Физики в тумане

С.ВАРЛАМОВ

Начнем с такой задачи:
Капельки воды в тумане имеют диаметр 10^{-5} м. Какова водность воздуха, если днем в тумане в десяти шагах (7м) узнать человека уже невозможно? Водностью называется количество жидкой воды (в граммах) в 1 $м^3$ воздуха.

Не вполне определенное условие «узнать невозможно» следует перевести на физико-математический язык. Чтобы «узнать» человека, нужно «прочесть надписи» на его лице, т.е. распознать структуру темных и светлых участков, которая у каждого человека индивидуальна.

Основными параметрами, определяющими возможность узнавания, являются острота зрения и контраст изображения на сетчатке глаза. Начнем с остроты зрения. В воздухе при отсутствии тумана человек может по четкой фотографии определенного размера узнать, кто на ней изображен, только в некотором диапазоне расстояний. Чем дальше от глаз находится фотография, тем меньше размеры ее изображения на сетчатке глаза и тем меньше светочувствительных клеток – колбочек – принимают участие в «узнавании».

Измерения, проведенные с большим количеством участников, показывают, что для большинства людей с нормальным зрением вполне доступно с расстояния 10 м распознать как раздельные одинаковые темные пятна диаметром a = 1 мм с зазором между ними, равным их диаметру. Причем пятна эти располагаются на хорошо освещенной белой поверхности. Получается, что угловое разрешение глаза при нормальном зрении составляет около 1 угловой минуты. При увеличении расстояния в 2 (а тем более в 3) раза большинство людей уже не могут отличить два таких пятнышка от сплошной черточки с длиной, равной трем диаметрам пятнышек, и с такой же площадью черной поверхности. Связано это с тем, что колбочки сетчатки человеческого глаза (рис.1) имеют поперечные размеры порядка b = (0,001–0,004) мм, максимальная «длина глаза» составляет $l \approx 25$ мм, а радиус кривизны роговицы – прозрачной передней стороны склеры (оболочки глаза) – равен $r \approx 8$ мм. Этими тремя величинами и определяется предельное угловое разрешение – острота зрения. Если расстояние от глаза до пятнышек с размерами a обозначить через B, то предельное расстояние, на котором еще можно различать эти пятнышки как разные, найдется из очевидного геометрического соотношения:

$$B \le \frac{a(l-r)}{b} \approx (4-16)\ м\ .$$

При этом изображение на сетчатке глаза, создаваемое каждым пятнышком (с диаметром 1 мм), может «накрыть» одну колбочку. Чтобы глаз мог видеть два темных пятнышка раздельными, нужно, чтобы они попадали на разные колбочки и между ними была бы как минимум одна освещенная колбочка. Если же расстояние B увеличить в 3 раза, то изображения расположенных рядом пятнышек «лягут» на одну колбочку или не попадут ни на одну колбочку – в обоих случаях различить пятнышки не удастся.

Световые пятнышки (темные или светлые) на сетчатке глаза теоретически могут иметь минимальный размер около 0,004 мм, что связано с волновой природой света. Действительно, при диаметре зрачка D = 6 мм и длине волны λ = 0,5 мкм (в воздухе) на расстоянии l = 25 мм в среде с коэффициентом преломления n = 1,33 диаметр пятна (по размеру первого минимума дифракционной картины) составит

$$d = 2 \cdot 1{,}22 \frac{\lambda l}{Dn} \approx 4\ \text{мкм}\ .$$

Всего колбочек на сетчатке одного глаза около 7–8 миллионов, а область наиболее резкого зрения ограничивается телесным углом с максимальным раствором порядка $7°$. На сетчатке этому углу соответствует так называемая центральная ямка, в которой сосредоточено около 10% всех колбочек (примерно 800×800), остальные колбочки распределены по поверхности сетчатки в тех местах, где глаз видит «боковым зрением». С увеличением угла отклонения лучей от направления прямого зрения до $10°$ острота зрения падает примерно в 5 раз, а при бóльших углах она уменьшается еще больше. И это легко понять – на периферии сетчатки в принципе невозможно получить точечное изображение светящейся точки, поэтому здесь нет необходимости иметь большую концентрацию светочувствительных клеток.

Все сказанное справедливо не только для глаза, но и для собирающей линзы в воздухе, с которой легко проводить проверочные эксперименты. Кстати, и для глаза и для простой стеклянной линзы со сферическими поверхностями параллельные лучи света, составляющие немаленькие углы с осью симметрии оптической системы, вовсе не собираются в фокальной плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. Наилучшая концентрация таких лучей получается на кривой внутренней поверхности глаза – на сетчатке, форма которой выбиралась природой в течение миллионов лет эволюции зрячих живых существ.

