будут перекрываться. В этом случае, видимо, для оценки величины $\Sigma(K)$ требуется понять количество слоев, в которое они покрывают сферу. Как его оценить?

Именно этой оценкой мы и займемся в следующем разделе. Для этого нам придется изобрести несколько другой подход к задаче.

Проекции

Итак, рассмотрим выпуклый многогранник M и сферу единичного радиуса с центром O. Проведем через O плоскости, параллельные граням многогранника; они разделят сферу на несколько частей $K_1, \ldots, K_s$ (заметим, что для каждой части найдется часть, симметричная ей относительно O). Теперь, если мы опять же снесем многогранный угол при некоторой вершине A многогранника в точку O (получив некоторый угол S_A), то часть сферы, попавшая внутрь него, будет объединением нескольких из частей K_i (поскольку ее граница лежит в наших плоскостях). Отметим эти части, а также части, симметричные им относительно O (т.е. попавшие в центрально симметричный угол S'_A), – мы уже видели, что это полезно; окажется это полезным и в дальнейшем.

Проделаем такую операцию с каждой вершиной многогранника. Теперь для каждой части разбиения K_i посчитаем количество t_i раз, которое мы ее отмечали. Иначе говоря, t_i – это количество многогранных углов, в которые попала она или симметричная ей часть сферы; это количество, вообще говоря, может быть любым неотрицательным целым числом.

Теперь ясно, что сумма всех телесных углов при вершинах многогранника будет равна

$$\Sigma(M) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} t_i S(K_i), \qquad (2)$$

где $S(K_i)$ – это площадь части K_i (множитель $\frac{1}{2}$ появился из-за того, что каждый телесный угол мы посчитали дважды). Наша ближайшая цель – описать числа t_i в других терминах.

Рассмотрим точку T, лежащую строго внутри части K_i. Заметим, что прямая OT не параллельна ни одной грани многогранника M (иначе T лежала бы на границе части). Проведем плоскость α, перпендикулярную OT (мы будем считать, что α горизонтальна), и спроектируем наш многогранник на плоскость α; в проекции получится выпуклый многоугольник N. Мы будем обозначать через $\pi(X)$ проекцию произвольной точки X.

Рассмотрим произвольную вершину A нашего многогранника и выясним, где будет лежать точка $\pi(A)$. Пусть a – прямая, проходящая через A перпендикулярно α (иными словами, $a \parallel OT$). Эта прямая пересекается с M либо по некоторому отрезку (и тогда A является одним из его концов), либо только по точке A. Рассмотрим оба этих случая.

Случай 1 (рис.13). Пусть прямая пересекается с многогранником по отрезку AB. Тогда внутренние точки этого отрезка также будут являться внутренними

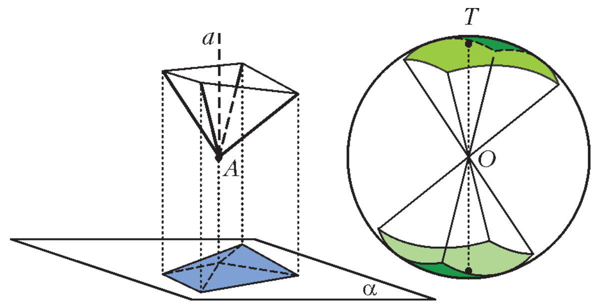


Рис. 13

точками многогранника; это значит, что $\pi(A)$ лежит строго внутри многоугольника N.[3]

С другой стороны, отрезок AB лежит внутри многогранного угла с вершиной A; это и значит, что точка T лежит внутри одного из углов S_A или S'_A.

Случай 2 (рис.14). Пусть теперь прямая пересекается с многогранником только по вершине A. Тогда, как мы уже видели при доказательстве теоремы 1, через эту прямую можно провести плоскость β, пересекающую

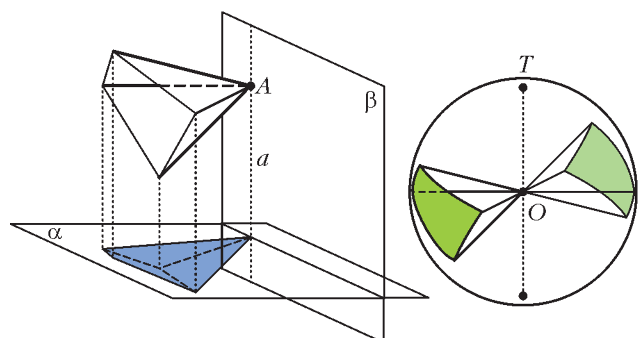


Рис. 14

наш многогранный угол (а следовательно, и весь многогранник) ровно по вершине A. Это значит, что многогранник M лежит по одну сторону от β; но тогда и многоугольник N будет лежать по одну сторону от β, имея с ней только одну точку пересечения – $\pi(A)$. Такое возможно лишь в том случае, если $\pi(A)$ – вершина N.

С другой стороны, поскольку прямая a проходит вне многогранного угла с вершиной A, мы получаем, что точка T не лежит ни в одном из углов S_A и S'_A.

Итого, мы получили следующее описание величины t_i.

Теорема 3. *Число t_i равно количеству вершин многогранника M, проекции которых попадают строго внутрь многоугольника N. Проекции же остальных вершин являются вершинами N.*

Заметим еще, что каждая вершина B многоугольника N является проекцией одной из вершин многогранника. Действительно, если b – прямая, пересекающая N ровно по вершине B, то вертикальная плоскость, проходящая через b (т.е. плоскость, проходящая через b и параллельная OT), будет пересекать M также ровно по одной точке; она и будет искомой вершиной.

[3] *Действительно, если X – внутренняя точка отрезка AB, то найдется маленький шарик с центром в X, лежащий внутри M. Этот шарик перейдет в круг с центром в $\pi(X) = \pi(A)$, лежащий внутри N.*

Далее, выясним, какие точки многогранника M переходят в точки контура многоугольника N. Пусть $\pi(A)$ и $\pi(B)$ – две соседние вершины многоугольника N (A и B – вершины многогранника M). Проведем через прямую $\pi(A)\pi(B)$ вертикальную плоскость γ. Многогранник M будет лежать по одну сторону от нее, причем в этой плоскости будет лежать отрезок AB, принадлежащий многограннику. Заметим, что больше точек многогранника в этой плоскости не будет; иначе в этой плоскости будет лежать грань M, что невозможно. Но тогда AB является ребром многогранника M!

Итак, любая сторона многоугольника N является проекцией ребра многогранника M. Значит, контур многоугольника N является проекцией некоторого замкнутого несамопересекающегося пути по ребрам многогранника N (назовем такой путь *циклом*).

Оценка на $\Sigma(M)$

Теперь мы готовы выписать оценку на $\Sigma(M)$.

Теорема 4. *Рассмотрим выпуклый многогранник M; пусть у него n вершин, и пусть $l_{\min}$, $l_{\max}$ – соответственно наименьшее и наибольшее количество ребер в цикле, проходящем по ребрам M. Тогда*

$$2\pi(n-l_{\max}) \le \Sigma(M) \le 2\pi(n-l_{\min}). \qquad (3)$$

Замечание. Все условия в теореме зависят только от комбинаторного типа многогранника; таким образом, теорема позволяет оценить сумму телесных углов любого многогранника данного комбинаторного типа.

Доказательство теоремы. Для любой из частей K_i рассмотрим точку T_i внутри нее и проекцию N_i многогранника M на соответствующую плоскость. Мы уже знаем, что граница N_i является проекцией некоторого цикла; значит, количество вершин N_i не меньше $l_{\min}$ и не больше $l_{\max}$. Значит, количество t_i вершин, чьи проекции лежат внутри N_i, удовлетворяют соотношению $n-l_{\max} \le t_i \le n-l_{\min}$, поэтому из (2) получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} S(K_i)(n-l_{\max}) \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} S(K_i)t_i =$$

$$= \Sigma(M) \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} S(K_i)(n-l_{\min}).$$

Поскольку площадь единичной сферы равна $\sum_{i=1}^{s} S(K_i) = 4\pi$, мы получаем требуемое.

Из теоремы сразу следует

Решение задачи М2153. Пусть $\Sigma(M)=\pi$. Тогда $2\pi(n-l_{\max}) \le \Sigma(M) = \pi$, откуда $n-l_{\max} \le \frac{1}{2}$. Значит, $l_{\max} = n$, и существует цикл, проходящий по всем n вершинам многогранника.

Несложно и более явно описать этот цикл. Если мы отметим все многогранные углы M и симметричные им на нашей сфере, то мы отметим области суммарной площади $2\pi < 4\pi$; значит, некоторая точка T сферы останется непокрытой. Спроектировав наш многогранник на плоскость, перпендикулярную OT, мы получим в проекции n-угольник. В его границу и проектируется требуемый цикл.

