

# Квант<sup>журнал</sup> МАЙ 2010 №3 ИЮНЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна), ИФТТ РАН  
Издатель — ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произолов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджан, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Товарный знак «Журнал «Квант» является собственностью ООО НПП ОО «Бюро Квантум»  
© 2010, РАН,  
Фонд Осипяна, журнал «Квант»

- 2 Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени. *В.Гордин*  
9 О сумме телесных углов многогранника. *И.Богданов*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 15 105 лет академику С.М.Никольскому

## НАНОТЕХНОЛОГИИ

- 17 Квантовые и волновые явления в наномире. *В.Тимошенко*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 23 По страницам сочинения Герона Александрийского «О диоптре». *А.Жуков*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 26 Задачи М2176–М2183, Ф2183–Ф2189  
27 Решения задач М2154–М2158, М2160, Ф2168–Ф2174  
35 Еще раз об окружностях, вписанных в криволинейные фигуры

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Постоянные магниты

## К М Ш

- 36 Задачи  
37 Хорошо темперированный клавир. *И.Гельфанд, А.Шень*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 40 Сверхзвуковые самолеты и конус Маха. *Е.Соколов*  
42 Обжегшись на молоке, на воду дуют... *А.Стасенко*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 44 О пользе графиков. *М.Горелов*

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 48 Каустики на плоскости и в пространстве. *А.Андреев, А.Панов*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 50 Неравенство Коши в задачах по физике. *В.Гребень*

## ИНФОРМАЦИЯ

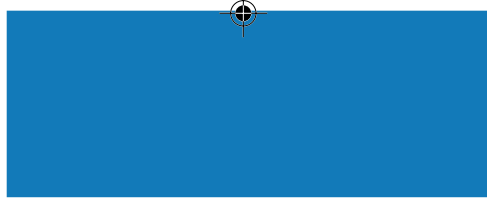
- 54 Заочная школа СУНЦ НГУ

## ОЛИМПИАДЫ

- 56 XVIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»  
59 Ответы, указания, решения Памяти М.Гарднера (25)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Метеорологические наблюдения»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*



# Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени

**В.ГОРДИН**

## Введение

*Зачем крутится ветер в овраге,  
Подъемлет лист и пыль несет,  
Когда корабль в недвижной влаге  
Его дыханья жадно ждет?*

А.С.Пушкин. Египетские ночи

Александр Сергеевич на этот вопрос отвечает так: «Затем, что ветру и орлу // И сердцу девы нет закона». Однако ученые люди и до и после написания этих замечательных стихов тщились эти законы отыскать. Ведь интересно, красиво, а возможно, и полезно будет. Член Парижской академии наук Л.М.А.Навье предложил уравнения, описывающие динамику вязкой жидкости, за несколько лет до издания «Египетских ночей». Конечно, от этих уравнений до практического прогноза погоды была дистанция порядочная...

## Какие бывают метеонаблюдения

*Обсервации метеорологические отправляя с 1729 года, через которые не без великого беспрестанного старания и труда много нового мною изобретено, что надлежит до состояния погод здешнего климата, и еще все можно усмотреть из поданных мною в Академию надлежащих писем.*

Г.Крафт

Уточним, что такое метеонаблюдение. Например, смотрим в окно – пешеходы идут с зонтиками. Или в шубах. Можно сделать кое-какие выводы. Летчику на полете к аэродрому сообщают: видимость сейчас плохая, но, судя по радару, приближается небольшое окно в облаках. Через три минуты будет понятно, садиться ли или идти на запасной аэродром. Это – наблюдения, которые используются сразу.

Разнообразных метеонаблюдений, поступающих в базу данных Гидрометцентра России, около  $10^6$ . И, видимо, будет больше. Современные технологии прогноза погоды позволяют давать его на несколько суток с довольно высокой точностью. Эти технологии – результат многовекового прогресса.

Количество осадков за весну измеряли левиты в Храме в Иерусалаиме. Если суммарный уровень осадков превышал 7 ладоней (около 56 см), то ожидали хороший урожай летом.

В Египте измеряли подъем уровня Нила.<sup>1</sup> Причины подъема были загадочны. Две с половиной тысячи лет назад Геродот сообщил в своей «Истории» несколько версий – уже тогда они были старинными.

Обыкновенные для нас приборы – барометр, термометр – появились несколько веков назад. В 1597 году Г.Галилей изготовил термоскоп: стеклянный шар с водой и погруженная в него трубка. Уровень воды характеризовал температуру (лат. temperature – надлежащее смешение, нормальное состояние; темпермент – однокоренное слово). Позднее Сагрето, ученик Галилея, нанес на трубку деления – измерения получили количественный характер.<sup>2</sup>

Вода – непростая жидкость, ее объем не растет монотонно с температурой, минимум достигается при  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ .<sup>3</sup> Поэтому в качестве рабочей жидкости ее использовать неудобно. В 1641 году во Франции уже имелись довольно совершенные спиртовые термометры (этот термин появился в 1636 г.). В 1715 году житель города Данцига Д.Фаренгейт наладил произ-

<sup>1</sup> Воду отводили в пруд и определяли уровень стоячей воды по высеченной на камне шкале в локтях и пальцах. Важнейшим был водомер на острове Рауда. Каждый день его смотритель докладывал правительству. Если подъем Нила был выше 12 локтей, глашатай возвещал об этом по всему Каиру.

<sup>2</sup> Это изобретение немедленно получило медицинское применение: венецианский врач Санторио в 1612 году опубликовал работу о повышении температуры тела при лихорадке.

<sup>3</sup> Вот почему лед плавает на поверхности воды, а не тонет. Галилей в 1611 году на торжественном обеде (в честь кардиналов Барберини и Гонзаго) у великого герцога Тосканского Козимо II экспериментально опроверг мнение коллег по Пизанскому университету, утверждавших, что это следствие формы льда, а не его относительной (к воде) легкости. Следствия этого диспута: трактат «Рассуждение о телах, пребывающих на поверхности воды в покое и тех, которые в ней движутся» и враги Галилея среди профессоров Пизы.

водство ртутных термометров.<sup>4</sup> В 1724 году он предложил, во-первых, разделить диапазон между точками плавления и кипения воды на 180 частей, которые теперь называются градусами Фаренгейта ( $^{\circ}\text{F}$ ), а во-вторых, считать температуру плавления равной  $32^{\circ}\text{F}$ . В 1732 году Реомюр предложил делить этот же диапазон на 80 частей, а астроном А.Цельсий в 1742 году – на 100 частей, причем его градусы уменьшались (!) с потеплением. Перевернуть эту шкалу предложил ботаник К.Линней в 1745 году. В России этот градусник долго называли шведским, а использовали термометр Л.Делиля с делением на 150 частей. Неясно, с чем связана буква С в традиционном обозначении градусов Цельсия: с фамилией шведского астронома или со словом *centrigrade* (стоградусник).

Честь изобретения барометра в 1643 году принадлежит ученику Галилея – Э.Торричелли (и, возможно, их ученику В.Вивiani).