При удалении от глаз наблюдателя фотографии, по которой нужно узнать человека, размер изображения на сетчатке глаза уменьшается, и, когда информации для распознавания становится недостаточно, узнать, кто изображен на фото, становится невозможно. Насколько велико требуемое количество информации? Конкретнее: сколько пятнышек должно быть в изображении и как должны отличаться яркости этих пятнышек? С помощью компьютера можно

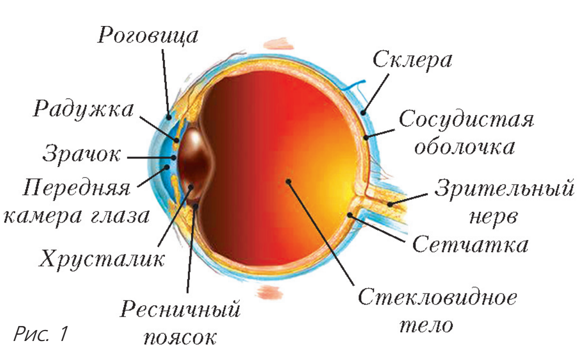
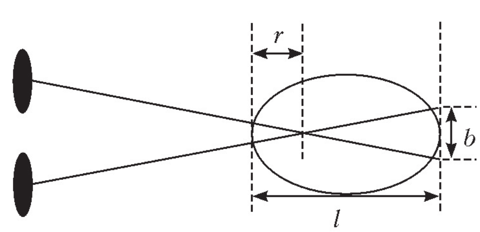


Рис. 1



провести простой эксперимент, в котором цифровые фотографии одних и тех же геометрических размеров формируются разными количествами светлых и темных пятен, т.е. их «размер в пикселях» (или в колбочках) постепенно увеличивается (рис.2). Начиная с некоторого количества пятен,

Рис. 2

можно, при небольшой доле фантазии, «узнать» изображенного человека (знакомого нам по портретам).

На светлом фоне тумана вся фигура человека и его лицо естественно выглядят темными. Максимальная относительная яркость пятен на лице определяется коэффициентом отражения света и составляет около 0,5. Есть и более темные участки изображения лица на сетчатке глаза – вплоть до контрастности 1,0, которая определяется как отношение разности максимальной и минимальной яркостей пятен к максимальной яркости. Можно выражать эту величину в процентах, тогда максимальная контрастность будет 100%.

Диапазон от 0,5 до 0,1 по степени яркости (или от 0 до 80% по контрастности) можно разбить на несколько частей. Причем для надежного распознавания деталей нужно, чтобы на границах пятен яркость скачком изменялась на заметную величину. Если изменение яркости составляет 20%, то достаточно всего четырех уровней для «заполнения» всего диапазона ($80/20 = 4 = 2$ бита). В результате минимальное количество информации (в битах), необходимое для распознавания лица человека, равно примерно $30\times30\times2 = 1{,}8\times10^3$. Тогда при отсутствии тумана и при нормальном освещении человека с характерным размером головы 20 см можно узнать по лицу с расстояния, равного $0{,}3\text{ м}\times(20\text{ см}/4\text{ см})\times\times(800/30) = 40\text{ м}$. Здесь 0,3 м – это расстояние наилучшего зрения, множитель (20 см / 4 см) обеспечивает «размещение» изображения лица человека на центральной ямке, а множитель (800 / 30) «доводит» размер изображения в колбочках до величины 30×30. В условии задачи указанное расстояние – 10 шагов или 7 м – гораздо меньше, чем 40 м, т.е. не это обстоятельство (уменьшение размеров изображения на сетчатке глаза) мешает узнать человека в тумане.

При наличии между глазом наблюдателя и рассматриваемым объектом «подсвеченного» тумана контрастность изображения на сетчатке глаза убывает по мере удаления от объекта наблюдения, постепенно уменьшаясь до нуля. Это обусловлено двумя процессами, идущими одновременно. Во-первых, по мере удаления от источника свет постепенно рассеивается, но это не самое главное. А главное то, что (во-вторых) по мере увеличения толщины слоя тумана между источником света и глазом растет так называемая подсветка. Доля света, идущего напрямую в глаза наблюдателя от источника света (фотографии), падает, а доля света от других источников, рассеянного каплями тумана и тоже попадающего в глаза, растет. На серии фотографий (рис.3), приведенных для иллюстрации этого явления (подсветки), отчетливо видно, что яркость окружения не меняется, светлые пятна на картинках становятся еще светлее, а темные пятна постепенно светлеют, пока и те и другие не сравниваются по яркости с окружением. Переход от первой пары фотографий (слева) ко второй и так далее (вправо) соответствует увеличению «плотности» тумана в определенное число раз. Постепенно фотографии становятся настолько светлыми, что по лицам уже узнать кого-либо затруднительно, а вот подписи к рисункам все еще продолжают читаться. Это говорит о том, что для распознавания образов, в частности лиц людей, важны резкие темные линии. Такие линии характеризуют форму глаз, бровей, рта, носа. Вот по этим линиям мы и узнаем тех, кто изображен на рисунке или на фотографии.

Вернемся к нашей задаче. Когда говорят об узнавании на расстоянии, то обычно предполагают, что для этой операции достаточно «одного взгляда». Поэтому мы облегчим задачу, указав в качестве минимальной контрастности величину 20%.

Капельки тумана диаметром 10 мкм значительно больше, чем длины всех видимых глазами световых волн, поэтому можно считать, что рассеивание света не зависит от длины волны, т.е. свет всех цветов рассеивается такими шариками одинаково и практически не поглощается. Поскольку на капельки, находящиеся между двумя людьми, свет падает со всех сторон, каждая капелька является шаровым источником света с определенной яркостью или силой света. Белая стена тумана – это сплошная стена из таких шариков, так как в каком бы направлении мы ни смотрели, луч зрения на некотором расстоянии обязательно «упрется» в какой-нибудь из шариков. Если на пути к объекту наблюдения 80% площади картинки будет покрыта шариками, то в этом случае контрастность видимой картинки не превысит 20 %. Таким образом, можно будет найти связь между размерами капелек-шариков $D_к$, их концентрацией в воздухе $n_к$ и расстоянием L, на котором человека в тумане узнать невозможно.