Задача 2. Ясно, что $l_{\min}$ не превосходит минимального количества вершин в грани. А существует ли многогранник, в котором $l_{\min}$ строго меньше, чем это минимальное количество?

Точные границы для $\Sigma(M)$

После доказательства предыдущей теоремы естественным образом возникает вопрос – а точны ли оценки в этой теореме? Нельзя ли их иногда заменить на более точные? Иными словами – если в многограннике минимальное и максимальное количество ребер в цикле равны $l_{\min}$ и $l_{\max}$, правда ли, что существуют многогранники того же комбинаторного типа, у которых суммы телесных углов «почти достигают» значений, указанных в теореме 4?

Полный ответ на этот вопрос дал Д.Барнетт [3]; оказывается, оценки всегда точны! Однако, к сожалению, доказательство этого выходит за рамки этой статьи; мы ограничимся ответом на существенно более легкий вопрос. А именно, мы докажем следующее.

Теорема 5. *Рассмотрим все выпуклые многогранники некоторого комбинаторного типа с n вершинами, а также все их проекции (на плоскости, не перпендикулярные граням). Пусть $l'_{\min}$ и $l'_{\max}$ – наибольшее и наименьшее возможное количество сторон в таких проекциях. Тогда для любого выпуклого многогранника M данного типа выполнены неравенства*

$$2\pi(n-l'_{\max}) \le \Sigma(M) \le 2\pi(n-l'_{\min}), \qquad (4)$$

причем эти оценки нельзя заменить на лучшие.

Замечание 1. Это – тоже интересное утверждение! Оно говорит, что *точная нижняя грань* и *точная верхняя грань* для $\Sigma(M)$ всегда являются целыми кратными числа 2π. Иначе говоря, если, например, мы знаем, что существует многогранник M данного комбинаторного типа с $\Sigma(M)=5\pi$, то мы также можем быть уверены в существовании многогранников M' и M'' того же типа, для которых $\Sigma(M') < 4\pi + 0,001$ и $\Sigma(M'') > 6\pi - 0,001$.

Замечание 2. Поскольку при определении величины $l_{\min}$ рассматриваются все циклы, а при определении $l'_{\min}$ – только те, которые могут попасть на границу некоторой проекции, то, очевидно, $l'_{\min} \ge l_{\min}$. Аналогично, $l'_{\max} \le l_{\max}$.

Доказательство теоремы. Доказательство самой оценки (4) повторяет доказательство теоремы 4: достаточно заметить, что в нем реально рассматриваются только циклы, проекции которые могут оказаться границей проекции всего многогранника; количество же сторон в любом таком цикле не меньше $l'_{\min}$ и не больше $l'_{\max}$. Осталось доказать, что оценки точны.

Рассмотрим многогранник M данного комбинаторного типа, который при проектировании на плоскость α дает многоугольник с l сторонами (можно считать, что M лежит по одну сторону от α). Пусть в нем n вершин, причем $A_1, A_2, \ldots, A_l$ – вершины многогранника, проецирующиеся в вершины l-угольника, а $B_1, \ldots, B_m$ – все остальные вершины (проецирующиеся внутрь l-угольника); тогда $m = n - l$. «Сожмем» многогранник к плоскости α с большим коэффициентом N; иначе говоря, сдвинем каждую его точку по перпендикуляру к плоскости α так, чтобы расстояние от нее до α уменьшилось в N раз (рис.15).

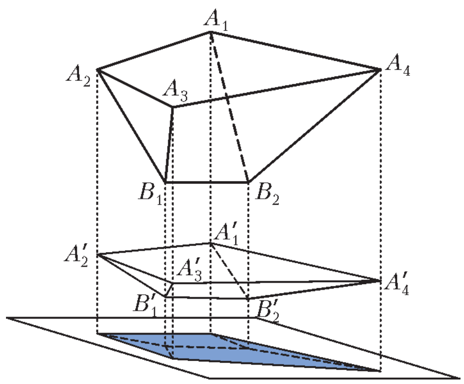


Рис. 15

У нас получился многогранник M' того же комбинаторного типа с вершинами $A_1', \ldots, A_l', B_1', \ldots, B_m'$. Нетрудно понять, что если выбрать N достаточно большим, то все телесные углы при вершинах A_i' станут очень маленькими (скажем, меньше ε), а все телесные углы при вершинах B_j' будут сколь угодно близки к 2π (скажем, будут больше чем $2\pi - \varepsilon$). Тогда мы получаем, что

$$l \cdot 0 + (n-l)(2\pi - \varepsilon) < \Sigma(M') < l\varepsilon + (n-l)2\pi .$$

Поскольку $l \le n$, получаем

$$2\pi(n-l) - n\varepsilon < \Sigma(M') < 2\pi(n-l) + n\varepsilon .$$

Выберем теперь в качестве M многогранник, в проекции которого есть $l = l'_{\min}$ сторон (такой существует по определению $l'_{\min}$). Тогда мы получим многогранник M', для которого $\Sigma(M') > 2\pi(n - l_{\min}) - n\varepsilon$. Наоборот, выбирая многогранник M с проекцией из $l = l'_{\max}$, получаем многогранник M'' с $\Sigma(M'') < 2\pi(n - l_{\max}) + n\varepsilon$. Полагая ε сколь угодно малым, получаем, что оценки в (4) точны.

Опишем теперь суть вышеупомянутого результата Д.Барнетта. Рассмотрим некоторый выпуклый многогранник M и *произвольный* цикл из его ребер. Тогда можно построить многогранник такого же комбинаторного типа и его проекцию такие, что в границу проекции проецируется как раз этот цикл. Отсюда, разумеется, и следует, что $l_{\min} = l'_{\min}$, $l_{\max} = l'_{\max}$ (т.е. оценки в теореме 4 также точны).

Возвращаясь к задаче М2153, хочется заметить еще одну вещь. На первый взгляд может показаться, что в любом многограннике можно найти цикл, проходящий по всем вершинам, – такой цикл называется *гамильтоновым*. И действительно, не так-то просто построить пример многогранника, для которого это неверно; однако такие примеры существуют. Один из наиболее естественных примеров изображен на рисунке 16 (приведен его «вид сверху», невидимых ребер нет; этот пример взят из книги [2]). Читателю предоставляется самостоятельно доказать, что многогранник, изображенный на рисунке, существует и что в нем нет гамильтонова цикла.

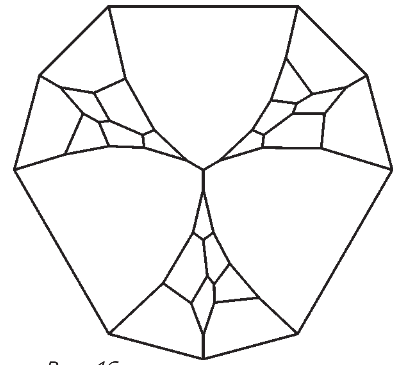


Рис. 16

Задачи

3. Постройте пример выпуклого многогранника M, в котором есть цикл длины 3, но любая проекция которого содержит хотя бы 4 стороны. Как оценить снизу сумму телесных углов такого многогранника?

4. Можно показать, что утверждение теоремы 5 остается справедливым, если вместо обычной параллельной проекции рассматривать проекцию центральную (естественно, проекцией нашего многогранника должен являться многоугольник, т.е. эта проекция должна быть ограниченной). Существует ли выпуклый многогранник, в котором есть цикл длины 3, но любая (ограниченная) центральная проекция которого содержит хотя бы 4 стороны? [4]

5. Найдите точные оценки для $\Sigma(M)$, где M – выпуклый многогранник, комбинаторно эквивалентный кубу. Приведите примеры, показывающие, что эти оценки точны.

6. Пусть выпуклый многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ комбинаторно эквивалентен кубу. Назовем его *проективно эквивалентным кубу*, если его главные диагонали AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 пересекаются в одной точке.[5] Найдите точные оценки на сумму телесных углов такого многогранника.

7. В теореме 5 доказаны точные верхняя и нижняя оценки на величину $\Sigma(M)$, где M – многогранник данного комбинаторного типа. Тем не менее, не доказано, что $\Sigma(M)$ может принимать все значения из интервала $(2\pi(n - l'_{\max});\ 2\pi(n - l'_{\min}))$! Попробуйте доказать это утверждение.[6]

Список литературы

1. Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики*. Часть 2. Геометрия (Планиметрия). – М.: ГИТТЛ, 1952.

2. Ф.Харари. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973.

