ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2176» или «Ф2183». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2178 и М2179 предлагались на II Математической олимпиаде имени Леонарда Эйлера, задачи М2182 и М2183 – на международной олимпиаде «Romanian Master in Mathematics».

Задачи Ф2183 и Ф2187 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года, задачи Ф2184, Ф2186 и Ф2188 – на заключительном этапе XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи М2176–М2183, Ф2183–Ф2189

М2176. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N. Докажите, что медианы треугольников ABM, ADN и CMN, проведенные соответственно из вершин B, D и C, пересекаются в одной точке.

Д.Храмцов

М2177. Существует ли такой угол α, что для любого натурального n число $\cos n\alpha$ – рационально, а число $\sin n\alpha$ – иррационально?

В.Сендеров

М2178. В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причем если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами А и Б, то самолеты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолеты всех трех компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трех компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.

С.Берлов

М2179. В вершинах куба расставили числа $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$ (в каждую из вершин – по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

Д.Фон-Дер-Флаасс

М2180. Многочлен x^{2010} разделили на многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ с остатком. В качестве неполного частного был получен многочлен $P(x)$. Докажите, что коэффициенты многочлена $P(x)$ положительны.

И.Богданов

М2181*. Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Известно, что каждое из чисел 1, 2, 3, …, $2n!$ принадлежит хотя бы одной из прогрессий. Докажите, что каждое целое число принадлежит хотя бы одной из данных прогрессий. Насколько можно уменьшить число $2n!$, чтобы утверждение осталось верным?

Фольклор

М2182. Дан выпуклый четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждого i = 1, 2, 3, 4 рассмотрим окружность ω_i, лежащую вне четырехугольника, касающуюся прямых $A_{i-1}A_i$, $A_{i+1}A_{i+2}$ и касающуюся отрезка A_iA_{i+1} в точке T_i (индексы рассматриваются по модулю 4, так что $A_0 = A_4$, $A_5 = A_1$ и $A_6 = A_2$; рис.1). Докажите, что прямые A_1A_2, A_3A_4 и T_2T_4 пересекаются в одной точке тогда и толь-

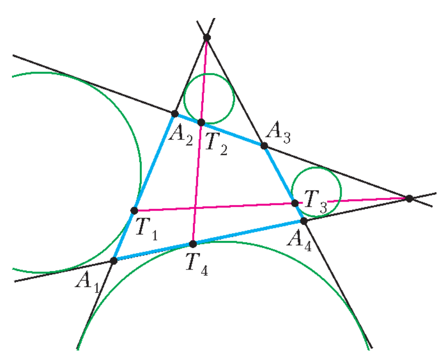


Рис. 1

ко тогда, когда прямые A_2A_3, A_4A_1 и T_1T_3 пересекаются в одной точке.

П.Кожевников

М2183. Дано натуральное число n. Назовем множество K, состоящее из точек плоскости с целыми координатами, *связным*, если для любых двух точек $R, S \in K$ существуют натуральное число l и последовательность точек $R = T_0, T_1, \ldots, T_l = S$, принадлежащих K, такая, что длина любого отрезка вида T_iT_{i+1} равна 1. Для связного множества K обозначим через $\delta(K)$ количество попарно неравных векторов в множестве $\Delta K = \left\{\overrightarrow{RS} \middle| R, S \in K\right\}$. Найдите максимальное возможное значение $\delta(K)$, если K пробегает все связные множества из $2n+1$ точек плоскости с целыми координатами.

Г.Челноков

Ф2183. На горизонтальном столе лежит на боку однородный конус массой m с радиусом основания R и углом при вершине 2α. Для того чтобы медленно поставить конус на вершину в положение, при котором его ось вертикальна, нужно совершить работу A. Какую минимальную работу нужно совершить для того, чтобы из исходного положения поставить конус на основание?

А.Якута

Ф2184. Однородная цепочка закреплена одним концом на вершине гладкой сферической поверхности радиусом R, длина цепочки $L = \pi R/3$ (рис.2). Верхний конец цепочки освобождают. С каким ускорением (по модулю) будет двигаться сразу после освобождения каждый элемент цепочки? В каком месте цепочки сила натяжения сразу после освобождения будет максимальной?

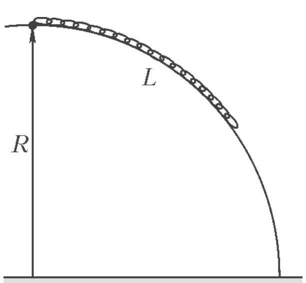


Рис. 2

В.Плис

Ф2185. В длинном теплоизолированном цилиндрическом сосуде находится некоторое количество криптона (одноатомный газ, его молярная масса M = 84 г/моль) при температуре T = 200 К и давлении p = 0,1 Па. Объем сосуда уменьшают на 1%, быстро сдвигая поршень. Скорость движения поршня v = 1000 м/с. Оцените температуру газа после остановки поршня и установления давления в сосуде.

А.Повторов

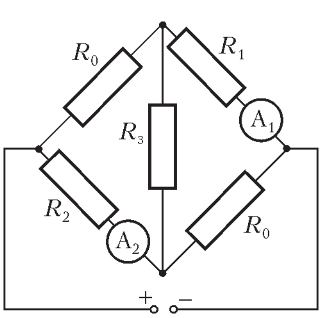


Рис. 3

Ф2186. Электрическая цепь состоит из пяти резисторов и двух идеальных амперметров (рис.3). Сопротивления резисторов R_0, R_1 и R_2 заданы, а сопротивление R_3 неизвестно. Найдите показание амперметра A_2, если известна сила тока I_1, протекающего через амперметр A_1.

В.Слободянин

Ф2187. Тонкое кольцо радиусом R заряжено зарядом Q, равномерно распределенным по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная непроводящая нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда γ. Найдите модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.

П.Поляков

Ф2188. В свободном пространстве на окружности радиусом R_0 в вершинах вписанного квадрата расположены четыре точечные массы m, две из них несут заряд $+q$, а две другие – заряд $-q$ (рис.4). В начальный момент этим материальным точкам сообщают одинаковые по модулю скорости, направленные по касательным к окружности по часовой стрелке. Известно, что достигаемое в процессе движения минимальное расстояние от любой из точечных масс до центра O начальной окружности равно R_1 ($R_1 < R_0$). Считайте, что в любой момент времени заряды находятся в вершинах квадрата с центром в точке O. Действием гравитационных сил можно пренебречь. По какой траектории движется каждая из частиц? Определите время движения частицы из начального положения до положения с расстоянием R_1 от центра окружности.

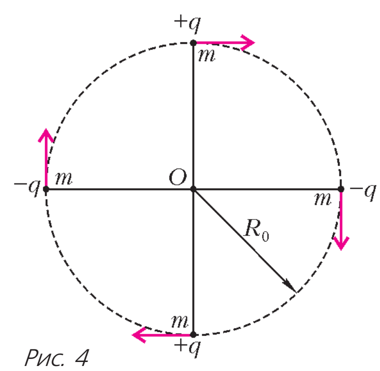


Рис. 4

Х.Матвеев, М.Проскурин

Ф2189. К звуковому генератору (ЗГ) подключена электрическая схема из трех одинаковых резисторов сопротивлением R = = 1 кОм и трех конденсаторов емкостью C = = 1 мкФ (рис.5). На какой частоте ЗГ показания амперметра А переменного тока будут минимальны? Сопротивление амперметра считать малым.

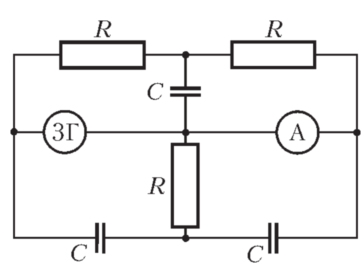


Рис. 5

З.Рафаилов

Решения задач М2154–М2158, М2160, Ф2168–Ф2174[1]

М2154. *Каждая клетка доски размером 2009×2009 покрашена в один из двух цветов так, что у каждой*

[1] *Решение задачи М2153 приведено в статье И.Богданова «О сумме телесных углов многогранника» в этом номере журнала. Решение задачи М2159 будет опубликовано позже.*

клетки соседей (по стороне) своего цвета меньше, чем соседей другого цвета. Какое наибольшее значение может принимать разность между количеством клеток одного и другого цветов?

Ответ: 669.

Докажем вначале, что либо в каждой строке цвета чередуются, либо в каждом столбце цвета чередуются. Из условия следует, что каждая клетка имеет не более одного соседа своего цвета. Пусть имеются две соседние одноцветные (скажем, белые) клетки A и B, лежащие в одном столбце (рис.1). Тогда их соседи в строке – другого цвета, скажем зеленые, соседи зеленых – белые и так далее. Получаем, что в строках, содержащих клетки A и B, цвета чередуются. Если, кроме того, имеются две соседние одноцветные клетки C и D, лежащие в одной строке, то получаем, что в столбцах, содержащих клетки C и D, цвета чередуются, что невозможно. Утверждение доказано.