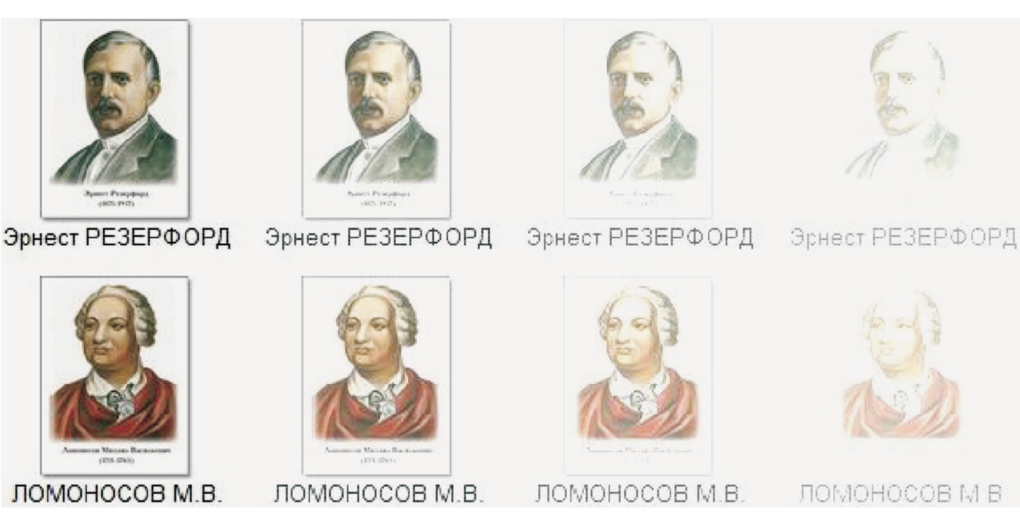


Рис. 3

Рассмотрим слой тумана площадью S с малой толщиной x. В объеме Sx находится $n_к Sx$ капелек. Они закрывают собой $\left(\pi D_к^2 n_к \times x/4\right)$-ю долю площади, т.е. незакрытой остается только $\left(1-\pi D_к^2 n_к \times x/4\right)$-я доля площади. Если таких слоев много, то по мере увеличения количества слоев доля незакрытой площади становится все меньше и меньше. При общей толщине слоя тумана L доля площади, оставшейся незакрытой, равна

$$\left(1-\frac{\pi D_{\text{к}}^2 n_{\text{к}} x}{4}\right)^{\frac{L}{x}}=\left(1-\frac{\pi D_{\text{к}}^2 n_{\text{к}} x}{4}\right)^{\frac{4\pi D_{\text{к}}^2 n_{\text{к}} L}{4\pi D_{\text{к}}^2 n_{\text{к}} x}}=$$

$$=(1+y)^{\frac{1}{y}\left(-\frac{\pi D_{\text{к}}^2 n_{\text{к}} L}{4}\right)}=e^{-\frac{\pi D_{\text{к}}^2 n_{\text{к}} L}{4}}=0,2\,.$$

В этой цепочке формул малая величина $\left(-\frac{\pi D_{\text{к}}^2 n_{\text{к}} x}{4}\right)$ обозначена символом y. А про выражение $(1+y)^{\frac{1}{y}}$ известно, что при $y \to 0$ оно имеет замечательный предел – число e. Отсюда можно найти концентрацию капель: $n_{\text{к}} \approx 3\cdot 10^9$ м$^{-3}$ и искомую водность воздуха: $\frac{\rho\pi D_{\text{к}}^3 n_{\text{к}}}{6} \approx 1,5\cdot 10^{-3}$ кг/м^3 .

Лирическое отступление. Чтобы «разборчивость» наблюдаемой картинки или пейзажа стала хуже, совсем не обязательно наличие тумана. Как-то летним днем при совершенно прозрачном воздухе я рассматривал сосны на противоположном берегу пролива между островом и «большой землей» (это было летом на острове Ольхон, что на Байкале). В те промежутки времени, когда воздух над проливом шириной в несколько километров закрывали от солнца облака, были видны мельчайшие подробности. Когда же небо над проливом очищалось от облаков, картинка берега с соснами становилась ярче, но «разборчивость» зрения резко падала именно из за подсветки. Воздух над проливом рассеивал солнечный свет, и мелкие детали, например веточки сосен, уже не различались отчетливо.

Насколько сильно рассеивается воздухом солнечный свет, мне довелось убедиться также, наблюдая с земли за полетом самолета, который в чистом небе оставлял за собой белый след. Область воздуха, оказавшегося в тени туманного следа от самолета, летевшего по прямой линии, представляла собой «толстую стену», и я тоже находился в этой тени. Так вот, смотря на голубое небо перед самолетом и его следом, я видел темную полосу, идущую от самолета до самой земли. Ширина полосы совпадала с шириной белого следа. А справа и слева от этой темной полосы небо было прежним – голубым-голубым. В области тени, созданной самолетным следом, пропала подсветка, а толщина этого слоя воздуха с отсутствующей подсветкой составляла для моего места наблюдения несколько километров. Я ехал на машине, и через некоторое время дорога увела меня из области тени. Темная полоса на голубом небе стала светлеть и постепенно совсем пропала…

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Синицы и... физика

Уже который год осенью прилетают в Рязань синицы и садятся на деревья и кусты рядом с нашим домом. А самые смелые прыгают на подоконники за оконными стеклами – просят еду. Синицы охотно склевывают семечки подсолнечника, которые заботливые жители ежедневно насыпают на подоконники и в подвешенные к деревьям пластмассовые коробочки.