3. D.W.Barnette. *Projections of 3-polytopes*. – Israel J. Math, Vol. 8, 1970, pp. 304–308.

4. D.W.Barnette. *The sum of the solid angles of a d-polytope*. – Geometriae dedicata. Vol. 1, Num. 1, 1972, pp. 100–102.

[4] *Задачи 3 и 4 уже показывают, что теорема Барнетта непроста.*

[5] *Для профессионалов: это означает, что существует проективное преобразование, которое переводит M в куб.*

[6] *Сразу заметим, что соображения, которые мы приводили для тетраэдра, могут не сработать. Именно, непонятно, каким образом можно непрерывно деформировать многогранник, в котором есть нетреугольные грани и вершины, в которых сходится больше трех граней: эти условия не так легко соблюсти при непрерывной деформации.*

105 лет академику С. М. Никольскому

30 апреля 2010 года исполнилось 105 лет выдающемуся российскому математику и педагогу, академику РАН Сергею Михайловичу Никольскому.

С.М.Никольский – признанный глава научной школы теории функций и ее приложений, автор свыше двухсот научных публикаций, в том числе трех монографий, двух учебников для вузов и семи – для школ. Многие из его книг вошли в золотой фонд отечественной и мировой литературы по математике благодаря высокому научному уровню и доступности изложения. Его учебники по математическому анализу переведены на многие языки мира.

Как ученый, С.М.Никольский имеет немало последователей, более сорока его учеников защитили кандидатские диссертации, одиннадцать стали докторами физико-математических наук. Неоценимый вклад С.М.Никольский внес в совершенствование системы образования в нашей стране.

С.М.Никольский – трижды лауреат Государственной премии, лауреат премии Правительства РФ, премии МГУ имени М.В.Ломоносова «За выдающийся вклад в развитие образования». В 2005 году удостоен звания «Легенда века». Награжден орденами Трудового Красного Знамени, Ленина, Октябрьской Революции и медалями ряда академий.

Поздравляем Сергея Михайловича с юбилеем, желаем здоровья, радости от общения с родными и близкими, успехов во всех делах!

Сергей Михайлович Никольский

Начало

(По воспоминаниям С.М.Никольского из книги «Как я стал математиком»)

Я родился 30 апреля 1905 года в Пермской губернии, в 100 км от Тюмени, в поселке Завод Талица. В этом поселке была Лесная школа, в которой преподавал мой отец, помощник лесничего. Отец закончил в 1896 году Петербургский лесной институт имени Александра III. Через год после моего рождения он получил должность лесничего и назначение работать на крайний запад, на границу с Германией. Теперь эта территория принадлежит Польше. Там я провел детство в лесной деревне, в играх с местными деревенскими польскими мальчишками. Грамоту и счет я одолел походя, легко. Некоторое обучение я получил со стороны матери – она до замужества была сельской учительницей.

Науки давались мне довольно легко. Полчаса перед обедом мать учила арифметике, чтению, молитве. Но главный интерес к точным наукам привил отец. Он проходил в институте высшую математику и умел очень интересно рассказывать.

В восемь лет меня приняли в подготовительный класс. Оказалось, что все, чему меня там учили, я уже знал. Через год был экзамен в 1-й класс. Учитель математики с университетским значком спросил меня, сколько будет 10 помножить на 11. Хотя это не входило в программу поступления в 1-й класс, но я быстро ответил. Тогда он спросил, сколько будет 11 помножить на 12. Я тоже ответил. Тогда он оживился и стал спрашивать, сколько будет 13 на 14, 15 на 17, 16 на 17 и так почти до тысячи. После некоторых раздумий я давал правильные ответы. Он поставил мне «пять». Так я держал первый экзамен по арифметике.

Летом 1914 года началась мировая война, а мы жили в 20 км от германской границы. Отец послал семью на восток, в тыл, а сам остался в лесничестве. Так мы оказались в Чернигове. Здесь я поступил в классическую Черниговскую гимназию имени Александра I Благословенного. В связи с войной переводные экзамены из класса в класс были отменены. Первые два года обучение происходило нормально. Фронт был далеко. Я успел хорошо освоить арифметику – по Киселеву. В 3–4-м классах гимназии изучалась алгебра. По математике мне обыкновенно ставили «пятерки». Я любил решать задачи.

К концу войны началась революция, потом в Чернигов пришли немцы. Так мы прожили до 1918 года. Наш отец жил отдельно от семьи, главным образом, в Петербурге. Но в 1918 году он получил назначение в лесничество на юге Воронежской губернии, в знаменитый Шипов лес, и вызвал к себе семью. Так мы стали жить на краю величественного дубового леса, корабельного леса, но вдали от городов. На расстоянии 30 км от нас в ту и в другую сторону были уездные города, а здесь был только лес и деревня.

С 1918 и по конец 1921 года я не учился, успев проучиться в гимназии только в первых четырех классах. А в Шиповом лесу мне пришлось работать в лесничестве, зарабатывать деньги. Сначала мы жили на зарплаты, которые сильно удешевлялись, деньги переставали иметь какую-либо ценность. Кроме того, случились сильные недороды, большие засухи. Так что довольно скоро мы стали жить в сравнительно тяжелых условиях, настолько тяжелых, что в начале 1921 года отец устроил меня работать помощником садовника в совхозе, там все-таки кормили. Но и в этих условиях я кое-чему учился. И даже многому научился. От отца.

Он время от времени занимался с детьми, от него я узнал всю среднюю математику. От него я впервые узнал, что есть уравнения – линейные и квадратные, что есть такая парабола. Правда, мы не очень занимались вопросом, как ведет себя парабола, если она задана уравнением $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. Но я хорошо себе представлял параболу $y = x^2$ или $y = ax^2$. Больше того, отец знал начала анализа. Эти сведения я тоже получил от него. Я умел дифференцировать, знал, что производная геометрически изображается касательной, и так далее. Все это я хорошо усвоил, не учась в школе.

Так случилось, что летом 21-го года моего отца убили бандиты. И в это время был довольно сильный недород. Два моих брата умерли от холеры, и с остатками семьи мы уехали обратно в Чернигов, где в то время можно было, по крайней мере, как-то нормально питаться. В Поволжье и в тех местах, где мы раньше жили, было очень голодно.

В Чернигов стекалось много столичных людей, потому что в столице было трудно жить. Среди них были и преподаватели, получившие достаточно высокое математическое образование. Вот один из таких учителей как раз и экзаменовал нас при поступлении на подготовительное отделение в техникум. Он не очень следовал программам, а спрашивал так, как считал нужным. Каждый экзаменующийся приходил к нему с бумажкой. И он быстро писал два вопроса, на которые после обдумывания экзаменующийся должен был ответить.

У меня тоже было два вопроса. Первый – нарисовать параболу $y = x^2 + 4$. Параболу я построил по точкам довольно легко. А второй вопрос должен был иметь теоретический характер. Учитель хотел, чтобы я что-то рассказал про дистрибутивный закон, но так небрежно написал на бумажке $(a + b)n$, что я подумал, что n находится в показателе степени. Но я знал бином Ньютона – со всеми сочетаниями...

Нас экзаменовал еще и комиссар, приехавший из обкома. Он терпеливо и с большим удивлением слушал, как я выводил по всем правилам математического искусства формулу бинома Ньютона. А когда я закончил, он сказал: «Так тебе же дали совсем другое».

Теперь, когда я вспоминаю тот случай, то думаю, что если бы я знал, что там написан дистрибутивный закон, то оказался бы в большом затруднении, потому что не знал, что мне надо сказать... Эту философию я совсем не знал. Скобки раскрыть для меня не было проблемы, а что говорить при этом, я не знал.

В то время в Чернигове, в техникуме в частности, были преподаватели очень высокой квалификации. Был там один математик Давыдов, который очень талантливо рассказал о теории вероятностей. Он какие-то примеры приводил, быстро переходил к условной вероятности, математическому ожиданию – все это он рассказал нам почти на пальцах буквально за два урока. Я не хочу сказать, что все знал, находясь в лесу, я кое-что еще добавил к своим знаниям в техникуме.

Про меня еще мой отец говорил: «Серега у нас математик. Будет инженером». И я считал, что буду инженером. Каким? Об этом я тогда еще не думал. В техникуме первый год я был на механическом факультете.

В нашем общежитии жили и студенты-математики. Были такие, которые считали, что учатся в слабом институте и еще поедут учиться в Петербург. И я так думал: вот поеду в Петербург, поступлю там в какой-нибудь технический вуз. Тогда о техническом вузе мечтали многие, в особенности те, кто чувствовал, что в математике что-то смыслит.