Силу и направление ветра научились измерять намного раньше – прибор мало отличался по конструк-

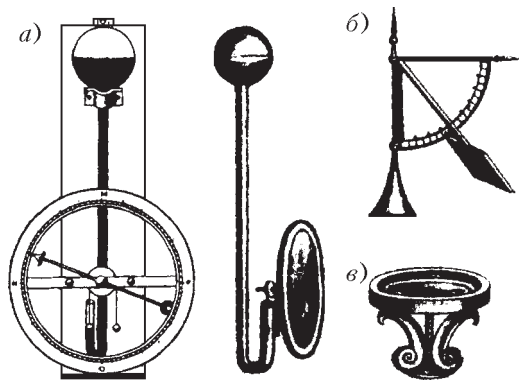


Рис.1. Метеорологические приборы, которые использовал Р.Гук в середине XVII века: барометр (а), анемометр (б) и компас (в) определяли давление, скорость и направление ветра как функции времени, разумеется если были часы. Для того чтобы разобраться в причинах и свойствах движения атмосферного воздуха, были нужны многочисленные и достаточно точные измерения, а следовательно, достаточно дешевые и точные приборы

ции от ветряной мельницы, а мельницы эти крутились в Европе со времен Крестовых походов. Однако еще в XVIII веке скорость ветра оценивали на глаз. В дневнике Петра I летом 1715 года сообщается: «6 июля. Ветр был о полудни средний, а к вечеру тише и ночью... 7 июля ветер был от зюд-оста зело тих и более 840 сажен не уходил в час».

Появление этих приборов (рис.1) позволило «вести летопись» давления и температуры, хотя практический смысл таких наблюдений вряд ли тогда был ясен. Разве

<sup>4</sup> Неожиданное для Европы ограничение ртути обнаружилось во время Великой северной экспедиции. Казак П.Саломатов писал из Томска студенту С.Крашенинникову: «В данных мне инструментах барометров да термометров от тех великих мразов ртуть смерзается кусками, а в термометрах входит вся вниз из принадлежащих частей в яблоко. Однако же не в большие мразы опять попрежнему становится». Замерзание ртути снова было открыто Брауном и Ломоносовым в 1759 году, а затем Фризом зимой 1786–1787 годов в Великом Устюге.

что начальство могло в справочник посмотреть – узнать, где какие температуры в державе случаются и какие снега выпадают. Крестьянин справочники не читал – смотрел на небо лично. И Ломоносовская ода: «Наука легких метеоров, // Премены неба предвещай, // И бурный шум воздушных споров // Чрез верны знаки предъявляй, // Чтоб земледелец выбрал время, // Когда земле поверить семя // И дать когда покой браздам, // И чтобы, не боясь погоды, // С богатством дальны шли народы // К Елисаветиным брегам» – получила реальное подтверждение лишь пару веков спустя.<sup>5</sup> А до той поры затраты «на воздух» приносили маловато доходу казне и производились со скрипом.<sup>6</sup>

В «Речи о пользе наук и художеств» в сентябре 1750 года С.Крашенинников (уже академик, а не студент) честно признал: «Смешно кажется, когда физик записывает перемену погод со всяким прилежанием, но ежели бы сыскалось правило, как ее наперед узнать, то, без сомнения, великой чести удостоилось для того, что перемена в самом здравии нашем немало от того зависит; знающему, что последует, можно от вреда поостеречься».

Однако постепенно заметили, что сильное падение давления предвещает пасмурную, дождливую погоду, возможно с сильным ветром. Капитаны кораблей, уцелевшие в штормах, старались выработать алгоритм поведения на основе изменения давления, а также силы и направления ветра. Алгоритм был громоздок. Глядя на простые современные карты погоды (в Интернете можно найти даже анимационные карты), которые может понять и школьник, трудно в эту сложность поверить. А тогда, если капитан пренебрегал правилами или если ими (весьма далекими от совершенства) пренебрегал шторм, плата была велика. Адмирал Нельсон ставил себе в заслугу не только победы в сражениях, но и умение маневрировать в шторм – не потерял ни одного корабля.

Раз от барометров обнаружилась польза, их появилось много. А дальше возникло естественное желание: сопоставлять показания не только в одной точке за разные моменты времени, но и одномоментные наблюдения в разных точках – составлять барические карты. Примерно в это время подрос со своими услугами

<sup>5</sup> Сам Ломоносов и приборы метеорологические изготовлял, и регулярные измерения проводил. Без длительной подготовительной работы по совершенствованию приборов и техники измерений, по развитию физики, химии, различных технологий, математических методов и вычислительных алгоритмов современный прогресс в прогнозе погоды был бы невозможен. Но цари не желают ждать века – деньги хочется на войны и наряды потратить немедля.

<sup>6</sup> Мысль о влиянии на погодные процессы и вообще на окружающую среду посещает начальственные головы регулярно – со времен строительства Вавилонской башни. Пока дело ограничивается загрязнением этой среды и воздействием на облака – с целью предотвращения градобития виноградников и улучшения погоды в отдельных мегаполисах. Впрочем, Ибн Хаукал сообщает со слов некоего путешественника о событиях в тогдашней столице Афганистана Зарандже. В 970 году там, вследствие ветра неслыханной силы и постоянства, была полностью занесена песком главная мечеть. Но некий человек за 20 тысяч дирхемов изменил направление ветра.

телеграф. Сначала в качестве правительственной связи, затем для военно-политической, административной, финансово-экономической информации. Потом дошла очередь и до метеорологии.<sup>7</sup> Прогноз погоды был делом весьма сомнительным, и правительства предпочитали вкладывать деньги во что-нибудь более надежное, например в пушки. Однако и военным, и администраторам срочные метеосведения бывают нужны. Поэтому длительные обсуждения финансирования телеграфных затрат в шестидесятых-семидесятых годах XIX века были успешно завершены в большинстве стран Европы.

В США телеграфист, заступавший на смену, должен был послать об этом сообщение. Чтобы лишних средств не тратить, придумали: пусть вместо этого посылает информацию о давлении – барометр поставит ему на рабочий стол. К этому времени было ясно, что давление убывает с высотой. Чтобы сопоставлять давления в разных местах, а значит на разных высотах над уровнем моря, необходимо научиться приводить давление, измеренное на уровне поверхности, к общему уровню – уровню моря. Там, где была выполнена топографическая съемка (точность которой была тогда не слишком высока), можно было воспользоваться барометрической формулой Лапласа  $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ . Ее можно дополнить уравнением Клапейрона  $p = \frac{R\rho T}{M}$ . Следствием из этих соотношений – уравнением гидростатики

$$p \frac{dz}{dp} = \frac{dz}{d \ln p} = -\frac{R}{Mg} T$$

– удобно пользоваться для экстраполяции до уровня моря, «под землю», поскольку изменение абсолютной температуры в правой части равенства составляет лишь несколько процентов.

Разумеется, экстраполяция «под землю», где никакого воздуха нет, штука условная. Но результаты получались сравнительно приличными. Вместе с нанесенными на карту ветрами это даже создавало возможность краткосрочного прогноза: предположим, что

<sup>7</sup> Большой вклад в развитие метеорологических и магнитных измерений в Российской империи и в международное сотрудничество внес А.Я.Купфер, имевший разнообразные научные интересы, пользовавшийся большим авторитетом и у зарубежных коллег, и у российского начальства. В 1849 году была учреждена Главная физическая обсерватория (ГФО). Была развита наблюдательная метеорологическая сеть, составлены наставления по производству наблюдений, поверялись все измерительные приборы, производились инспекции сети. На основе собранных наблюдений издавались метеорологические сборники. Их посылали и наблюдателям, и зарубежным коллегам. Поэтому, когда вопрос о международном телеграфном обмене метеоданными стал реальным, было понятно, с кем именно нужно договариваться о таком обмене. Личные связи ученых играли заметную роль. Смерть Купфера в 1865 году замедлила (на несколько лет) затормозила развитие системы. Мешали и войны: Крымская, австро-прусская, австро-итальянская, франко-прусская, русско-турецкая, Гражданская война в США. Приглашенный из Швейцарии для руководства ГФО Г.И.Вильд сделал ее центром российской метеорологии и важным компонентом мирового метеорологического сообщества.