Однако птичкам надо же что-то и пить. Обычно проблем с этим нет – весной, летом и осенью есть лужи, а зимой синицы клюют снег. Но прошлый декабрь выдался в Рязани рекордно бесснежным. Поэтому некоторые жители стали выносить птицам воду в таких же коробочках, что и семечки. Синицы проявили к ней интерес – активно утоляли жажду.

Как-то вынесенная мною коробочка с водой осталась на ночь, и вода в ней промерзла до дна. Принеся в дом бесполезный для птиц лед, я замерил время, за которое он полностью растаял, – оказалось практически точно за 5 часов.

А теперь давайте оценим время таяния льда теоретически. Удельную теплоемкость льда и его удельную теплоту плавления находим по таблицам: $c=2100$ Дж/(кг·К), $\lambda=334000$ Дж/кг . Взглянем на термометры за окном: $t_0=-11$ °C ($T_0=262$ К) и в кухне: $t=22$ °C ($T=295$ К). Определить массу льда (испарением воды в процессе таяния льда пренебрегаем) помог мерный сосуд: m = 0,2 кг. Коробочка представляет собой усеченный конус. Обмерив ее линейкой, нетрудно было вычислить площадь полной поверхности: $S=0,022$ м^2 . Количество теплоты, необходимое для таяния льда, равно

$$Q=-cmt_0+\lambda m\,.$$

Теперь надо оценить эту величину, поскольку точный расчет крайне затруднителен (если вообще возможен) и уж наверняка не нужен.

Лед в сосуде получает тепло из окружающей среды за счет теплопроводности и излучения, ибо конвекция явно незначительна. Учесть теплопроводность для границы воздух–лед было трудно, так как соответствующий табличный коэффициент не удалось найти в справочниках. Но ведь еще есть граница воздух–пластмасса... Считая оба вида теплопередачи – теплопроводность и излучение – примерно равновеликими, примем, что, в соответствии с законом Стефана–Больцмана,

$$Q\sim\sigma S\tau\left(T^4-T_0^4\right),$$

где $\sigma=5,67\cdot 10^{-8}$ Дж/(м^2·с·К^4) – постоянная Стефана–Больцмана, а τ – искомое время таяния льда. Иными словами, полагаем, что лед поглощает тепло как абсолютно черное тело. Конечно, на самом деле он поглощает меньше, но разницу между «чернотой» и «серостью» отнесем на счет теплопроводности. Оценочные расчеты всегда физически смелы и математически просты. Иначе зачем они тогда?

Итак, получаем

$$\sigma S\tau\left(T^4-T_0^4\right)\sim m\left(-ct_0+\lambda\right),$$

откуда находим

$$\tau\sim\frac{m\left(-ct_0+\lambda\right)}{\sigma S\left(T^4-T_0^4\right)}\sim 20000\text{ с}=5,56\text{ ч}\,.$$

Весьма хорошая точность оценочного расчета по сравнению с экспериментом говорит о принципиальной верности выбранной физической модели.

В.Дроздов

Об одной забытой задаче

А.ТОЛПЫГО

А бывает еще и так иногда: бьешься ты над какой-нибудь задачкой, а она не выходит, и тогда ты придумываешь какой-нибудь новый, очень хитрый способ, чтобы ее решить. И представь себе, опять у тебя не выходит! Вот от этого, казалось бы, совершенно бесполезного труда нередко получается неожиданная польза...

С.Бобров. Волшебный двуроги

Для начала сформулируем две задачи.

Задача А. *Докажите, что из любых n целых чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на n.*

Задача В. *Докажите, что из любых* $(2n-1)$ *целых чисел можно выбрать n чисел, сумма которых делится на n.*

Задача **А** широко известна и решается с помощью принципа Дирихле («если $(n+1)$ кроликов требуется рассадить по n клеткам, то хотя бы в одной клетке будет не менее двух кроликов»). А именно, надо рассмотреть числа $S_0 = 0$, $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …, $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. Роль «клеток», по которым нужно рассадить этих «кроликов», играют остатки от деления числа на n. По принципу Дирихле, какие-то два из «кроликов» попадают в одну «клетку», т.е. дают одинаковый остаток от деления на n. Поэтому их разность делится на n, а это и есть то, что требуется.

Напротив, задача **В** (когда-то она была опубликована в журнале «Квант» за 1970 год под номером М45) сейчас незаслуженно забыта. А между тем тут имеется не только замечательный математический факт, но и ряд красивых идей вокруг ее решения. Правда, как будет видно дальше, некоторые из них ведут к доказательству, другие нет. Тем не менее, полезны и те, и другие: если некоторые из них недостаточны для решения этой задачи – пригодятся в другой раз.