Так что были такие ребята, которые обзаводились какими-то задачниками, и по ходу дела им надо было решить какую-то задачу по математике. Я, бывало, спрошу: «Какую задачу тебе надо решить? Давай я попробую». И, как правило, решал. Даже не «как правило», а просто не было ни одного случая, чтобы я не решил. Я даже стал немножко зазнаваться. Они говорили, что я не решу, а я им – что нет, решу. И добавлял: «За полчаса решу». Они брали часы, отмеряли полчаса, я в это время над какой-нибудь тригонометрической задачей думал. Это факт, что я решал задачи и даже ходил на «пари». Такое было мое отношение к математике. Я с удовольствием и с интересом решал различные математические задачи, но сам себе эти задачи особенно не задавал и подряд из задачника не решал. Но если было нужно, то решал задачи с удовольствием и с интересом – это факт.

Потом я поступил на математическое отделение Екатеринославского университета с тем, чтобы через год перевестись в инженерный вуз. Но по мере того, как я там учился и стал изучать книжки соответствующие, я пришел к заключению, что математика очень интересная и глубокая наука, настолько интересная, что мне надо продолжать учиться именно математике. Я решил, что буду профессионалом-математиком. Пусть я буду только учителем математики, и пусть мне будут платить меньше, но все равно я хочу быть математиком.

Квантовые и волновые явления в наномире

В.ТИМОШЕНКО

В обычной жизни, наблюдая движение какого-либо объекта, люди стремятся узнать как можно точнее основные характеристики такого движения. Например, нам нужно знать точное расписание движения электрички или автобуса, чтобы вовремя добраться к желанной цели. Человек хочет иметь данные о движении планет и законах вращения Земли, чтобы предсказать природные явления, а порой и просто составить астрологический прогноз, хотя тот и не имеет к научному знанию никакого отношения.

В классической физике стремление к точности описания движения тел формализуется постановкой задачи о нахождении закона движения, а именно – формулы или графика, описывающих, как тело переместилось из точки A в точку B за время t. И чем точнее решается данная задача, тем лучше. То, что подобная задача должна иметь точное решение, составляет суть идеи детерминизма в физике, наиболее ярким и полным выразителем которой стал великий французский ученый XVIII–XIX веков Пьер Лаплас.

Но если лапласовский детерминизм является основным в классической физике, включая небесную механику, то для микромира и столь популярных в настоящее время наносистем, представляющих собой тела или совокупности тел с характерными размерами от 1 до 100 нм, использование методологии детерминизма требует серьезного переосмысления. Оказывается, что в наносистемах точное знание законов движения порой не представляется возможным, а само движение это уже не простое перемещение, а нечто подобное волне, когда максимум сменяется минимумом и наоборот. Но как же быть тогда с основной задачей нанотехнологий – создавать наносистемы, наноматериалы и нанообъекты с нанометровой точностью и знать о поведении таких объектов с наносекундным или даже субнаносекундным временны́м разрешением? Желание точности – весьма похвально. И не только для королей, метрологов или нанотехнологов. Точность и определенность – хорошие качества для любого образованного человека. Но, увы, в мире наноразмеров и наноперемещений, или, проще говоря, в наномире, стремление к максимальной точности упирается в ряд фундаментальных ограничений, которые если и не отменяют возможность сколь угодно точного описания движения материальных тел, то значительно изменяют смысл того, что мы можем узнать о движении на очень малых расстояниях.

Лаплас Пьер Симон (1749–1827) – французский астроном, математик и физик, член многих академий наук и научных обществ. Считается, что последними словами Лапласа были: «То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, что мы не знаем»

Само движение тела уже не может быть зачастую описано как перемещение из точки A в точку B, а скорее должно рассматриваться как движение волны, при котором можно лишь утверждать, что тело попадет в желаемую точку с некоторой вероятностью. Другими словами, определенность законов движения, или детерминизм, являющийся краеугольным камнем классической физики, уступает место вероятностному способу описания мира. Такой подход к описанию мира был предложен около ста лет назад, когда создавалась квантовая физика, в частности квантовая механика. Он не сразу был понят и принят даже физиками, поскольку очень непросто примириться с отсутствием детерминизма в науке. Так, известен афоризм Альберта Эйнштейна о том, что «Бог не играет в кости». Таким высказы-

Эйнштейн Альберт (1879–1955) – выдающийся физик-теоретик, один из создателей современной физики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1921) «за заслуги перед теоретической физикой и особенно за открытие закона фотоэлектрического эффекта» ванием великий физик, который сам являлся одним из основоположников квантовой физики, бросил вызов разработчикам квантовой механики. Они его приняли и создали стройную научную теорию, которая может описать как движение зарядов в атоме, так и перемещение более крупных тел, например наночастиц. Но, что самое важное, исходя из квантовой механики, хорошо прослеживается переход от неопределенности перемещений малых объектов к детерминизму движения макроскопических тел. Именно это крайне важно для нанотехнологий, стремящихся создавать новые вещества и устройства методами как «сверху-вниз», так и «снизу-вверх».

Чтобы разобраться в том, как все же можно описывать свойства тел и различные явления в наномире, вспомним важнейшие фундаментальные законы (постулаты) квантовой физики.

Постулат первый гласит, что любая движущаяся частица является одновременно волной, а волна может рассматриваться как частица. Этот постулат выражает суть концепции *корпускулярно-волнового дуализма*, предложенной в 1923 году французским ученым Луи де Бройлем. Согласно теории де Бройля, для описания движения материального объекта необходимо знать как его корпускулярные характеристики, например импульс или энергию, так и волновые характеристики, а именно длину волны или частоту. В частности, частице с импульсом p можно сопоставить так называемую длину волны де Бройля:

Де Бройль Луи (1892–1987) – французский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1929) «за открытие волновой природы электронов»

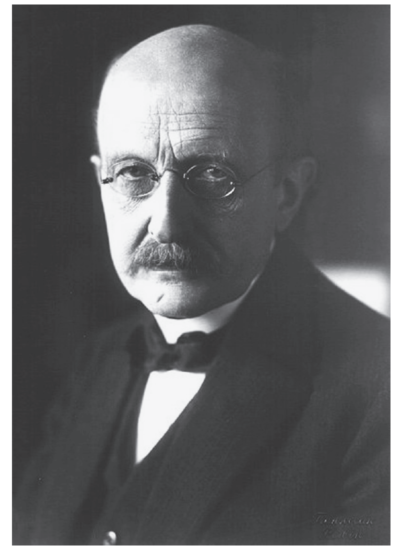
$$\lambda_D = \frac{h}{p},$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Заметим, что аналогичное соотношение было предложено еще в 1900 году Максом Планком для частоты и энергии квантов света – фотонов:

$$\nu = \frac{E}{h}.$$

За это гениально простое соотношение в 1918 году Планк был удостоен Нобелевской премии. Предложенное Планком выражение не только позволило объяснить спектр теплового излучения тел, но и стало отправной точкой для объяснения многих важнейших физических эффектов – таких, например, как фотоэффект. Нобелевскую премию за объяснение фотоэффекта присудили в 1921 году Альберту Эйнштейну, который в своей работе, вышедшей в 1905 году, применил гипотезу Планка для объяснения испускания электронов из твердых тел под действием света. Считается, что именно Эйнштейну принадлежит заслуга в объяснении физического смысла связи между частотой и энергией света.



Планк Макс Карл Эрнст Людвиг (1858–1947) – немецкий физик-теоретик, основоположник квантовой теории. Лауреат Нобелевской премии по физике (1918) «в знак признания его заслуг в развитии физики благодаря открытию квантов энергии»

Таким образом, де Бройль распространил гипотезу Планка, первоначально относящуюся только к квантам света – фотонам, на любые движущиеся тела. Но насколько необходимо учитывать волновые свойства для реальных тел? Чтобы ответить на этот вопрос, попробуем сделать простые оценки. Рассмотрим свободный электрон массой $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг в твердом теле, например металле, при комнатной температуре. Согласно классической электронной теории, такой электрон должен иметь тепловую скорость $v = 10^5$ м/с. В этом случае соответствующая длина волны де Бройля будет равна $\lambda_D = \dfrac{h}{mv} = 7{,}3$ нм. И хотя, согласно современным представлениям, скорость электронов в твердых телах может быть во много раз больше, для многих металлов и полупроводников λ_D лежит в диапазоне 1–10 нм. А значит, при описании электронных явлений в наномире нельзя пренебрегать волновыми свойствами электронов и подобных им частиц.