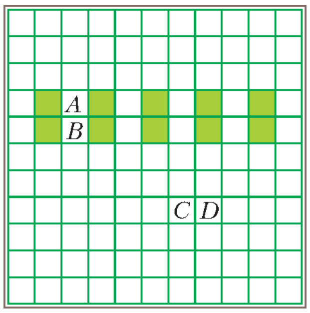


Рис. 1

Пусть, для определенности, в каждой строке цвета чередуются. Отделим первый столбец, тогда в оставшейся части доски 2009×2008 зеленых и белых клеток поровну. Первый столбец разобьем на 669 прямоугольников 3×1 и один прямоугольник 2×1 (рис.2). В прямоугольнике 3×1 не может быть трех клеток одного цвета, и такой прямоугольник дает вклад не более 1 в разность R между количеством клеток одного и другого цветов. Прямоугольник 2×1 дает вклад 0 (так как клетки, соседние с угловой, должны иметь цвет, отличный от ее цвета). Таким образом, разность R не превосходит 669.

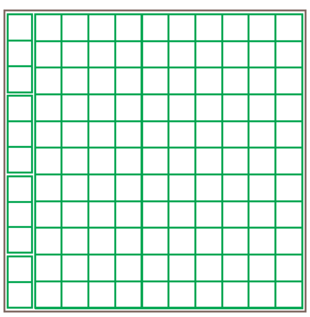


Рис. 2

Опишем пример для $R = 669$. Пусть в каждой строке цвета чередуются, причем строки с номерами вида $3k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 669$ начинаются с зеленой клетки, а остальные строки – с белой (рис. 3). Нетрудно убедиться, что пример удовлетворяет условию задачи.

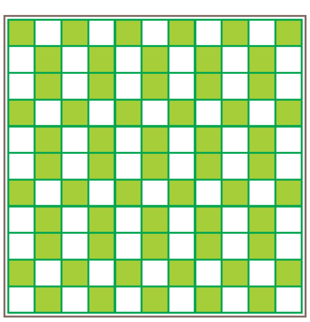


Рис. 3

А.Шаповалов

М2155. *Найдите 2009-значное число, отношение которого к сумме его цифр минимально.*

Ответ: $10000\underbrace{99\ldots9}_{2004}$.

Через $S(X)$ обозначим сумму цифр числа X. Пусть $A = \overline{a_{2008}a_{2007}\ldots a_0}$ – число (или одно из чисел), для которого величина $R(A) = \dfrac{A}{S(A)}$ принимает наименьшее значение среди всех 2009-значных чисел. Имеем

$$R(A) = \frac{\overline{a_{2008}a_{2007}\ldots a_{k+1}0a_{k-1}\ldots a_0} + 10^k a_k}{S(A)} =$$

$$= 10^k + \frac{1}{S(A)}\Big(\overline{a_{2008}a_{2007}\ldots a_{k+1}0a_{k-1}\ldots a_0} -$$

$$-10^k\left(a_0 + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_{2008}\right)\Big).$$

Обозначим разность в скобках через T_k. С одной стороны, T_k не зависит от a_k; с другой стороны, $T_k = A - 10^k \cdot S(A)$.

Если $T_k > 0$, то $a_k = 9$, иначе после замены a_k на 9 знаменатель дроби $\dfrac{T_k}{S(A)}$ увеличится, а числитель не изменится, значит, число $R(A)$ уменьшится, что невозможно. Если же $T_k < 0$, то

$$a_k = \begin{cases} 0, & k < 2008, \\ 1, & k = 2008, \end{cases}$$

иначе можно заменить a_k на 0 (или на 1 при $k = 2008$), уменьшая значение $R(A)$.

При $k \le 2003$ имеем

$$T_k = A - 10^k \cdot S(A) \ge 10^{2008} - 10^k \cdot 9 \cdot 2009 =$$

$$= 10^k\left(10^{2008-k} - 9 \cdot 2009\right) > 0;$$

значит, $a_k = 9$ при $k \le 2003$. Тогда A оканчивается на 2004 девятки, в частности $S(A) > 2004 \cdot 9$. Далее, при $k = 2005, \ldots, 2008$ имеем

$$T_k = A - 10^k \cdot S(A) < 10^{2009} - 10^k \cdot 2004 \cdot 9 =$$

$$= 10^k\left(10^{2009-k} - 2004 \cdot 9\right) < 0;$$

значит, $a_{2008} = 1$ и $a_{2007} = a_{2006} = a_{2005} = 0$. Тогда $A < 10^{2008} + 10^{2005}$. Наконец, при $k = 2004$ имеем

$$T_{2004} = A - 10^{2004} S(A) < 10^{2008} + 10^{2005} -$$

$$- 10^{2004} \cdot 2004 \cdot 9 = 10^{2004}\left(10^4 + 10 - 2004 \cdot 9\right) < 0,$$

поэтому $a_{2004} = 0$.

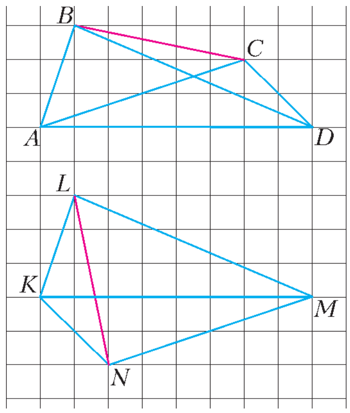
Итак, мы получили, что $10000\underbrace{99\ldots9}_{2004}$ – это единственное возможное значение для числа A.

И.Богданов

М2156. *Вася и Петя нарисовали по выпуклому четырехугольнику. Каждый из них записал на листочке длины всех сторон своего четырехугольника и двух его диагоналей. В результате на их листочках оказались два одинаковых набора из 6 различных чисел. Обязательно ли четырехугольники Васи и Пети равны?*

Ответ: не обязательно.

Примером могут служить четырехугольники $ABCD$ и $KLMN$ с вершинами с узлах квадратной сетки, изобра-



женные на рисунке. Здесь $\Delta ABD = \Delta KLM$, $\Delta ACD = \Delta MNK$ и $BC = LN$, поэтому наборы длин сторон и диагоналей для данных четырехугольников одинаковые. Но очевидно, что сами четырехугольники не равны (так как, например, в четырехугольнике $ABCD$ ни одна из двух диагоналей не равна LN).

И.Богданов

M2157. *На доске выписано 20 делителей числа 70!. Докажите, что можно стереть некоторые из них так, чтобы произведение оставшихся являлось полным квадратом.*

Имеется всего 19 простых чисел, не превосходящих 70: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, …, $p_{19} = 67$. Каждый делитель числа 70! имеет вид

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{19}^{\alpha_{19}}, \qquad (*)$$

где α_i – некоторые целые неотрицательные числа. Числу d сопоставим строку $u = (a_1, a_2, \ldots, a_{19})$ длины 19 из нулей и единиц по правилу: $a_i = 1$, если α_i нечетно, и $a_i = 0$, если α_i четно. (Например, числу $d = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 11^5 \cdot 13 = p_1^6 \cdot p_2^3 \cdot p_5^5 \cdot p_6^1$ ставится в соответствие строка (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, …, 0)).

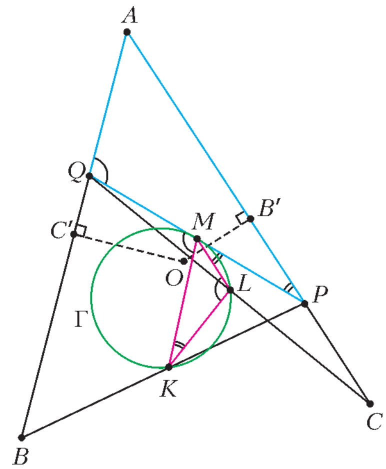
Введем сложение строк «по модулю 2»: для строк $u = (a_1, a_2, \ldots, a_{19})$, $v = (b_1, b_2, \ldots, b_{19})$ их сумма равна $u + v = (c_1, c_2, \ldots, c_{19})$, где $c_i = 1$, если $a_i + b_i = 1$, и $c_i = 0$, если $a_i + b_i$ равно 0 или 2. Как нетрудно заметить, произведение нескольких чисел вида (*) (не обязательно различных) равно полному квадрату, если сумма соответствующих им строк равна нулевой строке (0, 0, …, 0) (в частности, произведение двух чисел равно полному квадрату, если соответствующие им строки одинаковы). Поэтому для решения задачи достаточно доказать следующее *утверждение*: из 20 строк длины 19 можно выбрать несколько строк, сумма которых равна нулевой строке.

Знакомые с линейной алгеброй могут сразу вывести утверждение из линейной зависимости 20 векторов в 19-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{Z}_2$. Мы же приведем комбинаторное доказательство (похожие рассуждения проводились, например, при решении задачи M665).