Ниже будет обсуждаться именно задача **В**. Но предварительно рассмотрим еще пару задач аналогичного типа.

1. Еще две задачи

Задача С. *Даны N – 1 натуральных чисел* $a_1, \ldots, a_{N-1}$. *Все они больше нуля и меньше N. Известно, что если выбрано любое k,* $0 < k < N$, *и любые k чисел из этого набора, то их сумма не делится на N. Докажите, что все числа в наборе равны между собой.*

Задача D. *Дано 100 чисел, каждое из которых больше 0 и меньше 94. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых при делении на 101 дает остаток 95.*

Решение задачи С. Предположим, что $a_1 \neq a_2$. Рассмотрим суммы $S_0 = a_1$, $S_1 = a_2$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …, $S_{N-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}$. (Первые две суммы равны первым двум членам, остальные – суммы от первого до соответствующего).

По предположению, ни одна из этих сумм не дает остаток 0 при делении на N. Следовательно, две из них дают одинаковый остаток, причем это не первая и вторая. Но тогда разность двух соответствующих сумм делится на N, а это противоречит условию.

Решение задачи D. Сразу признаемся, что мы ограничились числом 101, отчасти чтобы облегчить формулировку, а отчасти – чтобы немного «замутить воду» и слегка прикрыть идею. На самом же деле факт верен в достаточно общей ситуации. А именно, заменим число 101 на любое простое p, а число 95 – на любое число между нулем и p и докажем, что *из* $(p-1)$ *чисел, дающих ненулевой остаток от деления на p, можно составить сумму, которая дает любой наперед заданный ненулевой остаток при делении на p.*

Упорядочим данные числа произвольным образом. Выберем любое k, $0 \le k \le (p-1)$, и возьмем первые k наших чисел. Составим из них всевозможные суммы (одно число или ни одного – тоже сумма; сумма пустого множества чисел предполагается равной 0) и запишем все различные получившиеся остатки от деления этих сумм на p. В частности, на первом шаге (если $k = 0$) есть единственная сумма, и она равна 0.

При произвольном k получились некоторые числа $M_1, \ldots, M_n$. Если среди них уже есть все возможные остатки, то доказывать нечего. Пусть это не так. Добавим к уже выбранным $(k+1)$-е число (пусть оно равно r) и опять выпишем все суммы и все остатки. В результате получатся, во-первых, числа $M_1, \ldots, M_n$ (ведь последнее число можно и не брать), а во-вторых, остатки от деления чисел $M_1 + r, \ldots, M_n + r$ на p.

Теперь мы утверждаем, что во второй группе есть хотя бы одно число, не встречающееся в первой. В самом деле, допустим противное. Тогда получается, что если остаток N совпадает с одним из M_i, то и остаток $N + r$ также совпадает с каким-то другим числом из множества $\{M_i\}$. Но тогда также и остаток $N + 2r = (N + r) + r$ также совпадает с каким-то другим числом из множества $\{M_i\}$, то же верно для $N + 3r = (N + 2r) + r$, и так далее. Отсюда легко следует, что среди $\{M_i\}$ уже встречаются все возможные остатки от деления на p, а мы предположили, что это не так.

Таким образом, до тех пор, пока выписаны не все остатки, число различных чисел увеличивается на каждом шаге. Поскольку число шагов равно p, то не позднее чем на последнем шаге число разных остатков будет не меньше чем p, что и требуется.

Поскольку нулевая сумма возникла на первом шаге (там, где чисел не было вовсе), то нет гарантии, что можно получить сумму с остатком 0. И действительно, если взять все числа равными между собой, то остаток 0 не получается (и это, согласно задаче **С**, единственный случай, когда этот остаток не получается). Все остальные суммы получаются так или иначе.

2. Задача В. Составные числа

Вернемся теперь к задаче **В**. Для удобства обозначим ее утверждение как $BC(n)$ («выбор суммы»); таким образом, запись $BC(21)$ есть сокращение утверждения «верно, что из любых 41 целых чисел можно выбрать 21, сумма которых делится на 21».

Заметим, прежде всего, что оценку нельзя улучшить. В самом деле, если взять только $2p-2$ числа, то легко строится контрпример: достаточно взять $p-1$ нулей и $p-1$ единиц. Можно также нули и единицы заменить другими числами (если n простое – любыми двумя различными, случай составного n мы предоставляем разобрать читателям).

Для краткости ниже мы будем называть «набором» совокупность данных нам $(2p-1)$ чисел, а «группой» – его подмножество из нескольких чисел, сумма которых делится на p. Требуется доказать, что существует группа из p элементов.

Полное решение задачи (иначе говоря, утверждение $BC(n)$ для любого n) мы приведем в конце статьи, начнем же с доказательства несложного утверждения: *если* $BC(p)$ *и* $BC(q)$, *то* $BC(pq)$.