Иначе обстоит дело с макроскопическими телами и недостаточно маленькими микрочастицами. Рассмотрим в качестве примера один из самых мелких микроорганизмов, а именно микроб размером 1 мкм и массой 10^{-13} кг, передвигающийся со скоростью 1 мкм/с. Легко посчитать, что для микроба длина волны де Бройля составит величину порядка 10^{-15} м $= 10^{-9}$ мкм $= 10^{-6}$ нм, т.е. будет пренебрежимо мала по сравнению не только с его размерами, но и с размерами атома $a_0 \sim 0{,}05$ нм. Следовательно, при описании движения микроба можно пренебречь его волновыми свойствами, как, впрочем, можно пренебречь волновыми свойствами аналогичных и более крупных объектов микро- и макромира.

Но чем меньше (легче) тело и чем меньше его скорость, тем значимее становятся его волновые свойства. Так, для свободной частицы нанометровых размеров, скажем для нанокристалла кремния с поперечным размером 1 нм и, значит, массой 10^{-24} кг, обладающего при комнатной температуре тепловой скоростью 10^2 м/с, получим длину волны де Бройля $\lambda_D \approx 0{,}007$ нм. Эта величина по-прежнему много меньше, чем размер рассматриваемой частицы, поэтому механическое движение таких малых тел можно рассматривать, пренебрегая их волновой природой. Однако при анализе внутренних форм движения нанокристаллов, т.е. движения субнанометровых частей или частиц, необходимо учитывать волновые свойства составляющих их атомов и электронов (об этом будет подробнее рассказано ниже).

Итак, согласно постулату о корпускулярно-волновом дуализме, нельзя забывать о волновой природе малых частиц, особенно если соответствующая длина волны сопоставима с размерами частицы и шкалой ее перемещений. А может ли наночастица, движущаяся с небольшой скоростью или находящаяся в среднем в состоянии покоя, иметь длину волны де Бройля, сопоставимую с ее размерами или превышающими такие размеры? Формально из формулы, предложенной де Бройлем, следует, что покоящаяся частица должна иметь бесконечную длину волны λ_D. На самом же деле малую частицу нельзя привести в состояние полного покоя. Чем меньше и легче объект, тем сложнее его остановить, зафиксировать и измерить, например, его размеры. И это – еще одно фундаментальное свойство наномира. С ним связан **второй постулат** наномира – *принцип неопределенности Гейзенберга*.

Гейзенберг Вернер Карл (1901–1976) – немецкий физик-теоретик, создатель матричной квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1932) – «за создание квантовой механики...»

Этот принцип, являющийся одним из основополагающих в квантовой механике, был сформулирован в 1927 году Вернером Гейзенбергом. Согласно принципу неопределенности, невозможно одновременно измерить со сколь угодно высокой точностью пары ряда физических величин, в том числе импульс и координату, энергию и время. При измерении указанных пар величин будут выполняться соотношения неопределенности для погрешностей (неопределенностей) их измерений:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2},$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – тоже постоянная Планка (иногда называемая постоянной Дирака). Таким образом, зная, например, что проекция скорости частицы массой m составляет величину $v_x \pm \Delta v_x$, соответствующую координату частицы можно измерить с погрешностью $\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v_x}$. Иными словами, координата может быть известна только как некоторая величина $x \pm \Delta x$, где x – среднее значение. Если же в среднем частица покоится, т.е. $v_x = 0$, то величина $m\Delta v_x$ представляет собой максимально возможный импульс частицы по оси x. Тогда, в соответствии с постулатом о корпускулярно-волновом дуализме, неопределенность координаты связана с максимально возможной длиной волны де Бройля: $\Delta x \geq \frac{\lambda_D}{4\pi}$. Это указывает на взаимосвязь обоих упомянутых постулатов квантовой механики, отражающих вероятностный характер мира малых масштабов.

Но если в наномире все так неопределенно и о важнейших характеристиках движения можно судить лишь с некоторой вероятностью, то возникает вопрос: можно ли предложить какие-либо строгие количественные законы для описания хотя бы средних характеристик движения? Ответ на этот вопрос дает **третий постулат**, который гласит, что каждому телу можно сопоставить некоторую зависимую от времени и координат функцию, называемую *волновой функцией* $\Psi(\vec{r},t)$. При этом квадрат модуля волновой функции $|\Psi(\vec{r},t)|^2$ описывает математическую вероятность нахождения частицы в данной точке пространства в данный момент времени, а сама волновая функция должна удовлетворять некоторому уравнению, которое называется *уравнением Шрёдингера*. В случае, когда частица находится в поле сил, которые можно описать с помощью функции потенциальной энергии $U(\vec{r})$, не зависящей явно от времени, справедливо стационарное уравнение Шрёдингера

Шрёдингер Эрвин Рудольф Йозеф Александр (1887–1961) – австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1933) «за открытие новых продуктивных форм атомной теории»

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}) + U(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}),$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – так называемый оператор Лапласа, описывающий дифференцирование по координатам, коэффициент E имеет смысл энергии частицы, которая в силу ее квантовых свойств может принимать дискретные значения, называемые *соб-*

ственными значениями энергии. В одномерном случае при постоянном значении потенциальной энергии: $U = \text{const}$ уравнение Шрёдингера подобно уравнению колебаний:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\Psi(x) = 0.$$

Здесь аналогом частоты выступает коэффициент $\frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$, следовательно, пространственный период функции $\Psi(x)$ равен

$$\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E-U)}} = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}} = \frac{h}{p} = \lambda_D.$$

Таким образом, решением стационарного уравнения Шрёдингера является волновая функция, периодическая в пространстве с периодом, равным длине волны де Бройля. Другими словами, волна де Бройля – это решение уравнения Шрёдингера в простейшем случае свободного движения частицы. Если же движение ограничено или испытывает какие-либо внешние возмущения, необходимо учитывать отражения или искажения при распространении волн де Бройля, что автоматически реализуется при решении уравнения Шрёдингера с соответствующей функцией потенциальной энергии. Вывод о возможности получить волну де Бройля из решения уравнения Шрёдингера указывает на взаимосвязь основных постулатов квантовой физики, описывающих с разных сторон особенности наномира.

Как известно, волны могут характеризоваться не только длиной волны, частотой и амплитудой, но и другим важным параметром – поляризацией волны. Если движение частиц среды или вектора амплитуды в волне происходит в направлении, перпендикулярном направлению ее распространения, то такая волна называется поперечной, а если вдоль направления движения волны, то – продольной. В случае поперечной волны направление колеблющегося вектора амплитуды также может быть различным, что выражается поляризацией волны. Например, для линейно поляризованной волны направление колебаний вектора амплитуды всегда соответствует одному пространственному направлению, а для круговой или эллиптической поляризации конец вектора амплитуды за период колебаний описывает окружность или эллипс соответственно. Но если для движения малых (субнанометровых) частиц необходимо учитывать их волновые свойства, то нужно ли принимать во внимание возможность различной поляризации таких волн де Бройля? И если нужно, то как соотнести поляризационные свойства частиц с их корпускулярными характеристиками? Данный вопрос в квантовой физике решается введением особой характеристики – спина частицы (от английского spin – вертеться), который отражает состояние ее внутреннего движения. Понятие спина было введено в физику Вольфгангом Паули.

Паули Вольфганг Эрнст (1900–1958) – выдающийся физик-теоретик. Лауреат Нобелевской премии по физике (1945) «за открытие принципа запрета»

Согласно определению, спином элементарной частицы называется ее собственный момент импульса, имеющий квантовую природу и не связанный с перемещением частицы как целого. Спином также характеризуют собственный момент импульса атомного ядра или атома; в этом случае спин определяется как векторная сумма (вычисленная по правилам сложения моментов в квантовой механике) спинов элементарных частиц, образующих систему, и орбитальных моментов этих частиц, обусловленных их движением внутри системы. Спин измеряется в единицах $\hbar$ и равен $S = \hbar J$, где J – характерное для каждого сорта частиц целое (в том числе нулевое) или полуцелое положительное число, так называемое спиновое квантовое число, которое обычно называют просто спином. В связи с этим говорят о целом или полуцелом спине частицы. Так, для электрона спин равен $1/2$, а для пары электронов или пары электрон-дырка в полупроводнике полный спин может принимать значения 0 или 1. Известно, что во внешнем магнитном поле спин ведет себя подобно магнитной стрелке, т.е. ориентируется по полю. Но квантовая природа спина проявляется в том, что проекция спина на направление магнитного поля может принимать только дискретные значения. Например, для свободного электрона проекция спина составляет $+1/2$ и $-1/2$, а для электрон-дырочной пары со спином 1 такие проекции равны +1, –1 и 0. Экспериментально и теоретически установлено, что даже в отсутствие внешнего магнитного поля такая система имеет различные энергии в случае, если ее полный спин равен 0 или 1. Правда, для большинства случаев разница в энергиях не превышает величины порядка 0,001 мэВ. Обсуждаемая разность энергий связана с магнитным взаимодействием между спинами – спин одной частицы создает магнитное поле, которое сообщает дополнительную энергию спину другой частицы, и наоборот. Указанное взаимодействие называется обменным и для большинства веществ является достаточно слабым по сравнению с энергией теплового движения частиц при комнатной температуре. Но для нанообъектов данное взаимодействие может усилиться во много раз, достигая и даже превышая 25 мэВ – энергию теплового движения при комнатной температуре. Это связано с малыми размерами нанообъектов, при которых спины приближаются друг к другу, что усиливает их взаимодействие.