Для каждого из $2^{20} - 1$ непустых подмножеств множества из 20 строк найдем сумму строк в этом подмножестве. Всего существует 2^{19} строк длины 19 из нулей и единиц, поэтому найдутся два различных подмножества S_1 и S_2, для которых суммы строк одинаковы. Это означает, что, сложив суммы строк в множествах S_1 и S_2, мы получим нулевую строку. Удалив из этой суммы строки, встречающиеся дважды (т.е. строки из пересечения множеств S_1 и S_2), получим сумму нескольких различных строк, равных нулевой строке.

П.Кожевников

M2158. *Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть P и Q – внутренние точки отрезков CA и AB соответственно. Точки K, L и M – середины отрезков BP, CQ и PQ соответственно, а Γ – окружность, проходящая через точки K, L и M. Известно, что прямая PQ касается окружности Γ. Докажите, что OP = OQ.*



Из параллельности прямых AB и KM следует равенство углов $\angle KMQ$ и $\angle AQP$ (см. рисунок). Аналогично, $\angle LMP = \angle APQ$. Касание окружности Γ и прямой PQ эквивалентно равенству $\angle KLM = \angle KMQ$, или равенству $\angle KLM = \angle AQP$. Аналогично, касание эквивалентно равенству углов $\angle KLM = \angle APQ$. Таким образом, касание окружности Γ и прямой PQ эквивалентно подобию треугольников APQ и MKL, которое в свою очередь эквивалентно (в силу равенства $\angle CAB = \angle KML$) соотношению $AQ \cdot MK = AP \cdot ML$, или $AQ \cdot OB = AP \cdot PC$ (поскольку MK и ML – средние линии в треугольниках BPQ и CQP соответственно). Последнее соотношение означает, что точки P и Q имеют равные степени относительно окружности, описанной около треугольника ABC, что выполнено тогда и только тогда, когда P и Q равноудалены от центра O.

Замечания

1. Использование свойства степени точки относительно окружности можно заменить следующей выкладкой (далее C' и B' – середины отрезков AB и CA соответственно):

$$OP^2 - OQ^2 = OB'^2 + B'P^2 - OC'^2 - C'Q^2 =$$
$$= \left(OA^2 - AB'^2\right) + B'P^2 - \left(OA^2 - AC'^2\right) - C'Q^2 =$$
$$= \left(AC'^2 - C'Q^2\right) - \left(AB'^2 - B'P^2\right) =$$
$$= (AC' - C'Q)(AC' + C'Q) - (AB' - B'P)(AB' + B'P) =$$
$$= AQ \cdot QB - AP \cdot PC.$$

2. Из решения следует, что условие касания равносильно условию равенства отрезков OP и OQ.

С.Берлов

M2160*. *Даны попарно различные положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а также множество M, состоящее из n – 1 числа, но не содержащее число $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Кузнечик должен сделать n прыжков вправо по числовой прямой, стартуя из точки с координатой 0. При этом длины его прыжков должны равняться числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взятым в некотором порядке. Докажите, что этот порядок можно выбрать таким образом, чтобы кузнечик ни разу не* *приземлился в точке, имеющей координату из множества M.*

Точку на числовой оси условимся отождествлять с ее координатой. Если кузнечик делает последовательно прыжки $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$, обозначим путь кузнечика упорядоченной последовательностью индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$. Применим индукцию по n. Случай $n = 1$ очевиден. Предположим теперь, что утверждение задачи верно для количества прыжков, меньшего n. Не умаляя общности, положим $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Пусть d – наименьшее число множества M.

Случай 1: $d < a_n$.

Если $a_n \notin M$, то делаем первый прыжок длиной a_n. Далее, по предположению индукции кузнечик может попасть из точки a_n в точку s, не приземляясь в точках множества $M \setminus \{d\}$, используя прыжки длиной $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Пусть теперь $a_n \in M$. Рассмотрим n попарно непересекающихся подмножеств $\{a_n\}, \{a_1, a_1 + a_n\}, \{a_2, a_2 + a_n\}, \ldots$ …, $a_{n-1}, a_{n-1} + a_n$. Найдется одно из них, скажем $\{a_i, a_i + a_n\}$, которое не пересекается с M. Тогда делаем первые два прыжка длиной a_i и a_n. При этом хотя бы две точки из M (d и a_n) левее точки $a_i + a_n$, в которую кузнечик попал за два прыжка. По предположению индукции, кузнечик может попасть из точки $a_i + a_n$ в точку s, не приземляясь в точках множества $M \setminus (\{d\} \cup \{a_n\})$ и используя все прыжки, кроме a_i и a_n.

Случай 2: $d \geq a_n$.

По предположению индукции, кузнечик может попасть из точки a_n в точку s, не приземляясь в точках множества $M \setminus \{d\}$, используя прыжки $a_1, \ldots, a_{n-1}$; пусть $(i_1, \ldots, i_{n-1})$ – перестановка индексов 1, 2, … …, $n-1$, соответствующая этому пути. Если при этом кузнечик также не приземляется в точке d (в частности, в таком случае $d > a_n$), то последовательность индексов $(n, i_1, \ldots, i_{n-1})$ дает искомый путь кузнечика.

В противном случае в пути $(n, i_1, \ldots, i_{n-1})$ кузнечик приземлился ровно в одной точке множества M – точке d, и мы получаем, что $a_n + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} = d$ для некоторого $0 \leq k < n-1$. Тогда рассмотрим путь $(i_1, \ldots, i_{k+1}, n, i_{k+2}, \ldots, i_{n-1})$. Так как $a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k+1}} < a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} + a_n = d$, то кузнечик не приземлится на точки множества M при первых $k+1$ прыжках. На протяжении оставшейся части пути он приземляется на те же точки, что и в пути $(n, i_1, \ldots, i_{n-1})$ (и координаты этих точек не меньше чем $a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k+1}} + a_n > d$). Таким образом, в пути $(i_1, \ldots, i_{k+1}, n, i_{k+2}, \ldots, i_{n-1})$ кузнечик не приземлится ни на одну точку из множества M.

Итак, мы нашли нужный путь кузнечика во всех случаях.

Замечание. А.Комисарски (Польша) отметил, что утверждение неверно, если позволить длинам прыжков быть также отрицательными (и считать прыжок влево на $a > 0$ прыжком вправо на $-a$). Скажем, если длины прыжков равны -1, 1, 2, 3, а $M = \{1, 2, 3\}$, то, как легко видеть, нужного пути кузнечика в точку 5 не существует.

И.Богданов

Ф2168. *На Венере странная атмосфера – она простирается до высоты 10 км и обладает практически постоянной плотностью. Отпускаем мячик с высоты 5 м – он упадет на поверхность через 1 секунду. С высоты 50 м он падает 3,5 с, с высоты 100 м – 5,5 с. Сколько времени он будет падать с высоты 200 м? Оцените, с какой скоростью он движется в этом случае непосредственно перед падением.*

Честным способом тут посчитать ничего не получится. Но посмотрим на опыт 2: первые 5 метров займут 1 секунду, значит, остальные 45 м мяч падает 2,5 с – средняя скорость на этом участке получается 18 м/с. Теперь опыт 3: первые 50 м из 100 м мяч пролетает за 3,5 с, остальные 50 м – за 2 с. За эти последние 2 секунды средняя скорость составит 25 м/с. Ясно, что при этом ускорение намного меньше 10 м/с^2 (опыт 1). Можно скорость 25 м/с считать установившейся, можно немного уточнить эту оценку – если положить, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости, то нужно еще немного увеличить значение установившейся скорости, получится примерно 29 м/с. Если не уточнять установившуюся скорость, то время падения с высоты 200 м будет равно 5,5 с + 100 м/25 м/с = 9,5 с, а скорость падения около поверхности будет 25 м/с. Если уточнить, то время падения составит 5,5 с + + 100 м/27 м/с = 9,2 с, а скорость у поверхности будет 29 м/с.

А.Простов

Ф2169. *На гладком горизонтальном столе находится груз массой M, к нему привязаны легкие нити, к свободным концам нитей прикреплены грузы массами 2M и M/2. Нити переброшены через неподвижные, расположенные горизонтально пальцы так, что один кусок каждой нити горизонтален, а другой – вертикален. Вначале груз на плоскости удерживают, затем отпускают. При этом пальцы начинают двигать навстречу друг другу по горизонтали, каждый с ускорением $a = g/7$. Найдите ускорение груза массой M сразу после начала движения.*

Обозначим силу натяжения конца нити, привязанного к грузу массой $2M$, буквой T. Трения нет – поэтому сила натяжения горизонтального куска этой нити тоже T. Аналогично, силу натяжения нити с другой стороны обозначим Q. Ускорение груза массой M направлено в сторону большего из грузов, обозначим его буквой b. Тогда ускорение груза массой $2M$ сразу после начала движения будет направлено вниз и составит $b + a = b + g/7$, а ускорение груза массой $M/2$ будет направлено вверх и составит $b - g/7$ (если эта величина получится отрицательной, а заранее это угадать не слишком просто, ничего пересчитывать не придется). Ускорения грузов записаны с учетом нерастяжимости кусков нитей. В самом начале движения ускорения свисающих грузов будут вертикальны, затем свисающие куски нитей перестанут быть вертикальными, так что задачу нужно решать очень быстро!