Рис.2. На знаменитой акварели К.Хокусаея «Охотники на снегу» ясно видно изменение ветра с высотой

ветер будет дуть так же, как и в данную минуту, тогда за сутки он принесет из пункта А в некий пункт В такое-то давление, которое сейчас имеется в точке А.

Гипотеза эта, как и рассуждение, имеет большую погрешность. Ветры переменчивы. И не только со временем, но и с высотой (рис.2). Достаточно сравнить направление движения гонимых ветром облаков с направлением ветра на уровне нашего носа – различаются.<sup>8</sup> А на каких же высотах «переносится погода»? Оказывается, на всех, причем результат зависит и от скорости ветра (обычно растет с высотой), и от плотности воздуха (убывает). Следовательно, простым переносом того или иного метеорологического явления «по прямой» толковый прогноз погоды не сделаешь, а нужно измерять температуру, давление, влажность, скорость ветра не только около поверхности земли, но и на высотах. На каких высотах? На тех, где сосредоточена большая часть массы, импульса и энергии атмосферы.

### Измерения в тропосфере и стратосфере

*И вот Знайка стал думать. Думал он три дня и три ночи и придумал сделать шар из резины.*

Н.Н.Носов. Приключения Незнайки и его друзей

Из школьного курса физики известно, что убывание давления и плотности воздуха с высотой близко к экспоненциальному (попробуйте с помощью приведенных выше формул приблизительно оценить показатель экспоненты). Определить среднюю скорость ветра на разных высотах на основе таких простых соображений не получается. Впрочем, сейчас, после века регулярных измерений, мы ее знаем довольно хорошо (рис.3).

Разумеется, поднимавшиеся на первых воздушных шарах люди могли взять с собой метеорологические приборы. Но сами воздушные шары были раритетами. Каждый день отправлять в полеты сотни таких шаров

<sup>8</sup> Следовательно, при расчете переноса ветром различных примесей (например, выхлопных газов, результатов техногенных катастроф или пепла, выброшенного при извержении вулкана) необходимо знать, как распределится эта примесь по вертикали, на какой высоте она «склонна» пребывать.

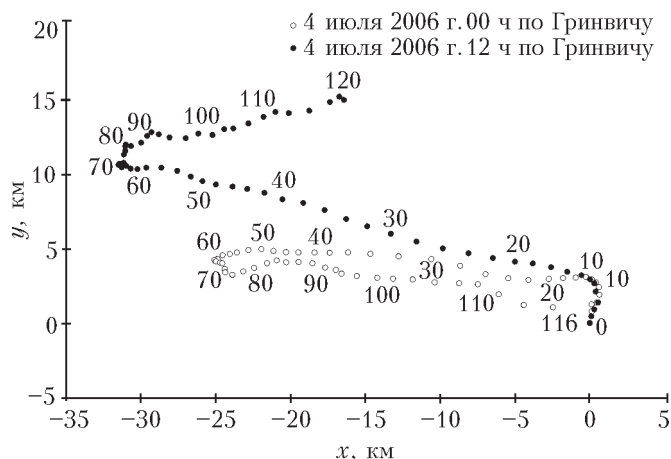


Рис.3. Скорость ветра, который дует на разных высотах, определяется наблюдателем по смещению зонда. На рисунке изображены положения двух зондов, запущенных с интервалом времени 12 часов, относительно точки запуска в километрах (направления осей — долгота и широта), а числа означают минуты полета. Видно, что на разных высотах ветер дует в разные стороны. За 12 часов, как следует из сравнения черных и белых кружков, направление ветра существенно поменялось

— ни у какой державы на это не хватило бы ни денег, ни пилотов. А если запускать воздушный шар поменьше и без людей? Изготовить автоматически работающие метеорологические приборы в девятнадцатом веке было бы сложно, но все же возможно. А сколько времени понадобится, чтобы этот самый зонд потом найти?! Информация (если мы хотим использовать ее для прогноза, скажем, на сутки) уже устаревает. Можно использовать воздушных змеев — но нужен большой (а значит, сложный и дорогой) змей, чтобы мог поднять приборы. Да и не при всяком ветре он полетит. И не слишком высоко его можно запустить.<sup>9</sup>

Ситуация улучшилась с изобретением радио и прогрессом в радиотехнике. Передатчик уменьшался в размерах и весе — уменьшались и сами метеоприборы. К тридцатым годам прошлого века такой измерительно-передающий комплекс, достаточно надежный и недорогой, чтобы его использовать для сравнительно массовых измерений, был изготовлен в разных странах. Затем последовала вторая мировая война. Военные аспекты метеорологии вышли на первый план. Информация стала секретной, и об ее свободном обмене речь уже не шла. Прилагались огромные усилия, чтобы засекретить свою погоду и узнать погоду на территории противника. Эпизоды этой смертельной борьбы описаны в книге З.М.Каневского «Цена прогноза» (Л.: Гидрометеиздат, 1976). В борьбе участвовали подводные лодки и большие надводные корабли, разведывательные группы и самолеты. Один из руководителей разведки Третьего рейха В.Шелленберг в своих мемуарах пишет,

<sup>9</sup> В России такие запуски регулярно проводились под Москвой в Кузино (поместье Д.А.Рябушинского), где под руководством Н.Е.Жуковского был организован аэродинамический институт, а при нем аэрологическая обсерватория. Владелец поместья в работе принимал участие, и не только финансовое. Современный рекорд подъема змея составляет 9740 м.

что в дни, предшествовавшие немецкой оккупации Норвегии, основная секретная информация немецких агентов была метеорологической.

Последовавшая «холодная война» обмен информации также не способствовала. Архивы сохранили, например, докладную записку управляющего делами ЦК ВКП(б) Д.В.Крупина секретарю ЦК ВКП(б) М.А.Суслову от 7.4.1948 о разглашении важных в военном отношении сведений в книге «Климатические области и районы СССР». <sup>10</sup> Справка замначальника Генштаба подтверждала: да, действительно, имело место разглашение потенциальному противнику важных сведений, особенно про Советскую Арктику. Дело тогда закончилось тихо: автора — профессора Б.П.Алисова — даже не посадили, книгу, правда, пустили под нож... А данные о климате наших северных морей и сейчас, спустя шестьдесят с лишним лет, содержат лакуны. Однако в те же годы появилась Всемирная метеорологическая организация — агентство ООН по метеорологии. И результаты ее работы не стыдно предъявить человечеству.

В настоящее время основным источником информации для Гидрометцентра России являются поступающие два раза в сутки (или чаще) телеграммы, их сейчас около 6500 за каждое поступление, характеризующие состояние атмосферы у земной поверхности. <sup>11</sup> Это так называемые синоптические <sup>12</sup> данные, из которых около 2000 приходят с морских буев <sup>13</sup> и с морских судов. К ним добавляются примерно 650 аэрологических теле-

<sup>10</sup> Организатор и первый руководитель Единой гидрометеорологической службы СССР А.Ф.Вангенгейм в 1934 году был послан в Соловки, а в 1937 году расстрелян (реабилитирован в 1956 г.). Вообще, повышенный интерес российских правоохранительных органов к метеорологии имеет давнюю традицию. Первые метеонаблюдения стали записывать по указу Алексея Михайловича в 1650 году. Поручено это было Приказу тайных дел.

<sup>11</sup> Автоматические метеостанции используются в малонаселенных районах, где трудно найти наблюдателей. Их применение ограничено досадной склонностью некоторых людей ломать найденную аппаратуру. При производстве таких станций нужно обеспечивать их максимальной маскировкой.