Изложенные выше основные сведения о квантовых и волновых свойствах материи позволяют объяснить одно из уникальных и интереснейших свойств наномира, а именно зависимость энергии частиц от их размеров, которое имеет исключительно важное значение для практических применений. Данное свойство получило название «квантовый размерный эффект».

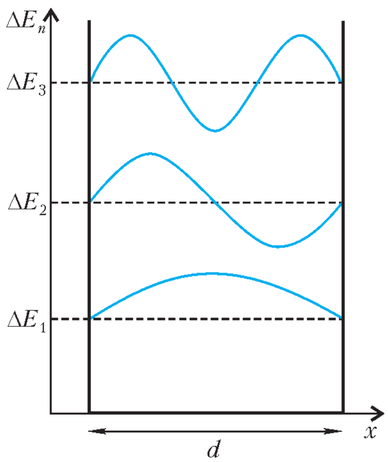


Рис.1. Частица в квантовой яме с бесконечно высокими стенками

Пусть свободное движение частицы массой m, являющейся одновременно волной де Бройля, ограничено в одном направлении, скажем оси x, областью протяженностью d. При этом в двух других направлениях (y и z) возможность свободного движения сохраняется. На языке квантовой физики это означает, что частица помещена в квантовую яму с бесконечно высокими стенками. Частица в такой яме ведет себя, как световая волна в резонаторе – отражение от стенок квантовой ямы приводит к возникновению стоячих волн, среди которых самыми устойчивыми будут те, которые могут укладываться целое число раз на длине d (рис.1). Математически это выражается следующей формулой:

$$\frac{1}{2} n\lambda_D = d, \text{ где } n = 1, 2, 3...$$

Поскольку длина волны де Бройля связана с импульсом частицы, то проекция последнего однозначно будет принимать дискретные значения:

$$p_x = \frac{h}{\lambda_D} = \frac{h}{2d} n .$$

Кинетическая энергия частицы, которая очевидным образом связана с импульсом, приобретет дискретные добавки:

$$\Delta E_n = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{h^2}{8md^2} n^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} n^2 .$$

В полученных выражениях натуральное число n соответствует номеру уровня размерного квантования, а величина ΔE_n называется энергией уровня размерного квантования. При этом низшим уровнем размерного квантования является уровень с $n = 1$. Энергии ΔE_n по существу являются квантово-размерными добавками к энергии свободной частицы. Величина добавки возрастает прямо пропорционально квадрату номера уровня размерного квантования и обратно пропорционально квадрату ширины квантовой ямы. Это и есть квантовый размерный эффект в простейшем случае.

В общем случае необходимо учитывать, что бесконечно высоких стенок у потенциальных ям (барьеров) не бывает, а также то, что движение может быть ограничено сразу по нескольким направлениям. Существуют наносистемы, для которых свободное движение частиц-волн возможно только по одному пространственному направлению. Такие системы называются одномерными наносистемами, или квантовыми нитями. Если ограничение для свободного движения частиц имеет место по всем трем направлениям, то такую наносистему принято называть нульмерной, или квантовой точкой. Для квантовых точек рост энергии размерного квантования не просто многократно увеличивается по сравнению с квантовой нитью или ямой того же размера d, но и возникают качественно новые эффекты, связанные с симметрией волновой функции $\Psi(\vec{r})$. Так, для малых квантовых точек сферической формы эта функция начинает зависеть от орбитального квантового числа, а энергетический спектр квантовой точки становится похожим на спектр атома. Поэтому иногда квантовые точки образно называют «искусственными атомами». Такое название также отражает возможность конструирования электронных свойств квантовых точек с помощью задания их формы и точного числа составляющих их обычных атомов.

Отметим, что выражение для квантово-размерной добавки к энергии частицы можно также получить из соотношения неопределенностей для координаты и импульса:

$$\Delta E = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8md^2} .$$

Последнее выражение с точностью до коэффициента $\frac{\pi^2}{4}$ равно приведенному ранее значению для ΔE_n при $n = 1$. Отсутствие полного количественного соответствия не удивительно, учитывая, что соотношение неопределенностей дает лишь оценку погрешности измерения физической величины, а не ее точное значение. Но данное соотношение придает глубокий физический смысл квантовому размерному эффекту, указывая на то, что энергия частицы возрастает ввиду определенной локализации ее в пространстве. И чем сильнее такая локализация, тем больше энергия.

Так что же, все уникальные свойства наномира могут быть сведены к квантовому размерному эффекту, увеличивающему энергию частиц, а квантовый размерный эффект всего лишь частный случай реализации соотношения неопределенностей Гейзенберга или решения уравнения Шрёдингера? Конечно же, нет. Помимо рассмотренных выше упрощенных представлений о частице-волне в потенциальной яме, огромное число эффектов в наномире зависит от статистических свойств частиц. Это определяет их термодинамические и электродинамические свойства. Большое значение также имеют коллективные эффекты, когда свойства двух или более взаимодействующих частиц уже не равны простой сумме свойств этих частиц. В частности, наличие у частиц такой квантовой величины, как спин, приводит к тому, что у них появляются уникальные оптические и магнитные свойства. Причем эти свойства также зависят от размера наночастиц.

В качестве примера размерного эффекта, связанного с электрическими полями и со спином, рассмотрим

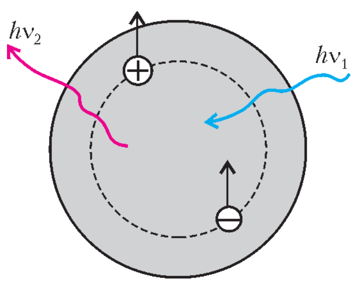


Рис.2. Экситон в квантовой точке. Вертикальные стрелки вблизи электрона и дырки указывают на наличие спина. Входящая и исходящая фигурные стрелки соответствуют процессам поглощения фотона (рождение экситона) и испускания фотона (аннигиляция экситона)

квантовую точку (рис. 2) диаметром d, в которую попадает фотон с энергией $h\nu_1$, достаточной для так называемого внутреннего фотоэффекта – перехода электрона из связанного состояния вблизи некоторого атома в свободное состояние, соответствующее делокализации электрона по многим атомам квантовой точки. Такое свободное, а точнее квазисвободное, состояние есть состояние электрона проводимости в полупроводнике. Остающаяся вблизи его прежнего места локализации область избыточного положительного заряда называется дыркой, которая, как и квазисвободный электрон, имеет эффективную массу, заряд и даже спин. В простейшем случае спин дырки, как и квазисвободного электрона, равен $1/2$. Поскольку электрон притягивается к дырке, как отрицательный заряд притягивается к положительному, может возникнуть новая квазичастица – экситон, – подобная атому водорода, но где роль протона выполняет дырка. Обычно энергия экситона не превышает энергии фотона, породившего данный экситон: $E_{экс} \le h\nu_1$. Поскольку энергия экситона зависит от размера квантовой точки, увеличиваясь с уменьшением ее размера, то может возникнуть ситуация, когда фотон уже не может поглотиться и экситон не возбуждается. Это – очевидное следствие квантового размерного эффекта. Если же экситон возник, то полная его энергия равна энергии фотона, появляющегося при аннигиляции экситона: $h\nu_2 = E_{экс}$.

Но есть еще ряд эффектов, которые также зависят от размеров квантовой точки. Во-первых, чем меньше квантовая точка, тем ближе электрон к дырке (тем меньше радиус экситона) и тем сильнее взаимодействие между ними, поскольку, как известно, потенциальная энергия кулоновского взаимодействия электрических зарядов зависит от расстояния между зарядами, как $U_{эл}(r) \sim \frac{1}{r} \sim \frac{1}{d}$. А так как эта энергия имеет отрицательное значение, то уменьшается и полная энергия экситона $E_{экс}$. Данный эффект кулоновского взаимодействия приводит к ослаблению квантово-размерного увеличения $E_{экс}$ при уменьшении d.