Запишем уравнения движения для всех трех грузов:

$$2Mg - T = 2M(b + g/7),$$
$$Q - 0{,}5Mg = 0{,}5M(b - g/7),$$
$$T - Q = Mb.$$

Решая эту систему уравнений (просто сложив эти три выражения), получаем

$$b = \frac{18}{49}g\,.$$

Р.Пальцев

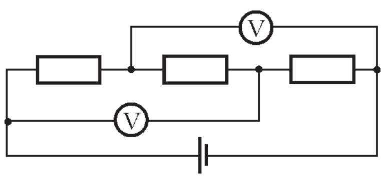
Ф2170. *В два стакана налили одинаковые количества воды – в первый горячую при $+70\,°C$, во второй холодную при $+20\,°C$. Ложку горячей воды перелили в холодную и перемешали. Температура воды в этом стакане оказалась $+25\,°C$. Перелили ложку этой воды обратно в стакан с горячей водой и перемешали. Какой стала температура в горячем стакане? Сколько раз нужно повторить этот процесс (переливание туда и обратно с перемешиванием), чтобы разность температур стала меньше одного градуса? Теплоемкостью стакана и ложки можно пренебречь. Теплообмен с окружающей средой не учитывать.*

После первого переливания ложки воды обратно в горячий стакан температура воды в нем установится $+65\,°C$ (количество воды вернулось к начальному, общая энергия обоих стаканов не изменилась).
Теперь разность температур воды в стаканах уменьшилась от начальных 50 градусов до 40 градусов, т.е. уменьшилась в 1,25 раз. Ясно, что после следующего переливания туда-обратно разность температур уменьшится еще в 1,25 раз (это очевидно, но можно и легко доказать – при помощи уравнения теплового баланса). После n пар переливаний разность температур уменьшится в $(1{,}25)^n$ раз. Нужно найти такое число n, чтобы полученное выражение оказалось больше 50, при этом разность температур окажется меньше 1 градуса. Можно использовать логарифмы, можно просто «на числах» убедиться (числа здесь несложные), что $(1{,}25)^{17}$ меньше 50, а $(1{,}25)^{18}$ – больше.
Итак, нужно совершить 18 пар переливаний.

А.Повторов

Ф2171. *Три одинаковых резистора соединены последовательно, батарейка напряжением 6 В подключена к концам этой цепочки. Два одинаковых вольтметра подключены так, как показано на рисунке. Один из приборов показывает 3 В. Что показывает второй прибор? Что он будет показывать, если первый вообще отключить от схемы? Показания приборов считать точными, вольтметры – неидеальными.*

В силу симметрии схемы, сразу можно сказать, что второй вольтметр тоже покажет 3 В, а ток через средний резистор не течет. Ясно, что сопротивление вольтметра такое же, как сопротивление одного резистора.



Если отключить один вольтметр, то получится простая схема, где один резистор подключен последовательно с вольтметром, включенным параллельно с двумя последовательно соединенными резисторами. Тогда показание вольтметра будет 2,4 В.

З.Приборов

Ф2172. *В глубинах космоса, вдали от всех других тел, висит неподвижно тонкостенная непроводящая сфера радиусом R и массой M. На ее поверхности равномерно «размазан» заряд Q. Издали на сферу налетает очень маленький шарик массой m, заряженный таким же зарядом Q. Начальная скорость шарика равна v_0 и направлена в центр сферы, а в стенках сферы сделаны две маленькие дырки так, чтобы шарик, при большой его скорости, мог проскочить сквозь сферу. Сколько времени шарик летит внутри сферы?*

Поле зарядов, расположенных на сфере, внутри самой сферы отсутствует, поэтому внутри сферы шарик летит равномерно. (Если бы сфера была проводящей, ее заряды перераспределились бы, и движение заряженного шарика внутри сферы уже не было бы равномерным.) Для нахождения времени пролета достаточно определить скорость шарика – проще всего ее найти в тот момент, когда шарик находится в центре сферы (проще считать потенциалы). Обозначив скорость шарика в этой точке через v, а скорость центра сферы в этот же момент – через u, запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = mv + Mu\,,\quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{kQ^2}{R}\,.$$

Решая эти уравнения, найдем v и u:

$$v = \frac{v_0(1+\gamma A)}{1+\gamma}\,,\quad u = \frac{v_0(1-A)}{1+\gamma}\,,$$

где

$$\gamma = \frac{M}{m}\,,\quad A = \sqrt{1 - \frac{2kQ^2(1+\gamma)}{Rm\gamma v_0^2}}\,.$$

Знаки в корнях квадратного уравнения выбраны так, чтобы скорость шарика оказалась больше скорости центра масс системы, а скорость сферы – меньше. После того как шарик попадает внутрь сферы, скорости тел не изменяются, пока шарик не вылетит наружу. Поэтому условие «пролета» находится просто: «критическая» скорость v_0 соответствует условию $A = 0$, т.е.

$$v_{0\,\text{кр}}^2 = \frac{2kQ^2(1+\gamma)}{Rm\gamma}\,.$$

Итак, время пролета шарика внутри сферы равно

$$\tau = \frac{2R}{v-u} = \frac{2R(1+\gamma)}{v_0(1+A)}\,.$$

З.Рафаилов

Ф2173. *Пружинный маятник состоит из легкой пружины жесткостью k и висящего на ней груза массой M. Вначале система неподвижна (груз в равновесии). В некоторый момент точку подвеса начинают дви-*

(Продолжение см. на с. 34)

...прыгают в медных сосудах самофракийские кольца
с железа опилками вместе, бурно бушуя,
когда под сосудом камень магнитный...

Тит Лукреций Кар

Янтарь не притягивает к себе соломинку, когда что-либо их разделяет, притяжение железа к магниту не испытывает аналогичных помех.

Джероламо Кардано

...в конце концов мне удалось намагнитить и наэлектризовать луч света и осветить магнитную силовую линию.

Майкл Фарадей

И вот тогда я задал сам себе вопрос – а что будет, если среда, в которой распространяется волна, будет иметь одновременно отрицательные значения и электрической, и магнитной проницаемости?

Виктор Веселаго

...наша хваленая современная физика – сплошное надувательство: начали мы с магнитного железняка и янтаря, а закончили тем, что не понимаем достаточно хорошо ни того, ни другого. Зато в процессе изучения мы узнали огромное количество удивительных и очень полезных для практики вещей!

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам постоянные магниты?

А как же! Взглянем вокруг – вот они на дверце холодильника в прилипших к ней игрушках, на столах в «ловушках» скрепок, булавок и кнопок, в магнитных лентах пластиковых карт или хотя бы в тех же компасах, которые вставляют уже и в школьные ранцы, и в ремешки часов. Чуть подумав, вспомним, что без магнитов не обходятся магнитофоны, микрофоны, телефоны – это нам подсказывают не успевающие за временем учебники. А чем начиняют сегодня разного рода аппаратуру? Магнитов в классическом понимании там может уже и не содержаться, но это не значит, что в устройствах, которыми мы повседневно пользуемся, перестали применять магнитные материалы. Просто они неузнаваемо изменились, порой став практически невидимыми, но главное – приобретя совершенно новые, особенные качества.

Однако в перекличке времен, возникшей в эпиграфах, пожалуй, заметно и нечто общее – неизменное повышенное внимание к этому удивительному явлению природы. Размышления о магнитах можно найти и у древних философов, и у средневековых естествоиспытателей, и у наших современников-исследователей. Когда-то в магнит умудрились вдохнуть «душу» и уподобляли его живым организмам; сегодня пытаются раскрыть загадку магнитного монополя и объяснить необычные свойства создаваемых в лабораториях магнитных материалов.

В какой-то мере этот «Калейдоскоп» – продолжение предыдущего выпуска «Нано...» И так же, как в прошлый раз, мы попробуем перекинуть мостик от, казалось бы, бесхитростных ситуаций и задач, где мы встречаемся с нашими персонажами-магнитами, к тем зачастую ошеломляющим технологическим новинкам, где они продолжают играть заметную, если не определяющую роль, меняя облик окружающего нас мира.

Вопросы и задачи

1. Может ли стальной стержень иметь на обоих концах одинаковые магнитные полюса? Может ли постоянный магнит иметь четное число магнитных полюсов? А нечетное число?

2. Два одинаковых прямолинейных магнита соединили один раз так, как показано на рисунке а), другой раз – как показано на рисунке б). Изобразите линии индукции магнитного поля в каждом случае.

3. Будет ли действовать магнит на магнитную стрелку, если между ними поместить руку? А если алюминиевый лист?