<sup>12</sup> В переводе с греческого ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ означает «способный видеть все», однако радиозонды, радары и спутники много добавляют к этому «все». Времена меняются, и технологии меняются вместе с ними.

<sup>13</sup> Здесь речь идет о буях, которые плавают на поверхности океана и передают информацию с границы двух сред: воздуха и воды. В последние несколько лет появилась сеть глубоководных буев (так называемая система ARGO) — настоящее чудо современной техники. Такой буй дрейфует на заданной ему глубине под водой. Раз в 10 суток включается программа, согласно которой он меняет свою общую плотность и начинает двигаться по вертикали, проходя глубины от 2 км до поверхности и измеряя температуру и соленость воды с частотой в несколько метров. Оказавшись на поверхности, буй передает накопленную информацию на спутник, причем передает несколько раз, чтобы избежать случайной потери информации. Через несколько часов он погружается на свою штатную глубину. Таких буев сейчас более 3 тысяч, и они довольно равномерно покрывают Мировой океан за исключением полярных морей. Обычно на температуру воздуха непосредственно влияет только температура поверхности воды, но в сильный шторм происходит перемешивание приповерхностных слоев воды, которые включаются в теплообмен.

грамм, приходящих с тех метеорологических станций, на которых осуществляются запуски радиозондов. Аэрологическая информация, если пользоваться метеорологическим жаргоном, «освещает» атмосферу над планетой – радиозонд долетает и сообщает сведения о метеорологических полях до высоты 30 км и более.

Измерения, которые производит радиозонд в полете, часто приписывают одному моменту времени – его называют стандартным сроком наблюдения. Имеется международная договоренность, какие сроки считать стандартными, чтобы эти измерения во всех странах производить одновременно (мы обсудим ниже, почему такая одновременность удобна для расчетов). Однако зонд поднимается на максимальную высоту отнюдь не мгновенно – обычно это занимает около полутора часов.<sup>14</sup> Следовательно, пренебрежение этим временем приводит к ошибке в интерпретации измерений. Для того чтобы оценить эту погрешность, нужно умножить характерную производную  $\partial_t f$  измеряемой величины  $f$  (температуры, давления, влажности, ветра) по времени  $t$  на  $\Delta t \approx 1,5$  часа. В грубой модели такой ошибкой  $\delta_f = \Delta t \cdot \partial_t f$  можно пренебречь, а в хорошей современной модели лучше произвести надлежащие поправки. Стоит учесть и нарастающее со временем подъема смещение зонда по горизонтали.

Южное полушарие Земли «освещено» данными значительно хуже, чем северное. Многие метеорологические центры, расположенные далеко к северу от экватора, когда-то не принимали во внимание этот плохо «освещенный» район и ограничивали область своего прогноза северным полушарием, а иногда и его частью. Другой причиной такого ограничения была недостаточная производительность компьютера. Конечно, атмосферные процессы, происходящие в южном полушарии, влияют на состояние атмосферы в северном, и такое вынужденное ограничение приводит к появлению ошибки, возрастающей со временем и распространяющейся от экватора к северу. «Смягчающим вину обстоятельством» служили сравнительно небольшие значения меридиональной<sup>15</sup> составляющей ветра.

Синоптические и особенно аэрологические данные «освещают» северное (и тем более южное) полушарие неравномерно. Более половины его площади занимает океан, а радиозонды там запускают лишь несколько островных метеорологических станций и несколько судов погоды, стоящих на якорях. Наиболее густая сеть станций – в Европе, Восточной Азии и Северной Америке. Предположим, что все 650 аэрологических станций находятся в северном полушарии и распределены равномерно, и оценим густоту такой сети. Радиус Земли  $R_3 \approx 6400$  км, площадь поверхности северного

<sup>14</sup> Вот почему во многих странах запуск начинают за 30 минут до синоптического срока – чтобы в соответствующий стандартный момент времени зонд был поближе к середине траектории.

<sup>15</sup> Иными словами, проекции вектора скорости ветра в данной точке на меридиан, проходящий через эту точку в экваториальной зоне: полушария как бы разделены марлевой занавеской, которую из-за недостаточной мощности компьютера и ограниченности исходной информации вынужденно представляли каменной стеной.



Рис.4. Левая граница дождя очерчена четко. Для оценки масштаба можно использовать шоссе. Граница дождя изогнута – это следствие геометрии воздушных потоков в зоне. Кроме того, они и по горизонтали закручены. Описать явления вокруг одного облака (с горизонтальным размером в несколько километров) в глобальной модели атмосферы Земли затруднительно

полушария  $S_N = 2\pi R_3^2 \approx 2,6 \cdot 10^8$  км<sup>2</sup>. Таким образом, одна аэрологическая станция приходится в среднем на площадь  $S_1 \approx S_N/650 \approx 4 \cdot 10^5$  км<sup>2</sup>. Такую площадь имеет квадрат со стороной, равной расстоянию от Москвы до Санкт-Петербурга (~ 600 км). Если вместо аэрологической сети рассмотреть синоптическую, то сторона квадрата уменьшится примерно до 300 км.

Эта оценка дает примерное представление о минимальном горизонтальном масштабе тех явлений, которые мы имеем шансы предсказать. Действительно, прежде чем вычислять эволюцию метеорологических полей, мы уже должны предположить, что в начальный момент времени значения метеорологических элементов в Бологом суть средние арифметические значения этих же элементов в Москве и Санкт-Петербурге. Предположение грубоватое, особенно если учесть, что выпадение дождя в одном районе Москвы может наблюдаться при ясной погоде в другом, так что резкую границу выпадения дождя иногда можно увидеть даже на асфальте (рис.4).

Из нашей оценки также следует, что для прогноза с мелким шагом порядка 10 км необходимо количество метеорологических станций увеличить примерно в тысячу раз, что нереально с экономической точки зрения. Прогресс возможен лишь при переходе к качественно иным методам измерений: например, если будет найден метод повышения точности и расширения области зондирования радаров, с помощью которых в настоящее время производят измерения в районе аэропортов, или метод повышения точности и разрешающей способности метеорологических спутников (рис. 5, 6).

В ближайшее время растущая точность<sup>16</sup> спутников, видимо, сравняется с точностью метеозондов, и это

<sup>16</sup> Увеличивается количество частот, на которых спутник измеряет уходящее в космос излучение атмосферы, улучшаются вычислительные алгоритмы решения так называемой обратной задачи: определения профиля температуры  $T(z)$  по измеренному распределению излучаемой энергии по частотам.

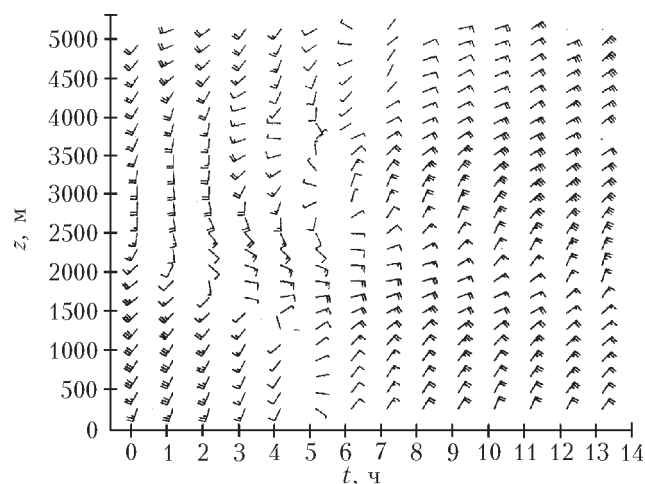


Рис.5. Профайлеры, измеряющие ветер одновременно на всех (до высоты в несколько километров) высотах, эксплуатируются сравнительно недавно. Это оборудование дорогое, но зато каждое отдельное измерение стоит намного дешевле, чем запуск радиозонда. На рисунке видно, как происходит изменение направления ветра со временем — на разных высотах отнюдь не одновременно. Типичный угол наклона фронта порядка  $1^\circ$ . Направление стрелки указывает направление ветра. Если она смотрит вверх, то ветер южный, а если направо — западный. Оперение описывает силу ветра. Длинное перо отвечает скорости 5 м/с, а короткое — вдвое меньшей

изменение количества информации, в свою очередь, существенно повлияет и уже влияет сейчас на методы усвоения оперативной метеорологической информации (т.е. регулярно поступающей в установленное время суток и в установленной форме).