Во-вторых, как уже отмечалось выше, вследствие сложения спинов электрона и дырки полный спин экситона $S_{экс}$ может быть равен как 0, так и 1. Причем непосредственно при поглощении фотона может появиться лишь экситон с $S_{экс} = 0$, а экситон с $S_{экс} = 1$ не может появиться, поскольку ввиду отсутствия у фотона механического момента движения такой процесс запрещен законами сохранения. Разность энергий экситона в состояниях со спином 0 и 1, которая иногда называется энергией обменного взаимодействия, может быть оценена как энергия взаимодействия двух магнитных диполей: $U_{м}(r) \sim \frac{1}{r^2}$. В объемных фазах вещества, где нет ограничения для движения электронов и дырок, величина обменного взаимодействия крайне мала, но при уменьшении размеров квантовой точки она может достигать значений порядка и более энергии теплового движения, что будет оказывать влияние как на оптические, так и на магнитные свойства квантовых точек. Так, немагнитное вещество, состоящее из таких квантовых точек, при освещении может приобрести намагниченность. А это очень важно для возможности оптического считывания и записи информации. Эффекты подобного рода представляет собой фундаментальные предпосылки для развития новой области науки и техники – спинтроники. В общем случае энергия экситона может значительно отличаться от энергии свободных невзаимодействующих электрона и дырки – обозначим такую энергию как $E_{своб}$ – на величину энергии размерного квантования, кулоновского взаимодействия и магнитного спин-спинового взаимодействий: $E_{экс} = E_{своб} + \Delta E - \Delta E_{эл} \pm \pm \Delta E_{м}$. При помощи нанотехнологий можно менять размеры квантовых точек, а значит, управлять энергией экситонов, что позволяет создавать вещества с уникальными электронными и оптическими свойствами, которые могут быть использованы для создания новых устройств в информатике, фотонике и электронике.

Итак, несмотря на царящую в наномире неопределенность точных значений координат и импульсов частиц-волн, строгие законы квантовой механики все же позволяют рассчитать многие важные физические характеристики наносистем. Причем эти характеристики – такие, например, как энергия размерного квантования – имеют первостепенное значение для электронных и оптических свойств материалов, составленных из наноструктур. Точное знание энергетических параметров наночастиц дает определенность их поведения под воздействием различных факторов, таких как свет, электрическое или магнитное поле, нагрев. А это значит, что мы можем предсказывать поведение наносистем, материалов и устройств на их основе. И пусть детали внутреннего движения в наносистеме не всегда можно представить, а тем более описать с высокой степенью точности, но физически измеряемый и практически важный итог такого движения всегда известен однозначно, если известны такие параметры наносистемы, как геометрические размеры, вид и число носителей заряда и т.п.

Таким образом, мы приходим к детерминизму свойств наносистем, и, следовательно, задача нанотехнологий по созданию новых объектов, устройств и материалов с требуемыми свойствами может быть в принципе решена всегда. Главное при решении такой задачи – не увлекаться и не преступать границы, установленные физическими законами наномира.

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

По страницам сочинения Герона Александрийского «О диоптре»

А.ЖУКОВ

Герон Александрийский творил на рубеже новой эры (предположительно I в. до н.э. – I в. н.э.). У своих современников он снискал славу искусного изобретателя. Телеги со специальным устройством Герона, послужившим прототипом современного таксометра, хорошо измеряли расстояние между городами и весями. Водяные часы Герона довольно точно отсчитывали время, синхронизируя события. Его храмовые автоматы по продаже «священной» воды безукоризненно отмеряли нужные порции. Насосы Герона качали воду, подпитывали фонтаны, а пневматические устройства закрывали и открывали двери перед изумленной публикой. Герон был непревзойденным знатоком всевозможных автоматических устройств и механических игрушек. Всего сказанного достаточно, чтобы понять, почему еще при жизни Герона, его, как и прославленного Архимеда (ок. 287–212 до н.э.), соотечественники уважительно величали: «Механик!»

Но Герон был не только прекрасным изобретателем, инженером, механиком, но и превосходным математиком. В его работе «Метрика» даны правила и формулы для вычисления площадей правильных многоугольников, объемов усеченных конуса и пирамиды, шарового сегмента, пяти правильных многогранников и даже тора. Современные школьники хорошо знают формулу Герона из его «Метрики», выражающую площадь треугольника S через длины трех его сторон a, b, c:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр (эта формула была известна уже Архимеду). Однако не всякий школьник сможет без помощи калькулятора и таблиц рассчитать с высокой точностью значения таких корней, как $\sqrt{2010}$, $\sqrt[3]{2011}$. Это безупречно умел делать Герон: в его «Метрике» мы находим описания эффективных вычислительных процедур для расчета квадратных и кубических корней со сколь угодно высокой точностью. Эти схемы вошли в арсенал инструментальных средств современной вычислительной математики.

В 1814 году обнаружилась находка, проливающая дополнительный свет на деятельность Герона: его сочинение «О диоптре». Некоторые комментаторы окрестили это сочинение «пособием по военному делу», увидев в диоптре «прибор для определения высоты стен фортификационных сооружений». Конечно же, скорлупу ореха можно разбивать любым твердым предметом, в том числе и волшебной палочкой, но эта палочка имеет и другие, не столь тривиальные применения. В золотых руках Герона диоптра превращается именно в «волшебный инструмент». В этом несложно убедиться, познакомившись с фантазиями Герона на тему диоптры, которые мы находим в его сочинении.

Мы приведем несколько фрагментов из сочинения Герона «О диоптре», основываясь на переводе этого труда видным специалистом по античной математике профессором И.Н.Веселовским. Расшифровку его рукописи, хранящейся в архиве ИИЕТ РАН, в «Фонде Веселовского», любезно предоставила доцент МИИТ Галина Александровна Зверкина. Здесь мы изложим фрагменты сочинения Герона в адаптированной форме, облегчающей понимание текста современным читателям.

Что такое диоптра?

На рисунке 1 показана реконструкция диоптры, выполненная Г.Шене (Ф.Даннеман. История естествознания. – М.: Государственное медицинское издательство, 1932).

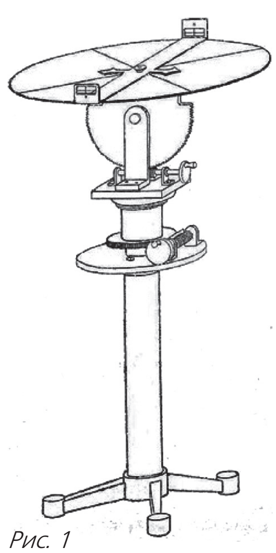


Рис. 1

В верхней части прибора расположена круглая площадка, в плоскости которой вращается так называемая *алидада* – изогнутая на двух концах пластинка. С одной ее стороны в изогнутой части имеется точечное отверстие – *глазной диоптр*, а в другой щель с мушкой или тонким волоском – *предметный диоптр*. При рассмотрении через глазной диоптр мушка или волосок должны проектироваться на визируемую цель – это достигается вращением алидады в одной плоскости, которая, в свою очередь, также может поворачиваться с помощью специального регулирующего винта.

Диоптра позволяла с высокой точностью измерять углы как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости. Эти две незамысловатые возможности Герон виртуозно использовал для решения огромного множества задач, особо подчеркивая:

... все предложенные нами задачи практически разрешаются одним и тем же самым [прибором]. Однако если кто-нибудь придумал и какие-нибудь другие [задачи], то устроенная нами диоптра не откажется разрешить и их. (Герон. О диоптре, I/Пер. И.Н. Веселовского.)

Недосягаемое становится доступным

Даны две точки, из которых одна вблизи нас, другая же вдали, найти между ними расстояние, не приближаясь к дальней точке. (Там же, VIII.)

На эту задачу, как на типовую, Герон неоднократно ссылается в дальнейшем. Для удобства ссылок назовем ее «Задача 1».

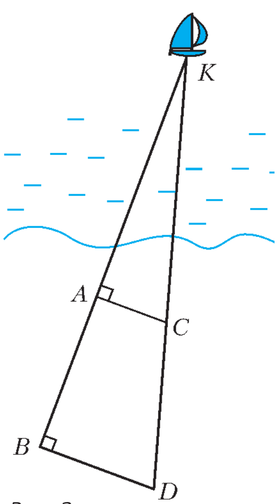


Рис. 2

Пусть от точки A требуется найти расстояние до недоступной точки K.

С помощью диоптры отмечается точка B на прямой KA, и под прямым углом к прямой AK проводятся отрезки $AC \perp AK$, $BD \perp BK$ так, что точки K, C, D располагаются на прямой линии (рис. 2).

Поскольку треугольники DBK и CAK подобны, то справедлива пропорция $\frac{BD}{AC} = \frac{BK}{AK}$. Длины отрезков AC, BD, AB измеряются непосредственно, а длина отрезка AK находится из этой пропорции.

Точка K может быть кораблем в море, камнем на другом берегу реки, вершиной египетской пирамиды – все эти недоступные для непосредственного измерения объекты способ Герона превращает в доступные.