Доказательство. Пусть $n = pq$, и дано $2n-1$ чисел $\{a_k\}$; согласно $BC(p)$, из них можно выбрать группу из p чисел, сумма которых делится на p. Отложим эту группу в сторону и рассмотрим оставшиеся числа. Поскольку остались неиспользованными более чем $(2p-1)$ чисел, из них можно выбрать еще одну группу, сумма которых также делится на p. Действуя так и дальше, мы получим много групп по p чисел, сумма каждой из которых делится на p; легко убедиться, что можно получить $(2q-1)$ групп. Пусть $S_1 = p \cdot r_1$, $S_2 = p \cdot r_2$, … $S_{2q-1} = p \cdot r_{2q-1}$ – их суммы. Поскольку $\{r_k\}$ – целые числа, из них, согласно $BC(q)$, можно выбрать q чисел, сумма которых делится на q. Тогда и сумма соответствующих $\{S_k\}$ делится на pq, причем в этой сумме ровно столько чисел $\{a_k\}$, сколько требуется.

Существенно заметить, что в этом доказательстве неважно, будут ли числа p и q взаимно просты или нет. Поэтому достаточно доказать $BC(n)$ для случая, когда $n = p$ – простое число. Только этим случаем мы и будем заниматься в дальнейшем.

Докажем теперь утверждение $BC(p)$ для некоторых значений p. Заметим, что хотя мы будем излагать доказательство для конкретного числа, однако факты будут верны для разных чисел. Поэтому читателю рекомендуется всякий раз прикидывать: проходит ли данное рассуждение только для данного p или его можно обобщить.

3. Доказательство для $p = 7$

3.1. Повышение кратности нуля.

Если среди данных чисел встречаются все 7 возможных остатков, то доказывать нечего, так как $0 + 1 + 2 + \ldots + 6$ делится на 7. Поэтому можно считать, что среди наших 13 чисел встречается не более 6 разных остатков. Но тогда какой-то из них встречается не менее трех раз.

Количество раз, которое тот или иной остаток встречается в нашем наборе, мы назовем его *кратностью*. Будем считать, что кратность три (или более) имеет остаток 0. (В п. 3.3 мы покажем, как общий случай свести к этому).

Если кратность нуля не меньше 7, то доказывать опять-таки нечего. В противном случае есть не менее 7 ненулевых остатков, и, согласно задаче **A**, из них можно выбрать несколько (скажем, k), сумма которых делится на 7.

Правда, нет оснований думать, что $k = 7$. Пусть $k < 7$; рассмотрим два случая.

а) Если $k > 3$, то мы можем взять эти числа и добавить к ним несколько нулей (от одного до трех); получится группа из 7 чисел, и утверждение доказано.

б) Пусть теперь $k \le 3$. Здесь надо поступить по-другому. Заменим данный набор новым. В нем k чисел, сумма которых равна нулю, все заменены нулями, как в таблице:

Исходный набор	0 0 0 2 2 3 1 …
Измененный набор	0 0 0 0 0 0 1 …

(Поскольку 2 + 2 + 3 делится на 7, мы заменили эти числа нулями, а остальные оставили без изменения.)

Допустим, что для нового набора утверждение задачи проверено: в нем есть группа из 7 чисел, сумма которых делится на 7. Тогда то же верно и для старого набора. В самом деле, пусть в этой группе есть несколько нулей (скажем, r нулей, $r \ge 0$). Если $r \le 3$, то мы берем те же числа из старого набора (ведь там есть три нуля); если же $r > 3$, то мы можем взять вместо трех нулей три числа старого набора, замененных нулями (сумма от этого не изменится), а прочие числа – те же, что в новом наборе.

Итак, мы свели дело к новому набору, где нулей больше, чем было (назовем это так: «прием повышения кратности нуля»). Дальше уже понятно: либо у нас уже набралось 7 нулей, либо можно повторить то же рассуждение. Мы либо получим нужный набор сразу, либо опять увеличим число нулей, и так далее. Впрочем, для семи ясно, что дальше второго шага двигаться не придется.

Можно ли применить такое же рассуждение для произвольного p? Ответ понятен: можно, но только в том случае, если нулей достаточно много: не менее чем $(p-1)/2$.

Для больших p мы, конечно, на это рассчитывать не можем, так что придется искать другие пути. Тем не менее, «прием повышения кратности» нам пригодится и дальше; только там одного его недостаточно. Пока же закончим доказательство для случая $p = 7$.

3.2. Индукция?

Очевидно, приведенное в п. 3.1 рассуждение естественнее было бы строить методом индукции. Что же принять за ее параметр? Удобнее всего считать n (параметр индукции) равным $(p+1-k)$, где k – кратность нуля (или того остатка, который встречается чаще всего): «если $n \le 1$, то один из остатков встречается не менее p раз, и утверждение очевидно; поэтому если удалось доказать, что наивысшую кратность можно увеличить (как мы делали в п. 3.1), то все доказано».

Тем не менее применять индукцию нам неудобно, и вот почему. Для произвольного p индукция, к сожалению, не проходит: если бы удалось доказать, что наивысшую кратность можно увеличить, все было бы в порядке, но доказать этого мы не можем. А в случае $p = 7$ применение индукции вполне корректно, но… было бы «стрельбой из пушек по воробьям»: какая же индукция, если все заканчивается максимум за два шага?

3.3. Сведение общего случая к частному: транзитивность.

Наше рассуждение из п. 3.1. предполагало, что наивысшую кратность имеет остаток 0. Пусть теперь чаще всего встречается, например, остаток 2. Тогда вычтем 2 из всех 13-ти данных чисел; теперь чаще всего встречается 0. При этом смысл нашей задачи не изменился: если какая-то группа из 7 чисел имела сумму, делящуюся на 7, то после вычитания двоек из суммы вычтено 14, т.е. она по-прежнему делится на 7.