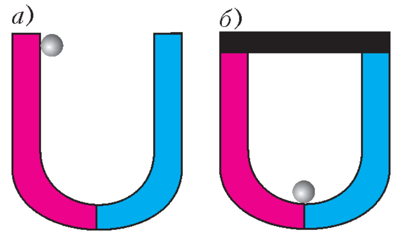
4. На лист бумаги равномерно насыпают металлические опилки. Этот лист помещают в магнитное поле. Если слегка постукивать по листу, то опилки расположатся в цепочки по направлению магнитных линий. Для чего необходимо постукивать по листу? Почему опилки выстраиваются в цепочки?

5. Имеются два одинаковых стальных стержня, один из которых намагничен сильнее другого. Как найти этот стержень?

6. Полосовой магнит распилили на несколько кусков одинаковой длины. Какой из получившихся кусков окажется намагниченным сильнее: который находился ближе к концам или ближе к середине магнита?

7. Полосовой магнит разделили на две равные части и получили два магнита. Будут ли эти магниты оказывать такое же действие, как и целый магнит?

8. Зачем при хранении дугообразного магнита его концы соединяют железным бруском (якорем)?



9. Сильный дугообразный магнит способен удерживать стальной шарик. Почему шарик не удерживается на прежнем месте, если магнит замкнуть якорем?

10. Сильный магнит может удерживать на весу гирлянду из нескольких железных цилиндров. Что будет происходить, если снизу приближать к гирлянде такой же магнит, обращенный к верхнему одноименным полюсом? А если противоположным?

11. Три совершенно одинаковые магнитные стрелки расположены в вершинах равностороннего треугольника, сторона которого много больше длины стрелки. Стрелки могут вращаться вокруг осей, перпендикулярных плоскости треугольника. Каково положение равновесия стрелок, если всеми влияниями, а также магнитным полем Земли можно пренебречь?

12. Почему ударами молотка можно размагнитить стальной магнит, а легким постукиванием по стальному стержню можно, наоборот, способствовать его намагничиванию?

13. Отчего обыкновенные магнитные компасы вблизи полюсов Земли работают очень плохо?

14. Уравновешенные весы со стальным коромыслом располагаются вдоль земного меридиана. Сохранится ли равновесие, если коромысло намагнитить вдоль всей его длины?

15. Можно ли на Луне ориентироваться с помощью магнитного компаса?

16. Многие вещества сохраняют свои магнитные свойства и после испарения. А почему атомы железа в парообразном состоянии теряют ферромагнитные свойства?

17. Намагниченная стальная пластинка, опущенная в сосуд с соляной кислотой, растворилась. Куда девалась магнитная энергия пластинки?

Микроопыт

Возьмите большую магнитную стрелку на подставке и поднесите ее сначала к нижнему, а затем к верхнему концу школьного лабораторного штатива (варианты: к железному ведру, к железной ручке двери). Одинаково ли будет вести себя стрелка у разных концов штатива? Почему?

Любопытно, что...

...древнейшие сведения об использовании железа в качестве компаса содержатся в китайских летописях, составленных более трех тысячелетий назад. Название же «магнит», как свидетельствует древнегреческий философ Платон, ввел почти за пятьсот лет до новой эры автор знаменитых трагедий Еврипид.

...столетиями от поколения к поколению передавались фантастические небылицы о свойствах магнита. Так, связывая необычайную для неживой природы силу магнита с происками дьявола, считали, что он помогает ворам, открывая запоры и замки, что магнит ночью «спит» и потому бездействует, что влияние магнита прекратится, если натереть его чесноком, а если он потеряет свою силу, следует смочить его козлиной кровью.

...в своем фундаментальном труде «О магните...» Гильберт впервые высказал утверждение о том, что Земля – большой магнит.

...подковообразную форму придал магнитам Даниил Бернулли; связь ударов молний с перемагничиванием судовых компасов, а также влияние магнитных бурь на полярные сияния установил Доминик Араго; научную программу по изучению магнитных явлений, которой фактически следовали ученые XIX века, разработал, но, увы, не опубликовал Генри Кавендиш.

...пытаясь найти взаимосвязь между различными областями физики, Фарадей обнаружил вращение плоскости колебаний линейно поляризованного света, распространяющегося в веществе вдоль постоянного магнитного поля. Магнитооптический эффект Фарадея, реализуемый сегодня в тонких пленках, оказался незаменим при изучении свойств магнитных доменов, при проверке подлинности видео- и аудиозаписей, а также при расшифровке «черных ящиков».

...гипотеза о существовании в ферромагнетиках областей самопроизвольной намагниченности – доменов – была выдвинута французским физиком Пьером Вейсом в 1907 году и получила подтверждение 12 лет спустя в эффектном опыте. Перемагничивание доменов микронных размеров с помощью изобретенного к тому времени электронного усилителя сигналов удалось преобразовать в щелчки, слышимые по всей лаборатории. А уже в 1932 году магнитные домены наблюдались непосредственно в микроскоп.

...хотя полюса магнитов неразделимы, гипотеза о существовании магнитных монополей не противоречит теории, очень многие их свойства исследованы «на бумаге», а поиски монополей не прекращаются как в космосе, так и в земных экспериментах.

...Нобелевская премия по физике 2007 года была присуждена за разработку технологии, значительно увеличившей плотность хранения информации на жестких дисках. В ее основе – открытие гигантского магнитосопротивления в так называемых «сэндвичах», состоящих из двух слоев ферромагнитного материала, разделенных тончайшей прослойкой немагнитного материала. Этот эффект стал первым практическим применением нанотехнологии в современной электронной промышленности.

...в последние годы физикам удалось создать «суперлинзы», собирающие световые лучи в гораздо более узкий пучок, чем это разрешается законами оптической дифракции, что позволило различать точки, расположенные всего в нескольких десятках нанометров друг от друга. Метаматериалы, применяемые при изготовлении «суперлинз», имеют отрицательный показатель преломления, т.е. представляют собой «левые» оптические среды, в которых диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость отрицательны.

Что читать в «Кванте» о постоянных магнитах

(публикации последних лет)

1. «Калейдоскоп «Квант» – 2005, №1, с.32;
2. «Левые среды» – 2006, Приложение №2, с.62;
3. «Движение заряда в магнитном поле» – 2007, №5, с.42;
4. «Триумф фундаментальной науки» – 2008, №4, с.4;
5. «Загадки магнитной стрелки» – 2009, №3, с.39; №5, с.34;
6. «Магнитные домены» – 2009, Приложение №4, с.44;
7. «Как управлять светом с помощью магнитного поля» – 2010, №1, с.12;
8. «Постоянные магниты. Магнитные свойства вещества» – 2010, Приложение №1, с.63.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 26)

гать вниз с постоянной скоростью v_0. *Найдите максимальную длину пружины при таком движении. В нерастянутом состоянии пружина имеет длину* L.

В начальный момент пружина растянута на $l = \frac{Mg}{k}$ и энергия деформации пружины равна $\frac{kl^2}{2} = \frac{M^2g^2}{2k}$. Пусть максимальное растяжение пружины равно X, тогда энергия пружины в этом состоянии составляет $\frac{kX^2}{2}$. Удобно перейти в систему отсчета, которая едет вниз со скоростью v_0. В этой системе точка подвеса неподвижна, работа силы, действующей на подвес со стороны пружины, равна нулю и энергия окружающих тел не меняется. Максимальное растяжение пружины соответствует нулевой скорости груза, а начальная скорость груза в этой системе равна v_0. Закон сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{Mv_0^2}{2} + \frac{M^2g^2}{2k} + Mg(X - l) = \frac{kX^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$X = \frac{Mg}{k} + \sqrt{\frac{Mv_0^2}{k}}.$$

Можно записать и условие для скорости – при большой скорости v_0 может получиться $X > L$ и пружина не все время будет подчиняться закону Гука (груз ударится о подвес).

Итак, максимальная длина пружины равна

$$L_{\max} = L + X = L + \frac{Mg}{k} + \sqrt{\frac{Mv_0^2}{k}}.$$

А.Зильберман

Ф2174. *Очень большое количество одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием* F *расположены на одинаковых расстояниях* l *друг от друга так, что главные оптические оси всех линз совпадают. Расстояние* l *много меньше фокусного расстояния* F. *На первую линзу перпендикулярно ее плоскости падает луч света (рис.1). Постройте ход этого луча. Найдите расстояние между точками, в которых луч в третий и в четвертый раз пересекает главную оптическую ось.*

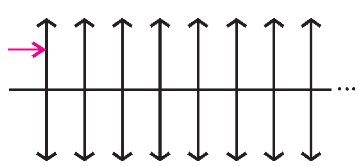


Рис. 1

Аналогичная задача уже публиковалась в «Задачнике» Кванта» (Ф193), однако была поставлена лишь на качественном уровне: нужно было построить ход ряда лучей в рассматриваемой системе линз. Повторим сначала основные моменты решения этой задачи.