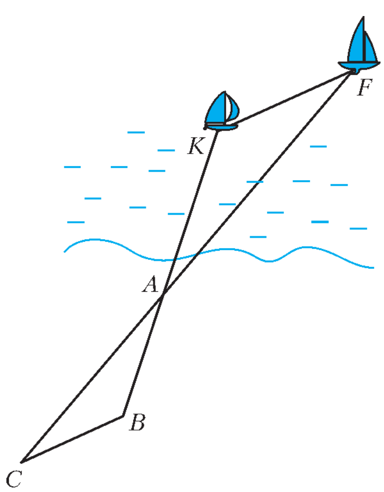


Рис. 3

Далеко ли разошлись корабли?

Для двух недоступных точек определить расстояние между ними. (Там же, X.)

Герон предлагает несколько способов решения этой задачи. Рассмотрим один из них.

Определив по способу задачи 1 расстояния от точки A до двух недоступных точек K и F, откладываем какую-нибудь часть этих расстояний на продолжении прямых KA и FA (рис.3). Получаем доступный измерению треугольник ACB, подобный треугольнику AFK. Длина отрезка CB составляет известную часть от длины отрезка KF, что и позволяет его найти.

Как высоко дерево?

Определить высоту недоступного дерева. (Там же, XII.)

В решении этой задачи, кроме диоптры высоты d, используется также вспомогательный шест высоты h. Пусть удаление диоптры от дерева равно L (его можно определить по способу, изложенному в задаче 1), а шест отстоит от диоптры на расстоянии l. Визируется верхушка дерева неизвестной высоты H, как показано на рисунке 4. Поскольку прямоугольные треугольники: больший с катетами L и $H - h$ и меньший с катетами l и $h - d$ подобны, то справедлива пропорция $\frac{H-d}{L} = \frac{h-d}{l}$, откуда определяется H.

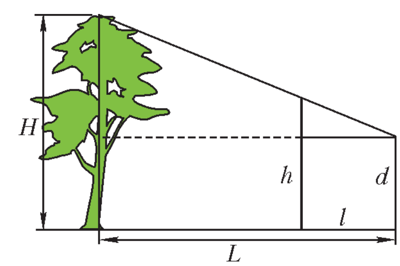


Рис. 4

Точно такая же пропорция будет иметь место, если L и l обозначают не катеты, а известные гипотенузы – в этом случае можно найти, например, недоступную высоту пирамиды H (рис. 5).

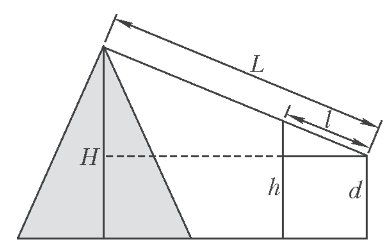


Рис. 5

Расстояние до невидимой точки

От данной точки к другой точке, являющейся невидимой, провести при помощи диоптры прямую, каково бы ни было расстояние между ними. (Там же, VII.)

Пусть точки A и B загорожены друг от друга лесным массивом и не находятся на линии прямой видимости (рис.6). С помощью диоптры проведена вспомогательная ломанная линия, соседние звенья которой расположены под прямым углом друг к другу. Измеренные расстояния вдоль звеньев указаны на рисунке. Определите по этим данным расстояние между точками A и B самостоятельно.

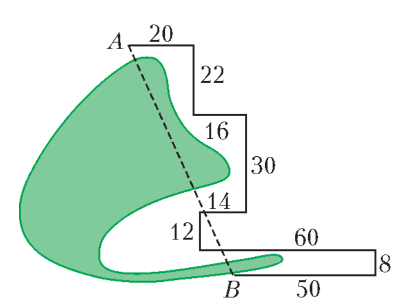


Рис. 6

Площадь недоступного объекта

Измерить данную площадь, не входя на эту площадь или вследствие обилия растительности, или помехи от зданий, или от того, что не допускается в нее входить. (Там же, XXVII.)

Пусть недоступный объект, площадь которого следует определить, задан своим контуром, например выпуклым многоугольником $ABCDEF$ (рис. 7). Мысленно разобьем его на треугольники с общей вершиной A и последовательно определим площадь каждого из них, начиная с треугольника AEF.

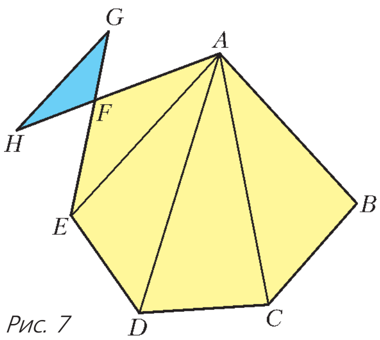


Рис. 7

Отложим на продолжении стороны AF какую-нибудь ее часть FH, а на продолжении стороны EF – такую же ее часть FG. Тогда треугольник HFG будет подобен треугольнику AFE. Умножив отрезок HG на коэффициент подобия, узнаем величину недоступного отрезка EA, а умножив площадь треугольника HFG на квадрат коэффициента подобия, найдем площадь недоступного треугольника AFE.

Решение этой задачи Герон заканчивает такой фразой:

Подобно же определим и содержание каждого из остальных треугольников; таким образом возможно определить содержание и всей площади. (Там же, XXVII.)

В сочинении Герона разбираются также и другие задачи, решаемые с помощью диоптры, например:

• *взять глубину данного рва* (XIV);

• *прокопать по прямой [линии] гору при заданных на горе отверстиях туннеля* (XV);

• *к подземному ходу провести в горе шахту, перпендикулярную к ходу* (XVI).

Некоторые историки науки полагают, что в сочинении Герона «О диоптре» изложены правила земельной съемки, фактически основанные на использовании прямоугольных координат.

УШЕЛ ИЗ ЖИЗНИ МАРТИН ГАРДНЕР

22 мая 2010 года не стало Мартина Гарднера.

Нам всем еще только предстоит осмыслить и оценить его гигантскую роль в популяризации науки вообще и математики в частности.

М.Гарднер во многом определил лицо современной занимательной математики, создав жанр, в котором о современных научных задачах рассказывалось на языке «Математических игр» – так назывался раздел в журнале Scientific American, редактором которого М.Гарднер был в течение четверти века.

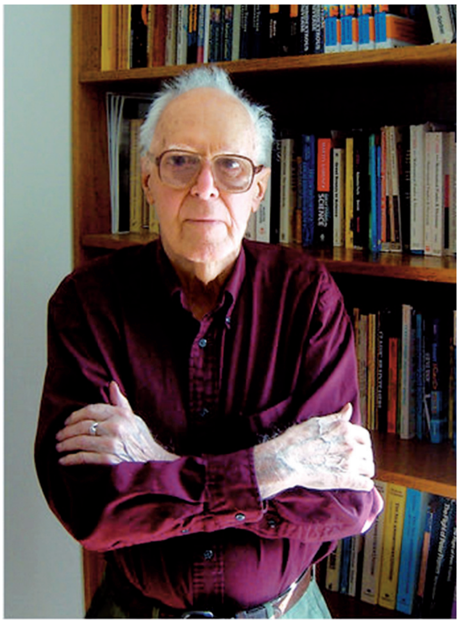
В нашей стране у книг М.Гарднера много почитателей еще и потому, что их переводил Юлий Александрович Данилов – крупный ученый и замечательный стилист, обладавший способностью передать читателю свой собственный интерес к излагаемым сюжетам.

Именно М.Гарднер вернул современным читателям имена тех гигантов, на плечах которых он стоял, – Сэма Лойда и Генри Э.Дьюдени.

Именно М.Гарднер стал главной опорой моста, через который было организовано небывалое для нашего времени научное взаимодействие между выдающимися учеными (такими, как Дональд Кнут, Джон Конвей или Рональд Грэхем) и рядовыми любителями математики.

Именно М.Гарднер стал человеком, благодаря которому появились сотни тысяч людей, влюбленных в математику.

Другого человека такого масштаба среди популяризаторов математики сейчас нет.


Мартин Гарднер (1914–2010)

Книги Гарднера на русском языке

1. 1000 развивающих головоломок, математических загадок и ребусов для детей и взрослых.
2. А ну-ка, догадайся!
3. Есть идея!
4. Классические головоломки.
5. Крестики-нолики.
6. Лучшие математические игры и головоломки, или Самый настоящий математический цирк.
7. Математические головоломки и развлечения.
8. Математические досуги.
9. Математические новеллы.
10. Математические чудеса и тайны.
11. Нескучная математика.
12. Новые математические развлечения.
13. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам.
14. Путешествие во времени.
15. Теория относительности для миллионов.
16. Этот правый, левый мир.