А если отказаться от равномерного распределения метеорологических станций? Расположим десяток их в районе Москвы, и уж тогда для Москвы дадим точный прогноз. Не получится. Сами уравнения, описывающие динамику атмосферы, позволяют оценить скорость распространения влияния из одной точки в другую — около 300 м/с. Да и скорость ветра в 50 м/с на высоте нескольких километров вполне обыкновенна. Даже если ориентироваться на эту меньшую скорость, нужно признать, что за час частицы воздуха могут преодолеть 180 км. Следовательно, даже при прогнозе на одни сутки ареал влияния на погоду в Москве значительно превосходит Московскую область, и поэтому необходимо иметь информацию извне области. Так что при прогнозе погоды более чем на сутки даже в такой большой стране, как Россия, необходимы данные из-за границы.

Уже упоминалось, что прогноз в Гидрометцентре России считают один-два раза в сутки (для усвоения данных считают на небольшой срок, но зато чаще: четыре раза в сутки). При этом нужно либо вовсе отказываться от результатов измерений, производимых не в то время (не в основные сроки измерений), либо слабо учитывать эти данные, причем тем слабее, чем больше различаются срок измерения  $t_{\text{изм}}$  и основной срок наблюдения  $t_0$ , начиная с которого мы

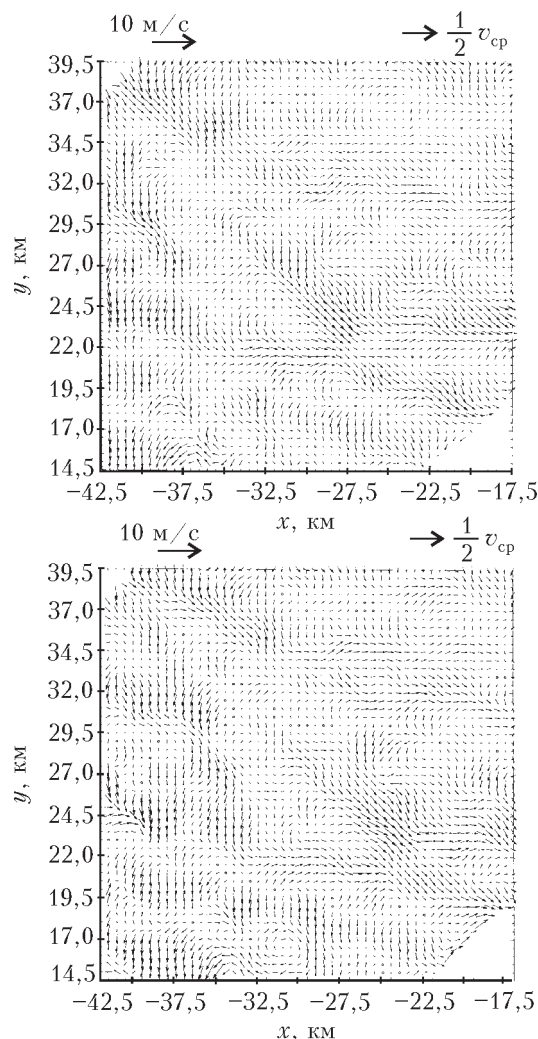


Рис.6. Можно попытаться разделить средний ветер и ветер локальный. На верхнем квадрате  $25 \times 25$  км с разрешением 0,5 км приведено поле отклонения ветра от среднего по этому же квадрату на высоте 1 км (где уже на ветер слабо влияют особенности земной орографии, дома и т.п.). Измерения проводились совместно двумя радарами в Оклахоме в 14 ч 38 мин по Гринвичу 27 июля 1977 года. Вектор среднего потока (точнее,  $1/2 v_{\text{ср}}$ ) приведен в верхнем правом углу и составляет 14,8 м/с. Видно, что отклонения меньше среднего потока на порядок (но не более!). И у них есть своя повторяющаяся структура — вихри с характерным размером 4 км. На нижнем рисунке приведены измерения ветра, проведенные при тех же условиях, что и на верхнем, но спустя примерно 3,5 мин. Средний ветер практически не изменился, а мелкомасштабная структура отклонений от него изменилась. Основное изменение (хотя не все сводится к нему) — перенос вдоль основного потока в восточном направлении. Можно оценить, что вся начальная картинка «уйдет» из рассматриваемого квадрата примерно за 28 мин — для посадки или взлета самолета вполне достаточно

считаем прогноз.<sup>17</sup> При такой организации отказываться приходится от большого объема информации

<sup>17</sup> Фактически прогноз начинается через несколько часов после  $t_0$ : данные измерений в закодированном (для прохождения по каналам) виде поступают в компьютер, где раскодируются по специальной программе. Так что сначала прогноз, вычисленный компьютером, догоняет реальное время, а потом обгоняет.

(напомним, что некоторые метеорологические станции запускают зонды четыре раза в сутки, а спутники производят измерения практически непрерывно).

Для того чтобы использовать эту асинхронную информацию, можно применять следующую процедуру. Стартуя с момента  $t_0$ , дать прогноз на небольшой срок  $\delta t$ , затем, используя полученный результат в качестве первого приближения, «подкачать» данные, относящиеся к интервалу времени  $(t_0, t_0 + \delta t)$ , потом уточненный прогноз на момент  $t_0 + \delta t$  использовать как начальное условие для прогноза на период  $(t_0 + \delta t, t_0 + 2\delta t)$  и т.д. Поскольку для практики нужен прогноз погоды с заблаговременностью  $T \gg \delta t$ , то время от времени нужно считать и прогноз на срок  $T$ , но при этом в начальные данные для такого прогноза входят и более ранние данные из интервала  $(t_0 - k\delta t, t_0)$ , где  $k$  – число «подкачек» информации. Мы как бы делаем прыжок с непрерывно движущейся ленты эскалатора, а не с неподвижной Земли. После того как посчитан новый прогноз, можно уже его использовать в качестве первого приближения и вводить поправки, чтобы следующий прогноз был еще ближе к наблюдениям. Разумеется, для реализации такой весьма непростой процедуры «непрерывного», его еще называют четырехмерным, усвоения данных нужно производить большее количество вычислений, чем для решения динамической задачи с фиксированным начальным полем, а следовательно, иметь более мощный компьютер.