Таким образом, предположение, что наивысшую кратность имеет именно такой-то остаток (нам было удобно считать, что это – остаток 0), никак не нарушает общности рассуждения: вычитая из всех данных чисел одно и то же, мы всегда можем свести дело к этому случаю. Все остатки у нас равноправны; это свойство называют *транзитивностью*. (Более точно, говорят, что на множестве остатков по модулю p транзитивно действует группа сдвигов; объяснять точный смысл этого выражения мы здесь не будем, для нас вполне достаточно интуитивного и в данном случае вполне точного представления о том, что такое вычитание «ничего не меняет» в смысле задачи.)

4. Арифметические прогрессии

4.1. Сокращение количества разных чисел.

Из рассуждений п. 3 видно, что, во-первых, всегда можно считать, что набор имеет не менее трех нулей, и во-вторых – что было бы целесообразно повысить в наборе кратность нуля, если это возможно.

Когда это возможно?

Допустим, что среди остатков от деления чисел набора на p встречаются числа k и $(p-k)$. Тогда можно эти два числа заменить нулями; получается новый набор, который «лучше» прежнего в том смысле, что в нем на два нуля больше; при этом, если для нового набора существует группа из p чисел, то она существует и в старом наборе (как выше: если в группе два нуля или больше, то надо использовать «новые» нули, если же нулей не более одного, то хватит и старых нулей).

Если после этого есть еще одна пара чисел k и $p-k$ (при том же k, что и раньше, или каком-то другом – неважно), ее также можно заменить нулями. Так можно действовать до тех пор, пока не окажется, что в наборе осталось не более $(p+1)/2$ разных чисел, а именно: число 0 и не более чем по одному из каждой пары чисел $(l,\ p-l)$.

4.2. Прогрессии.

Заметим, что тройку чисел $p-k$, 0, k можно рассматривать как арифметическую прогрессию: нас ведь интересуют только остатки от деления на p, так что число $p-k$ можно заменить на число $(-k)$.

Таким образом, мы вправе считать, что в наборе нет ни одной арифметической прогрессии из трех членов, средним членом которой является ноль.

Можно утверждать и больше: достаточно рассматривать только случай, когда среди данных остатков нет ни одной арифметической прогрессии из трех членов (и, тем более, нет более длинных).

В самом деле, если в наборе присутствуют числа a, $a+b$ и $a+2b$, то можно первое и последнее заменить на $a+b$.

Если в новом наборе удалось найти группу, сумма которой делится на p, то такая группа есть и в старом наборе. Достаточно, как и выше, рассмотреть два случая: когда в этой группе не более одного числа $a+b$ и когда таких чисел два или более.

Итак, мы вправе ограничиться случаем, когда среди остатков набора нет ни одной арифметической прогрессии из трех (или более) членов.

Это достаточно сильное ограничение, и можно попытаться, исходя из него, доказать, что разных чисел среди остатков может быть не $(p+1)/2$ (как было показано в п. 4.1), а существенно меньше. Но мы пойдем несколько иным путем.

5. Доказательство для $p = 17$

5.1. Второе по счету число и вторая транзитивность.

Итак, мы предполагаем, что в наборе не слишком много разных чисел. Отсюда легко заметить, что кратность нуля не может быть меньше 4.

Хотелось бы свести общий случай к такому, когда кратность нуля еще больше: не менее 6, не менее 10... К сожалению, это не получается. Зато можно оценить кратность второго по счету числа, притом это можно сделать сразу для произвольного p.

Как выше, мы считаем, что чаще всего встречается ноль. Допустим, что второе по кратности число встречается не более 3 раз. Тогда все остальные числа встречаются не более чем $3\cdot\dfrac{p-1}{2}$ раз, откуда следует, что кратность нуля не меньше чем $(2p-1)-3\cdot\dfrac{p-1}{2}=\dfrac{p+1}{2}$.

Но рассуждение из п. 3.1 показывает, что если кратность нуля так высока, то ее всегда можно еще повысить (применяя индукцию по методу, намеченному в п. 3.2). В конце концов она дойдет до p, а тогда задача будет решена.

Таким образом, достаточно рассматривать случай, когда вторая по величине кратность не меньше 4, как и первая (это, впрочем, не обязательно означает, что они равны; утверждается только, что обе они не меньше 4).

Если выше мы убедились в том, что первым по кратности всегда можно считать 0, то теперь мы будем утверждать, что второй по кратности остаток тоже можно выбрать по нашему желанию. При этом мы можем, как выше, считать, что вторым по кратности является, к примеру, остаток 1.

На каком основании? Дело в том, что в множестве остатков по простому модулю p можно не только складывать и умножать, но также вычитать и делить. Поскольку мы сейчас будем заниматься только случаем $p = 17$, ограничимся тем, что приведем примеры. Если чаще всего встречается остаток 2, умножим все числа набора на 9; при этом смысл нашей задачи не меняется (группа с суммой, делящейся на 17, остается группой), а число 2 превращается в $18 \equiv 1 \bmod 17$. Если чаще всего встречается 5 – надо умножить на 7 ($35 \equiv 1 \bmod 17$), и тому подобное.