Так как линзы собирающие, каждая будет «прижимать» луч к главной оптической оси. Причем, поскольку фокусное расстояние линз много больше расстояния между ними, а луч после прохождения линзы пересек бы главную оптическую ось на таком расстоянии от линзы, которое сравнимо с ее фокусным расстоянием, между каждой парой линз луч будет смещаться очень незначительно. Поэтому после прохождения первой линзы луч чуть-чуть «повернет» к главной оптической оси, после прохождения второй – еще чуть-чуть, затем еще и в какой-то точке, пройдя большое количество линз, пересечет главную оптическую ось, повернув при этом на значительный угол за счет преломлений в большом количестве линз. После этого луч будет снова «поворачивать» к главной оптической оси и на каком-то расстоянии от точки пересечения станет параллельным главной оптической оси. Дальнейший ход луча будет повторять описанный выше.

Для иллюстрации этого вывода на рисунке 2 построен ход трех лучей, падающих на рассматриваемую систему линз. Лучи построены с помощью расчетов для

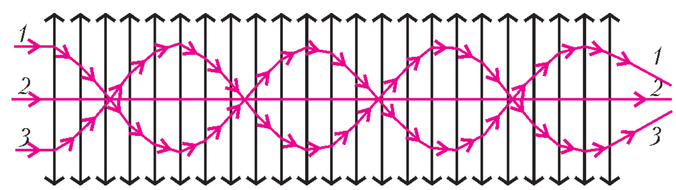


Рис. 2

случая, когда расстояние между линзами равно одной трети фокусного расстояния линз. Из этого рисунка видно, что, с одной стороны, лучи *1* и *3* представляют собой ломаные линии (ведь между линзами лучи прямые), но с другой стороны, уж очень они похожи на графики тригонометрических функций! Поэтому возникает следующая идея. Будем считать, что луч описывается «почти» плавной кривой, и попробуем получить ее уравнение.

Введем систему координат с началом в центре первой линзы, ось X направим вдоль главной оптической оси, ось Y перпендикулярно ей и в пределе $l \to 0$ найдем связь между координатами y и x для точек луча, т.е. получим уравнение $y(x)$, описывающее луч. Для этого рассмотрим прохождение луча через одну линзу, находящуюся на некотором расстоянии x от начала координат (рис.3). Пусть луч AB падает на линзу под углом α к главной оптической оси в точке B, имеющей вертикальную координату y (отрезок BM параллелен главной оптической оси линзы). Построим продолжение этого луча после прохождения линзы и найдем угол β между ним и главной оптической осью. Для построения проведем через центр линзы вспомогательный луч CO, параллельный падающему. Из прямоугольного треугольника BMN имеем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{MN}{F} = \frac{y}{F} + \frac{F\operatorname{tg}\alpha}{F} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{y}{F}.$$

Тангенс угла наклона луча к оси X равен производной искомой функции $y(x)$ со знаком «минус» (углы α и β отсчитаны по часовой стрелке от оси X), поэтому предыдущее равенство можно переписать в виде

$$y'(\text{после линзы}) - y'(\text{до линзы}) = -\frac{1}{F}y(x).$$

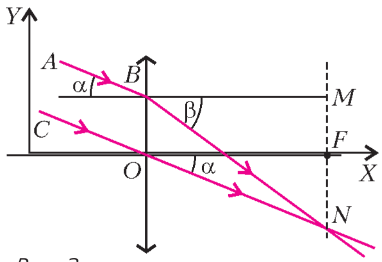


Рис. 3

Поделим правую и левую части этого уравнения на расстояние l между линзами. Поскольку это расстояние мало, левая часть нового уравнения будет приближенно равна второй производной искомой функции в точке, где находится линза, т.е. $y''(x)$. Тогда получим

$$y''(x) = -\frac{1}{lF}y(x).$$

Из этой формулы следует, что функция $y(x)$, определяющая ход луча в рассматриваемой системе линз, такова, что ее вторая производная в некоторой точке пропорциональна самой функции в этой точке. Уравнения, которые связывают неизвестную функцию и ее производные, являются дифференциальными уравнениями. В школьном курсе физики рассматривается дифференциальное уравнение гармонических колебаний, которые связывает координату колеблющегося тела x со временем t:

$$x''(t) = -\omega^2 x(t),$$

где ω^2 – некоторое число, и доказывается, что функция $x(t)$ представляет собой комбинацию синуса и косинуса от аргумента ωt, т.е. является периодической функцией времени с периодом $T = 2\pi/\omega$.
Поскольку наше уравнение для функции $y(x)$ совпадает по форме с уравнением гармонических колебаний, причем $\omega^2 = \frac{1}{lF}$, то искомая функция $y(x)$, определяющая ход светового луча, также представляет собой комбинацию тригонометрических функций координаты x с периодом $L = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{lF}$. Здесь период L имеет смысл длины, на которой световой луч дважды пересекает ось X. Поэтому расстояние между ближайшими точками пересечения лучом главной оптической оси, и в частности между третьим и четвертым пересечениями, равно половине этого периода, т.е. $\pi\sqrt{lF}$.

С.Муравьев

Еще раз об окружностях, вписанных в криволинейные фигуры

В задаче М2127 «Задачника «Кванта» внутрь ветви гиперболы вписывалась цепочка окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается ветвей гиперболы и окружности ω_{n-1}. В решении этой задачи мы упомянули интересные факты об аналогичных цепочках окружностей, вписанных в эллипс или в параболу.

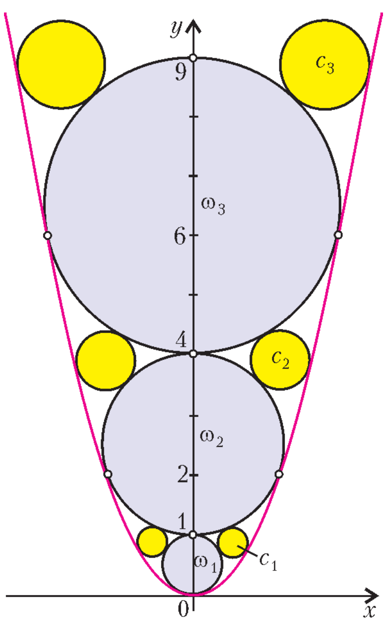


Рис. 1

Например, если внутри параболы $y = x^2$ расположить цепочку касающихся окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ так, что ω_1 касается параболы в ее вершине и радиус ω_1 равен $1/2$[1], то радиус ω_n равен $n - \frac{1}{2}$ – это задача М.Евдокимова со Всероссийской олимпиады 1998 года. А что получится, если продолжить вписывать окружности в образовавшиеся криволинейные треугольники (рис.1)? Итак, пусть окружность c_1 касается ω_1, ω_2 и параболы, окружность c_2 касается ω_2, ω_3 и параболы и т.д. Оказывается, радиус c_n равен $n/4$ (а центр и точка касания с параболой имеют ординаты $n^2 - \frac{1}{8}$ и $n^2 - \frac{1}{4}$ соответственно).

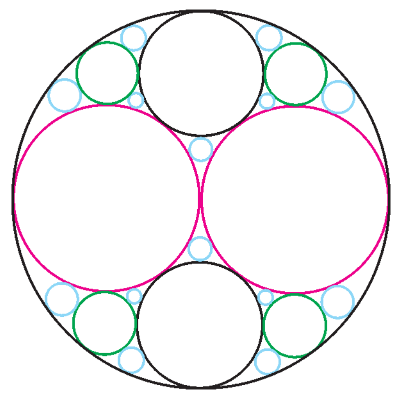


Рис. 2

Рассмотрим еще одну ситуацию: в окружность радиуса 1 впишем две касающиеся между собой окружности радиуса $1/2$. Затем впишем окружности, касающиеся внутренним образом окружности радиуса 1 и внешним образом окружностей радиуса $1/2$. Процесс вписывания продолжим: в криволинейный треугольник между любыми тремя окружностями вписываем окружность (рис.2). Можно доказать, что радиусы всех окружностей из описанного бесконечного множества равны числам вида $1/n$, где n – натуральное.

Аналогичную конструкцию рассмотрим в пространстве: в сферу радиуса 1 впишем две касающиеся между собой сферы радиуса $1/2$. Далее впишем сферу, касающуюся внутренним образом сферы радиуса 1 и внешним образом сфер радиуса $1/2$. Процесс вписывания продолжим: между любыми четырьмя сферами вписываем сферу. Оказывается, радиусы всех полученных сфер тоже равны числам вида $1/n$.

Мы предлагаем читателю доказать и, возможно, обобщить предложенные факты (в основе доказательства последних двух фактов лежит формула Содди, связывающая радиусы четырех попарно касающихся окружностей или пяти попарно касающихся сфер, – см. например, книгу: В.В.Прасолов, В.М.Тихомиров. *Геометрия.* – М.: МЦНМО, 2007. – Задача 1.21,а). А может быть, вам удастся сделать другие интересные наблюдения, связанные с касанием окружностей.