Другой вариант усвоения называется вариационным. Всевозможные поля температуры, давления, влажности и ветра в атмосфере, т.е. несколько функций трехмерного аргумента, образуют бесконечномерное про-

странство. Динамика погоды – траектория в этом пространстве. И ее оценка составляет задачу прогноза погоды. Реальный компьютер имеет ограниченные память и быстродействие и не может рассчитывать динамику системы с бесконечным числом степеней свободы. Современные дискретные модели прогноза погоды имеют число степеней свободы в диапазоне  $N = 10^7 - 10^8$ . Вместо расчета «истинной траектории» строят ломаную с шагом в несколько минут. Для модели нужна стартовая точка в этом  $N$ -мерном пространстве. Измерение несет информацию об одной из координат траектории в  $N$ -мерном пространстве в момент измерения. Если всего за период усвоения единиц информации больше  $N$  (а на практике так и происходит), то траектории, в точности соответствующей всем измерениям, не существует. Сама модель приближенная, да и измерения производятся с какими-то погрешностями.

Переформулируем постановку задачи: найдем такую траекторию, что сумма квадратов отклонений траектории от измеренных значений будет минимальна. Самый простой аналог такой задачи (решаемый методом наименьших квадратов) – когда на плоскости имеется  $m$  точек и требуется провести прямую так, чтобы сумма квадратов  $m$  отклонений точек от прямой была минимальной. Наша задача имеет три отличия: все происходит не на двумерной плоскости, а в  $N$ -мерном пространстве; траектории не прямые, а весьма сложные кривые; мы знаем не полностью точки, а лишь некоторые их координаты.

*(Продолжение следует)*

## НАША ОБЛОЖКА

### Что такое пена?

*(Начало см. на 4-й странице обложки)*

**Почему жидкая пена белая?** Хаотично ориентированные пузырьки отражают падающий свет в разные стороны, т.е. рассеивают его. А тонкая пленка любой жидкости (шампуни, газированные напитки и т.п.), окружающая газовые пузырьки, практически бесцветна на просвет и почти не влияет на цвет пены. Поэтому цвет у пены самых различных жидкостей один и тот же – цвет падающего на нее света. Чтобы увидеть пену, например, красного цвета, достаточно поднести ночью стакан с пеной к красному фонарю стоп-сигнала автомобиля. А чтобы увидеть черную пену, можно поместить ее на черную бумагу и осветить пучком параллельных лучей света, например прошедшего через узкую щель. Если посмотреть на освещенную пену через увеличительное стекло, то она будет казаться черной за исключением нескольких ячеек, дающих блики в сторону наблюдателя.

**Пена на земле и в космосе.** Природные материалы часто имеют структуру пены. Это дерево, пробка, губка или кораллы. Многие искусственные материалы тоже похожи на пену – например, взбитые сливки, хлеб, пенопласт, монтажная пена. Пену можно изготовить и из расплавленного металла, пропуская через него пузырьки газа. Охлаждаясь, металлическая пена превращается в твердое пористое тело,

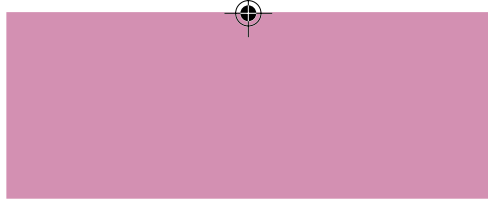
свойства которого зависят от процентного содержания газа в пене. Например, плотность алюминиевой пены, содержащей 94% воздуха (по объему), в 6 раз меньше плотности воды, а теплопроводность в 100 раз меньше, чем у обычного алюминия. Изменяя процентное содержание воздуха, можно получать пену с различными физическими свойствами.

Изготовление материалов с заданными свойствами открывает широкие возможности в биомедицине. Так, при лечении переломов часто используют имплантанты – искусственные элементы, заменяющие утраченные части кости. Однако если модули Юнга кости и имплантанта различаются, то последний в конце концов просто отторгается. А вот твердая пена из титана с модулем упругости, равным модулю упругости костной ткани, представляет собой идеальный материал для имплантанта в данном случае.

Получить стабильную жидкую пену с одинаковыми характеристиками по всему объему образца мешает гравитация. Со временем мелкие газовые пузырьки сливаются в крупные, а жидкость скапливается внизу сосуда. Этот процесс называют старением пены. Если старение пены происходит быстро, то изучать ее очень сложно. Поэтому лучше всего исследовать пенообразование в невесомости. Эта тема действительно включена в научную программу межпланетных космических станций.

*К. Богданов*





# О сумме телесных углов многогранника

И. БОГДАНОВ

ИЗ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ИЗВЕСТНО, ЧТО СУММА углов любого треугольника равна  $\pi$ . Более того, этот результат легко обобщается на выпуклые<sup>1</sup> многоугольники: сумма углов любого выпуклого  $n$ -угольника равна  $(n-2)\pi$ .

Точным пространственным аналогом угла многоугольника является *телесный угол* многогранника. Возникает естественный вопрос – а что можно сказать про сумму всех телесных углов выпуклого многогранника? Ответу (в некотором смысле) на этот вопрос и посвящена данная заметка. В частности, мы дадим решение задачи М2153 «Задачника «Кванта». Ее формулировка такова.

**М2153.** Сумма телесных углов при вершинах выпуклого многогранника равна  $\pi$ . Докажите, что существует замкнутый маршрут по его ребрам, проходящий через каждую его вершину ровно один раз.

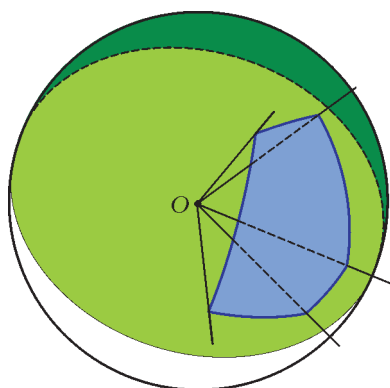


Рис. 1

называется величиной телесного угла (или просто телесным углом) данного угла  $P$  (рис.1).

Ясно, что это определение является точным аналогом величины обычного угла на плоскости (рис.2). Сумму всех телесных углов выпуклого многогранника  $K$  мы будем в дальнейшем обозначать через  $\Sigma(K)$ . Мы будем пользоваться тем, что площадь единичной сферы равна  $4\pi$ .

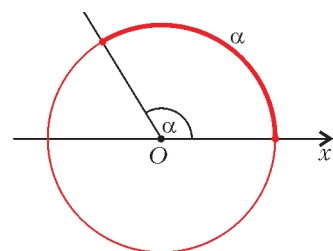


Рис. 2

Прежде чем оценивать сумму телесных углов многогранника, полезно

Напомним определение телесного угла.

**Определение 1.** Рассмотрим выпуклый многогранный угол  $P$  с вершиной  $O$  в пространстве; проведем сферу единичного радиуса с центром  $O$ . Площадь части сферы, попавшей внутрь  $P$ ,

для начала разобраться, а какие значения может вообще принимать телесный угол. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема 1.** Телесный угол выпуклого многогранного угла  $P$  может принимать все значения из интервала  $(0; 2\pi)$ , и только их.

**Доказательство.** Мы докажем, что для выпуклого многогранного угла  $P$  существует плоскость  $\gamma$ , пересекающая его только по вершине. Это будет означать, что  $P$  лежит по одну сторону от этой плоскости. Тогда часть сферы, попавшей внутрь  $P$ , будет находиться в одной полусфере, ограниченной плоскостью  $\gamma$ ; значит, ее площадь будет меньше площади этой полусферы, т.е.  $2\pi$  (см. рис.1).

Пересечем наш многогранный угол произвольной плоскостью  $\alpha$ ; в сечении получится выпуклый (плоский) угол. Значит, в плоскости  $\alpha$  найдется прямая  $k$ , пересекающая  $P$  только по вершине (рис.3).

