями механической энергии шайбы при движении по трамплину пренебречь. До окончания трамплина шайба движется не отрываясь от его поверхности.

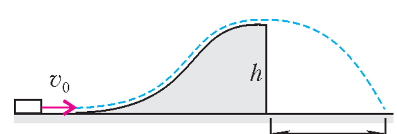


Рис. 9

4. Под каким углом α к горизонту нужно бросить с горизонтальной поверхности земли камень, чтобы он при движении все время удалялся от точки бросания? Сопротивление воздуха не учитывать.

5. Каким должен быть наименьший угол наклона крыши дома α, чтобы дождевая вода с нее стекала как можно быстрее, если коэффициент трения равен μ?

6. Поезд начинает двигаться с постоянным ускорением a вдоль прямолинейного участка пути. На расстоянии l от последнего вагона на перпендикуляре к направлению движения поезда находится пассажир. С какой минимальной скоростью может бежать пассажир, чтобы догнать поезд? В каком направлении он должен бежать в этом случае? Движение пассажира считать равномерным.