В.Расторгуев

[1] *Заметим, что значение радиуса для ω_1 выбрано не случайно. Дело в том, что радиус кривизны параболы $y = x^2$ в ее вершине равен 1/2. Подробнее о радиусе кривизны можно прочитать, например, в книге: В.Г.Болтянский. Огибающая. – Серия «Популярные лекции по математике». – М.: Физматлит, 1961.*

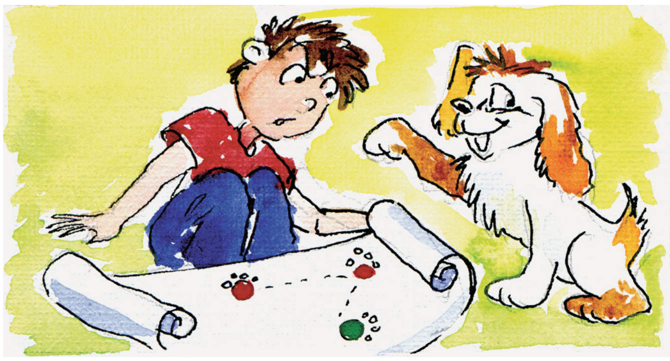
Задачи

1. Вдоль реки расположены пристани *А*, *Б*, *В*, *Г* (именно в таком порядке). От *В* до *А* теплоход плывет 1 час, от *В* до *Г* – тоже 1 час, а от *Б* до *Г* – 2 часа. В какую сторону течет река – от *А* к *Г* или от *Г* к *А*?

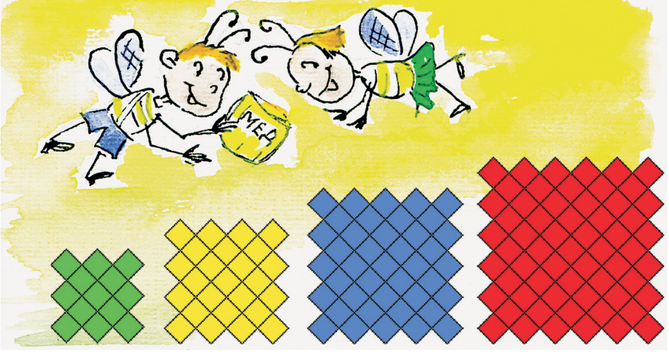
О.Иванова

2. Отметьте на листе бумаги две красные, две желтые и две зеленые точки и соедините их отрезками так, чтобы получилось пять равносторонних треугольников с разноцветными вершинами.

Э.Лементаренко



3. Все фигуры, изображенные на рисунке, составлены из нескольких квадратиков. Иногда такие фигуры



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

называют ступенчатыми квадратами. Докажите, что число квадратиков в каждом ступенчатом квадрате равно сумме двух квадратов натуральных чисел.

Н.Авилов

4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что произведения

$1\frac{1}{10}\cdot 1\frac{1}{11}\cdot\ldots\cdot 1\frac{1}{98}\cdot 1\frac{1}{99}$ и $1\frac{1}{100}\cdot 1\frac{1}{101}\cdot\ldots\cdot 1\frac{1}{998}\cdot 1\frac{1}{999}$ – целые числа, причем их отношение тоже целое. Не ошибается ли барон?

Г.Гальперин

5. Штаб математиков состоит из нескольких комнат, соединенных коридорами по кругу. В каждой комнате стоит доска. Шпион проник в одну из комнат, имея при себе запас мела. Как ему определить количество комнат в штабе, если он может ходить по комнатам здания, писать мелом на доске и стирать с доски? (Изначально на досках могло быть что-нибудь написано; шпион не может выносить доску из комнаты.)

М.Прасолов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Хорошо темперированный клавир

И.ГЕЛЬФАНД, А.ШЕНЬ

Все знают, что одну и ту же мелодию можно играть в разных тональностях. Но что означают слова «одну и ту же»? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с другого: что такое мелодия? Формально говоря, мелодия – это сыгранные друг за другом звуки разной высоты. А что такое высота звука?

С точки зрения физики, звук – это колебания воздуха. Высота звука определяется *частотой* колебаний, т.е. количеством колебаний в секунду. Камертон, колеблющийся 440 раз в секунду (физики говорят «с частотой 440 герц»; название единицы частоты дано в честь немецкого физика Генриха Герца), дает ноту *ля* первой октавы.

На слух бóльшая частота соответствует более высоким нотам. Очень низкие и очень высокие звуки становятся уже неслышимыми. Считается, что человек может услышать звуки в диапазоне от 20 герц до 20 килогерц (хотя на самом деле у разных людей эти границы могут быть разными; с возрастом диапазон слышимых частот уменьшается).

Звук низкой частоты, который мы не слышим, иногда называют «инфразвуком», высокой – «ультразвуком». С помощью ультразвуков разговаривают друг с другом дельфины.

Частота тока в электросети – 50 герц, т.е. 50 колебаний в секунду (это относится к Европе, в Америке – 60 герц). Если из-за неисправности сетевой фон проникает в звуковой тракт магнитофона, слышно низкое гудение.

Задача 1. Натягивая струну сильнее, мы изменяем частоту колебаний. Как вы думаете, увеличивается частота или уменьшается? Попробуйте сделать это с натянутой ниткой.

Задача 2. Зажимая струну (например, гитары) пальцем, мы как бы уменьшаем ее длину, почти не меняя натяжения. Как вы думаете, что происходит с высотой звука?

Задача 3.Пластинку на 33 оборота поставили на 45; как изменится частота всех записанных на ней звуков?

Задача 4. Где в рояле более низкие ноты – слева или справа? Как это связано с формой рояля?

Задача 5. Комар зудит почти как камертон. Сколько взмахов в секунду делают его крылья?

Задача 6. Как вы думаете, кто издает более высокий звук – комар или большая муха?

Глава из книги: И.Гельфанд, А.Шень. Алгебра. – М.: МЦНМО, 2009.

Оказывается, что на слух в первую очередь воспринимаются *отношения частот* соседних звуков мелодии, а не сами частоты. Лишь немногие люди с «абсолютным слухом» (далеко не у всех музыкантов он есть) могут отличить взятую на рояле ноту *ля* от ноты *соль*. Однако почти каждый человек после небольшой практики легко отличит интервал *ре*–*ля* (квинта, отношение частот *ре* : *ля* = 2 : 3) от *ре*–*соль* (кварта, отношение частот *ре* : *соль* = 3 : 4).

Задача 7. Найдите отношение частот соседних нот *соль* и *ля*, используя эти данные.

Теперь мы можем сказать, какие мелодии звучат одинаково (отличаясь лишь «тональностью») – это те, в которых одинаковы *отношения частот*.

Задача 8. Мелодия *ля*–*ми*–*ля* (нисходящая) состоит из трех нот с частотами 440, 330 и 220 герц. Какими будут частоты, если сыграть такую же (с теми же отношениями частот) мелодию, начиная с ноты *ми* (ее частота 330 герц)?

▷ Согласно сказанному, нужно, чтобы

$$440 : 330 : 220 = 330 : x : y.$$

Поскольку

$$440 : 330 : 220 = 4 : 3 : 2,$$

получаем $y = 330 \cdot (1/2) = 165$, $x = 330 \cdot (3/4) = 247{,}5$. Соответствующие ноты называются *ми*–*си*–*ми*. ◁

Посмотрев на клавиатуру рояля, легко заметить, что она «периодична»: одни и те же комбинации белых и черных клавиш повторяются – как говорят, в «разных октавах». Отстоящие на период (на октаву) ноты называются одинаково и отличаются по частоте ровно в 2 раза. Таким образом, ноты *ля* в разных октавах имеют частоты

$$\ldots 55,\ 110,\ 220,\ 440,\ 880,\ 1760,\ \ldots$$

образующие геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Задача 9. Как много октав может быть у рояля, если все должны быть слышны? (Считайте, что слышны звуки в диапазоне от 20 до 20000 герц.)

Геометрическую прогрессию образуют не только ноты *ля*, но и другие одноименные ноты: ноты *соль* образуют еще одну геометрическую прогрессию (также со знаменателем 2), ноты *фа* – третью и так далее.

Задача 10. Глядя на клавиатуру рояля (рис.1), подсчитайте, сколько всего прогрессий получается (сколько нот в одной октаве).

Ответ. 12 (7 белых клавиш и 5 черных).

Рис. 1

Названия нот: черная клавиша между *до* и *ре* называется *до диез* или *ре бемоль*, между *ре* и *ми* – *ре диез* или *ми бемоль*, и так далее. (Тем самым *диез* обозначает повышение звука, а *бемоль* – понижение.) Музыканты используют значок ♯ для *диеза* и ♭ для *бемоля*. Используя их, можно записать: *до*♯ = *ре*♭.

Задача 11. Что должен сделать пианист, чтобы сыграть мелодию с удвоенными частотами всех нот?

▹ Сдвинуть руку вправо на октаву и играть как обычно. ◃

Теперь сыграем на рояле *хроматическую гамму*, нажимая все клавиши (белые и черные) подряд слева направо:

$$до \to до\sharp = ре\flat \to ре \to ре\sharp = ми\flat \to ми \to фа \to$$
$$\to фа\sharp = соль\flat \to соль \to соль\sharp = ля\flat \to ля \to$$
$$\to ля\sharp = си\flat \to си \to до \to \ldots$$

Оказывается,

частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию.