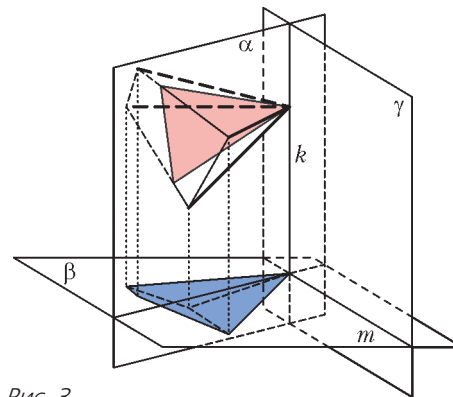


Рис. 3

Спроектируем наш многогранный угол на плоскость  $\beta$ , перпендикулярную  $k$ . Нетрудно понять, что в проекции получится также выпуклый угол (иначе бы  $k$  пересекала  $P$  по лучу). Значит, в плоскости  $\beta$  можно найти прямую  $m$ , пересекающую проекцию ровно по вершине. Тогда плоскость  $\gamma$ , проходящая через прямые  $k$  и  $m$ , – искомая.

Осталось доказать, что телесный угол может принимать все значения между  $0$  и  $2\pi$ . Пусть плоскость  $\gamma$ , проходящая через центр

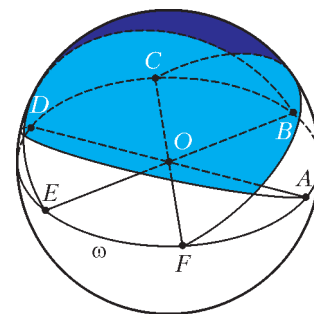


Рис. 4

<sup>1</sup> И даже на невыпуклые, но уже чуть посложнее; см. по этому поводу [1, задача 8].

сферы, пересекает ее по окружности  $\omega$ . Впишем в эту окружность правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Пусть плоскости  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  получаются из  $\gamma$  поворотами на угол  $\Phi$  относительно прямых  $AD, BE$  и  $CF$  (рис.4). Тогда эти плоскости образуют выпуклый трехгранный угол  $P_\Phi$ . Нетрудно видеть при этом, что, когда  $\Phi$  достаточно мал, телесный угол трехгранного угла  $P_\Phi$  близок к  $2\pi$ , а когда  $\Phi$  приближается к  $\pi/2$ , этот телесный угол становится сколь угодно малым.

**Тетраэдр**

Как и в плоскости, удобно начать с рассмотрения самого простого случая. В пространстве самым «простым» многогранником является треугольная пирамида, или тетраэдр.

Попытавшись построить несколько примеров (сделайте это!), нетрудно понять, что сумма телесных углов тетраэдра постоянной не является. Действительно, рассмотрим треугольник  $ABC$  и точку  $D'$  в его плоскости. Построим тетраэдр  $ABCD$  такой, что  $DD' \perp (ABC)$ , и расстояние  $DD'$  очень маленькое.

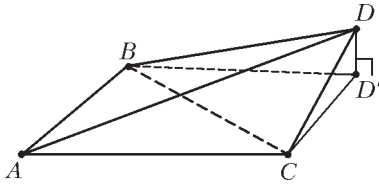


Рис. 5

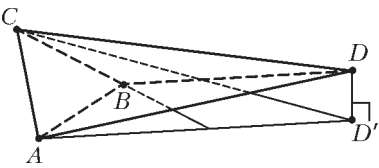


Рис. 6

Тогда нетрудно видеть, что если точки  $A, B, C, D'$  образуют выпуклый четырехугольник, то все телесные углы тетраэдра  $ABCD$  довольно малы (рис.5). Если же, скажем, точка  $B$  попадает внутрь треугольника  $ACD'$  (рис.6), то телесный угол при вершине  $B$  может быть очень большим: как мы уже видели, соответствующий трех-

гранный угол может высекать почти половину соответствующей сферы.

Итак, интересующая нас сумма уже может быть близка к нулю или к  $2\pi$ . Следующий естественно возникающий вопрос – а насколько большой может оказаться эта сумма? Попробуем ее оценить.

Рассмотрим тетраэдр  $ABCD$ . Для того чтобы оценить величину  $\Sigma(ABCD)$ , удобно все его трехгранные углы снести в одну точку  $O$  и посмотреть, что они будут высекать на единичной сфере  $\Omega$  с центром  $O$ . Пусть при этом лучи  $AB, AC, BC$  трехгранного угла с вершиной  $A$  перешли в лучи  $OB_A, OC_A, OD_A$  (точки  $B_A, C_A, D_A$  лежат на  $\Omega$ ); аналогично определим остальные точки (рис.7). Поскольку лучи  $AB$  и  $BA$  противоположно направлены, точки  $B_A$  и  $A_B$  будут противоположными точками сферы; то же можно сказать про остальные аналогичные пары точек.

Проведем через  $O$  плоскости  $S_A, S_B, S_C, S_D$ , параллельные граням  $BCD, ACD, ABD, ABC$  соответственно. Лучи, соединяющие  $O$  с точками  $B_C, B_D, C_B, C_D, D_B, D_C$ , параллельны плоскости  $BCD$ ; значит, все эти точки лежат в плоскости  $S_A$ . Проводя аналогичные рассуждения для остальных плоскостей,

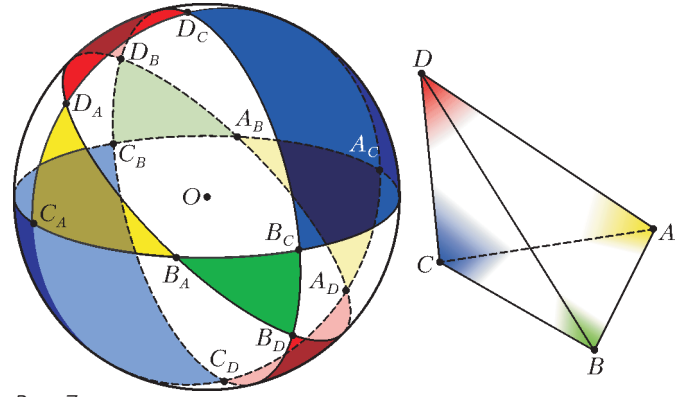


Рис. 7

получаем, что точки  $B_A$  и  $A_B$  лежат в пересечении плоскостей  $S_C$  и  $S_D$ ; аналогично для других точек.

Теперь осталось на нашем рисунке найти требуемую величину  $\Sigma(ABCD)$ . Величины телесных углов тетраэдра – это площади сферических треугольников  $B_A C_A D_A, A_B C_B D_B, A_C B_C D_C, A_D B_D C_D$ . Заметим, что эти треугольники не пересекаются. Более того, они не пересекаются также с треугольниками, симметричными им относительно  $O$  (это, соответственно, треугольники  $A_B A_C A_D, B_A B_C B_D, C_A C_B C_D, D_A D_B D_C$ )! Значит, сумма площадей этих 8 треугольников не больше площади сферы, т.е.

$$\Sigma(ABCD) \leq 4\pi/2 = 2\pi. \tag{1}$$

При этом видно, что остались непокрытыми несколько сферических четырехугольников (таких, как  $B_A B_C D_C D_A$  на рисунке 7). Значит, в неравенстве (1) знак можно заменить на строгий. С другой стороны, мы видели, что  $\Sigma(ABCD)$  может оказаться сколь угодно близкой как к 0, так и к  $2\pi$ . Однако для любых двух тетраэдров мы можем непрерывно «продеформировать» один из них так, чтобы получить тетраэдр, равный другому. При этом  $\Sigma(ABCD)$  будет меняться непрерывно; значит, она может принимать все значения из промежутка  $(0; 2\pi)$ .

Тем самым, доказана такая теорема.

**Теорема 2.** Для любого тетраэдра  $ABCD$  мы имеем  $0 < \Sigma(ABCD) < 2\pi$ ; при этом для любого  $\alpha \in (0; 2\pi)$  существует тетраэдр  $ABCD$ , для которого  $\Sigma(ABCD) = \alpha$ .

**Задача 1.** В тетраэдре  $ABCD$  известна величина  $\Sigma(ABCD)$ . Чему равна сумма двугранных углов при его ребрах?

**Проблемы**

Итак, с тетраэдром мы вроде бы разобрались. Однако при попытке перенести предыдущее рассуждение на произвольный многогранник нас ожидают некоторые проблемы. Одну из них мы решим на месте, для решения же остальных потребуется взглянуть на наше доказательство несколько с другой стороны.

**Проблема 1.** Чтобы двигаться дальше, прежде всего надо сформулировать, а чего же мы хотим. В плоском случае вопрос о сумме углов ставился отдельно для выпуклых многоугольников с  $n$  сторонами – все такие многоугольники в некотором смысле «похожи» друг на

друга. Однако какими же параметрами задавать многогранник? Количеством вершин, ребер, граней?

На рисунках 8 и 9 изображены два многогранника с 8 вершинами, 12 ребрами и 6 гранями; однако вряд ли кто-то скажет, что они «похожи»: например, у одного есть пятиугольные грани, а у

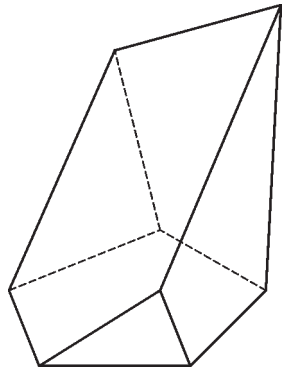


Рис. 8

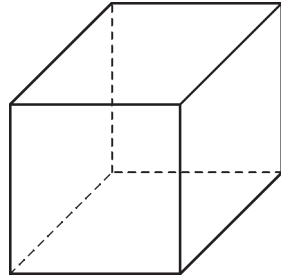


Рис. 9

другого их нет. Таким образом, нужно ввести более сильное понятие «похожести» многогранников. Таким понятием является комбинаторный тип.

**Определение 2.** Будем говорить, что многогранники  $K$  и  $L$  имеют одинаковый комбинаторный тип, если у них одинаковое количество вершин и их можно занумеровать (вершины многогранника  $K$  –  $A_1, \dots, A_n$ , а вершины многогранника  $L$  –  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ) так, чтобы

а) вершины  $A_i, A_j$  были соединены ребром в  $K$  тогда и только тогда, когда вершины  $B_i, B_j$  соединены ребром в  $L$ ;

б) более того, вершины  $A_i, \dots, A_m$  образуют (именно в этом порядке) грань многогранника  $K$  тогда и только тогда, когда вершины  $B_i, \dots, B_m$  образуют (именно в этом порядке) грань многогранника  $L$ .

В этом смысле многогранники на рисунках 8 и 9 имеют разный комбинаторный тип, а многогранники на рисунках 9 и 10 – одинаковый. Вопрос же, на который мы хотим ответить, таков.

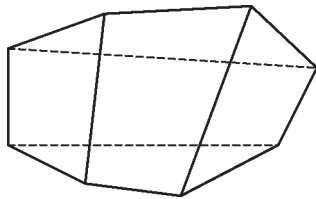


Рис. 10

легко разрезать на треугольники так, что все их вершины будут являться вершинами исходного многоугольника (рис.11);

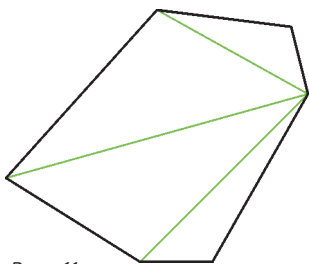


Рис. 11

Для данного комбинаторного типа многогранника определить, в каких пределах может изменяться сумма его телесных углов.

**Проблема 2.** Произвольный выпуклый  $n$ -угольник легко разрезать на треугольники так, что все их вершины будут являться вершинами исходного многоугольника (рис.11); при этом в каждом таком разрезании будет ровно  $n - 2$  треугольника. Понятно, что если сложить все суммы углов треугольников разбиения, то получится сумма углов исходного многоугольника, откуда и следует формула для суммы его углов.

Можно попробовать применить тот же подход и к выпуклому многограннику. Однако один и тот же многогранник можно разрезать на разное количество тетраэдров! Например, если рассмотреть объединение двух  $n$ -угольных пирамид  $SA_1A_2 \dots A_n$  и  $TA_1A_2 \dots A_n$  с общим основанием, то его можно разрезать как на  $n$  тетраэдров  $STA_1A_2, STA_2A_3, \dots, STA_nA_1$ , так и на  $2(n - 2)$  тетраэдра: сначала – плоскостью основания – на две пирамиды, а затем каждую пирамиду на  $n - 2$  тетраэдра (рис.12). Для произвольного же многогранника непонятно даже, на какое минимальное число тетраэдров его вообще можно разрезать.

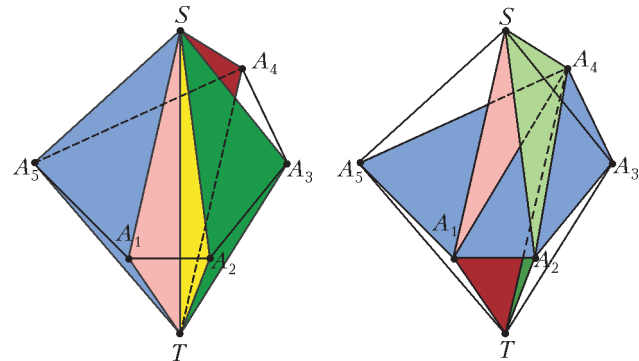


Рис. 12

**Проблема 3.** Даже если удастся разрезать многогранник  $K$  на несколько тетраэдров – это может дать только оценку сверху на  $\Sigma(K)$  (а именно, если число тетраэдров равно  $d$ , то  $\Sigma(K) < 2\pi d$ ). Для оценки с другой стороны ничего лучше, чем  $\Sigma(K) > 0$ , мы таким путем не получим. В то же время не очень ясно, правда ли, что для любого комбинаторного типа можно придумать многогранник такого типа со сколь угодно малой суммой телесных углов.<sup>2</sup>

**Проблема 4.** Наконец, можно попробовать другой подход: не резать многогранник на тетраэдры, а попытаться повторить рассуждения из предыдущего раздела напрямую. Именно, надо совместить вершины всех многогранных углов и посмотреть, какой рисунок получится на сфере.

Однако и этот подход сопряжен с трудностями. В случае тетраэдра, как мы видели, соответствующие сферические треугольники не перекрывались (поэтому сумма телесных углов была не больше  $4\pi$ ) – и даже не перекрывались с симметричными им (а значит, оценка усиливалась до  $2\pi$ ). Однако даже для тетраэдра осознание того, что рисунок будет всегда выглядеть именно так, как на рисунке 7, требует некоторого стереометрического воображения. Его может не хватить уже для рассмотрения  $n$ -угольной пирамиды (попробуйте!); в случае же произвольного многогранника общая картина совершенно ускользает.

Кроме того, понятно, что для достаточно сложных многогранников (например, для  $n$ -угольной призмы) сумма телесных углов может быть гораздо больше  $4\pi$ ; это значит, что соответствующие области на сфере

<sup>2</sup> Мы вскоре выясним, что это неправда.