Мы увидим, почему так получается, чуть позже.

Задача 12. Считая, что частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию, найдите знаменатель прогрессии.

▹ Обозначим частоту ноты *до* за c, а искомый знаменатель – за q. Тогда *до*♯ = *ре*♭ имеет частоту $c \cdot q$, *ре* имеет частоту $c \cdot q^2$ и так далее:

до	до♯	ре	ре♯	ми	фа	фа♯
c	cq	cq^2	cq^3	cq^4	cq^5	cq^6

соль	соль♯	ля	ля♯	си	до
cq^7	cq^8	cq^9	cq^{10}	cq^{11}	cq^{12}

Нота *до* следующей октавы имеет вдвое большую частоту, так что $cq^{12} = 2c$. Отсюда $q^{12} = 2$, $q = \sqrt[12]{2}$ ◃

Музыканты называют интервал между соседними нотами *полутоном*. Октава состоит, таким образом, из 12 полутонов, и на каждый полутон приходится увеличение частоты в $\sqrt[12]{2}$ раз.

Задача 13. Между нотами *до* и *ре* два полутона (или один тон, как говорят музыканты). Найдите отношение частот этих нот.

▹ $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = \sqrt[6]{2}$. ◃

Теперь объясним, почему хроматическая гамма дает геометрическую прогрессию. Это необходимо для того, чтобы любую мелодию можно было сыграть, начиная с любой ноты. Поясним это на примере простейшей мелодии из двух нот: *до* и *до диез*. Сыграем ее, начиная с *до диеза*: *до диез* – *ре*. Чтобы эти мелодии звучали одинаково, нужно, чтобы отношения частот были равны:

$$\frac{ре}{до\sharp} = \frac{до\sharp}{до}.$$

А это и есть определение геометрической прогрессии.

Задача 14. Для какой ноты x мелодии $до \to x$ и $x \to до$ (до следующей октавы, т.е. удвоенной частоты) будут звучать одинаково?

Такой интервал музыканты называют «тритоном». Он как бы делит октаву пополам, на два равных интервала.

Задача 15. Фуга до минор из первого тома «Хорошо темперированного клавира» Баха открывается такой темой (рис.2). Затем эта же тема (с одним изменением) проходит в другой тональности (рис.3). Найдите измененное место. Знаки ♯ или ♭ перед нотой означают повышение и понижение на полтона. Обозначения нот указаны на рисунке 4. (Мы просим прощения у музыкантов за то, что записываем мелодию без трех бемолей в ключе, как это принято.)

Вероятно, внимательный читатель уже заметил несогласованность в наших объяснениях.

Задача 16. Зная, что хроматическая гамма есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[12]{2}$, найдите отношение частот нот *ре* и *ля* (восходящая квинта).

▹ Между *ре* и *ля* семь полутонов, поэтому отношение частот равно $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7$. С помощью калькулятора его легко найти: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1{,}498\ldots$

Это близко к отношению 3 : 2, которое мы называли раньше, но все же не точно совпадает с ним. ◃

Задача 17. Найдите отношение частот в восходящей квинте *ре* – *соль* и сравните его с отношением 4 : 3, которое мы называли раньше.

▹ $\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = 1{,}3348\ldots$; $4/3 = 1{,}3333\ldots$ ◃

Рис. 2

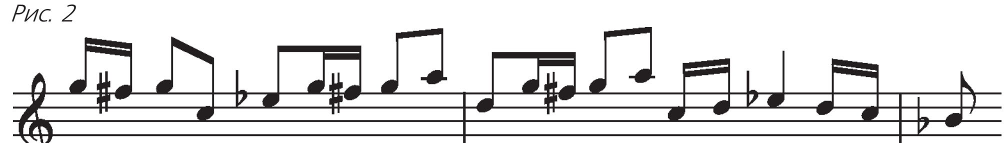


Рис. 3

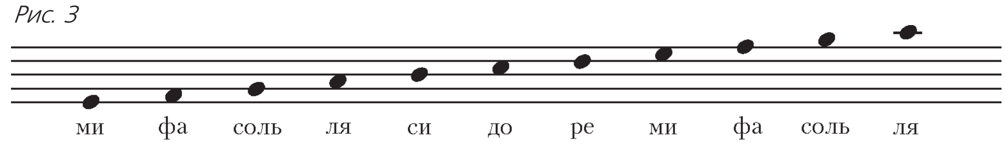


Рис. 4

Так что же такое квинта – отношение частот $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7$ или 3 : 2?! В некотором смысле оба ответа правильны. Сейчас мы попробуем объяснить, что имеется в виду.

Если вы услышите одну ноту, а через минуту другую, то не почувствуете гармонии или дисгармонии. Но если сыграть ноты одну за другой или даже обе сразу, то станет слышно, хорошо ли они звучат вместе. Скрипач, настроив одну из струн по камертону (на практике обычно по роялю аккомпаниатора или гобою в оркестре), затем настраивает вторую так: ведя смычком по обеим струнам, он регулирует натяжение второй струны, пока они не будут хорошо («чисто») звучать вместе.

В каком случае две ноты образуют гармоничный интервал? Оказывается, это бывает, когда *их частоты относятся друг к другу как небольшие целые числа.* Почему так получается, мы говорить не будем – для этого нужно знать немного тригонометрии. Вместо этого перечислим некоторые интервалы и их названия (см. табл.1).

Таблица 1

Интервал	Название интервала	Интервал	Название интервала
2 : 1	октава	4 : 3	кварта
3: 2	квинта	5 : 4	большая терция

Задача 18. Вторая нота восходящей мелодии образует с первой октаву, а третья со второй – квинту. Как относятся друг к другу частоты третьей и первой нот?

Ответ. 3 : 1.

Задача 19. Тот же вопрос, если третья нота образует со второй большую терцию.

Такие «чистые» интервалы получаются при игре на скрипке или других инструментах, где можно непрерывно менять высоту звука. На рояле чистых интервалов не получается, поскольку все отношения частот являются степенями числа $q = \sqrt[12]{2}$ (см. табл.2).

Таблица 2

Название интервала	Чистый интервал	Интервал на рояле	
малая терция	6 : 5 = 1,2	1,1892...	q^3
большая терция	5 : 4 = 1,25	1,2599...	q^4
кварта	4 : 3 = 1,333...	1,3348...	q^5
квинта	3: 2 = 1,5	1,4983...	q^7
малая секста	8 : 5 = 1,6	1,5874...	q^8
большая секста	5 : 3 = 1,666...	1,6817...	q^9
октава	2 : 1 = 2	2	q^{12}

Конечно, можно попросить настройщика настраивать рояль иначе – так, чтобы некоторые интервалы были чистыми. Тогда другие интервалы станут еще более далекими от чистых и красивая мелодия, начатая с другой ноты, может звучать ужасно.

До XVIII столетия рояли (точнее, клавесины и органы – современный рояль появился позже) настраивали, стараясь сделать некоторые интервалы чистыми. При этом одни тональности звучали красиво, а другие (как правило, с большим числом черных клавиш) – ужасно, и композиторы старались их избегать, считая, что все равно нормальный органист в них играть не сможет.

Традиция делить тональности на «хорошие» и «плохие» и писать музыку только в хороших была поколеблена великим Бахом, который написал «Хорошо темперированный клавир» – сборник прелюдий и фуг. Он состоит из двух частей. В каждой части – 24 прелюдии и фуги, по одной в каждой мажорной и минорной тональности. Неизвестно, как в точности Бах настраивал свой клавесин – была ли это равномерная темперация, когда хроматическая гамма образует геометрическую прогрессию, или какая-то не вполне равномерная. Но современные исполнители играют его на равномерно темперированных роялях, на которых все интервалы (за исключением октавы) звучат не совсем чисто – но зато одинаково во всех тональностях.

Задача 20. Достаньте запись «Хорошо темперированного клавира» и послушайте.

В заключение обсудим вот какой вопрос: а почему, собственно, в октаве именно 12 нот (полутонов)? Что мешает изготовить рояль с 13 или 7 клавишами в каждой октаве? В этом случае отношение частот соседних нот было бы $\sqrt[13]{2}$ или $\sqrt[7]{2}$. Оказывается, что тогда основные интервалы (3 : 2, 4 : 3 и так далее) будут значительно менее чистыми.

Задача 21. Найдите отношения частот, если в октаве 7 (равноотстоящих) нот. Есть ли среди отношений сколько-нибудь близкие к 3/2 или 4/3? Сравните с приведенной выше таблицей для 12 нот.

Если вы проделаете аналогичные вычисления для других чисел нот в октаве, то убедитесь, что 12 является исключительно удачным выбором – при других (не слишком больших) числах приближения заметно хуже.

Замечательно, что музыканты использовали 12-тоновую систему, ничего не зная о геометрических прогрессиях и не делая никаких вычислений – подобно тому, как пчелы делали аккуратные шестигранные соты задолго до того, как люди установили, что именно такая форма оптимальна.