В скобках заметим, что «третьей транзитивности» здесь, к сожалению, нет: нельзя утверждать, что третье по счету число можно считать, скажем, двойкой. Это неверно.

5.2. Повышение кратности.

Перейдем к доказательству для $p = 17$. В этом случае в нашем наборе 33 числа, и, по доказанному, мы вправе считать, что в нем не менее 4 нулей и не менее 4 единиц. Теперь, если в наборе имеются числа 13, 14, 15 или 16, то опять можно провести «увеличение кратности нуля»: например, если имеется число 13, то можно заменить числа 13, 1, 1, 1, 1 на пять нулей, повысив кратность сразу на 5.

На первый взгляд кажется, что это ничего особенного не дает: ведь мы и так знаем, что числа набора дают не все, а только, от силы, половину разных остатков. Однако благодаря тому, что единица также имеет высокую кратность, мы можем также исключить из набора числа 2, 3, 4, 5. В самом деле, вычтем из всех чисел набора единицу; теперь у нас по-прежнему есть не менее 4 нулей (бывшие единицы) и не менее 4 чисел (-1). Соответственно, складывая, например, $3+(-1)+(-1)+(-1)$, мы получаем ноль и тем самым увеличиваем число нулей сразу на 4.

Но нет ли здесь ошибки? Ведь «новые» нули – это «бывшие» единицы, которых могло быть меньше, чем нулей; не может ли случиться, что даже после увеличения число нулей все-таки стало меньше? Может. Поэтому здесь надо немного модифицировать этот прием и увеличивать не кратность нуля, а суммарную кратность нуля и единицы (говоря точнее – суммарную кратность тех двух чисел, которые встречаются чаще всего).

Этот прием также можно истолковать как применение индукции; только теперь индукция ведется не по параметру $n = (p+1-k)$, а по другому параметру $n' = (p+1-k-l)$ (k – наивысшая кратность, l – вторая по счету). Так, в предложенном примере мы вначале имели k нулей и l единиц, а также число 4; после проведения операции имеем $(k-3)$ минус единицы и $(l+4)$ нулей. Соответственно, параметр n' уменьшился на 1.

Сделав такие операции несколько раз, мы исключим все числа 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15, 16. Учитывая при этом, что не могут встречаться также числа k и $(17-k)$ одновременно, мы видим, что осталось, самое большее, шесть разных остатков, а именно:

$$0,\ 1,\ (6 \text{ или } 11),\ (7 \text{ или } 10),\ (8 \text{ или } 9),\ 12.$$

5.3. Завершение доказательства.

Дальше уже просто. Если из 33 чисел встречается не более шести разных, то наивысшая кратность (по-прежнему считаем, что это кратность нуля) не меньше 6. Более того, если кратность единицы не выше 5, то кратность нуля не меньше $(33-5\cdot 5)=8$, и далее рассуждаем, как в п. 3.1.

Если же кратность единицы также 6 (или больше), то рассуждая, как в п. 5.2, мы видим, что исключены не только числа 2, 3, 4, 5, но также 6 и 7 – и, аналогично, числа с 11 до 16. Значит, возможны только 4 разных остатка:

$$0,\ 1,\ (8 \text{ или } 9) \text{ и } 10.$$

Но тогда кратность нуля не меньше 9, а это сразу завершает доказательство.

6. Оценки для больших p

Приведенный выше метод нетрудно применить для чисел 19 и (с некоторыми трудностями) 23. Но продвинуться дальше затруднительно. Поэтому постараемся решить несколько иную задачу: как доказать существование нужной группы из p чисел, если согласиться с тем, что в наборе не $(2p-1)$ чисел, а несколько больше?

Утверждение. *Если p достаточно велико, то из любых $p^2/8$ чисел можно выбрать группу p чисел, сумма которых делится на p.*

Набросок доказательства. Как выше, мы считаем, что наивысшую кратность имеет 0, а вторую по счету – единица.

Допустим, что кратность единицы не превосходит $p/5$. Тогда и остальные кратности не больше чем $p/5$, а так как, по предыдущим рассуждениям, среди наших чисел не более чем $p/2$ различных, то кратность нуля не меньше чем $\frac{p^2}{8}-\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p}{5}>\frac{p^2}{40}>p$, чего более чем достаточно для наших целей. Итак, кратность единицы больше $p/5$. Кратность нуля тем более больше чем $p/5$, и, рассуждая, как в п. 5.2, мы видим, что среди различных чисел набора нет ни чисел от 1 до $p/5$, ни чисел от $4p/5$ до $p-1$, а из оставшихся – не более половины (как в п. 4.1). Но тогда количество разных чисел не более $3p/10$.

Теперь повторяем то же рассуждение, но в усиленном варианте. Если кратность единицы не превосходит $p/4$, то та же оценка, что и выше, показывает, что кратность нуля больше p. Следовательно, кратность единицы и кратность нуля больше $p/4$, откуда следует, что исключаются уже все числа от 1 до $p/4$ и от $3p/4$ до p.

Но тогда разных чисел не более чем $p/4$. Отсюда кратность нуля не меньше $p/2$, и, как было нами замечено еще в п. 3.1, отсюда следует, что утверждение задачи верно.

Замечание 1. Приведенное выше рассуждение не вполне точно, так как все оценки давались с небольшой ошибкой: ошибкой в 2–3 единицы. (Например, вначале было сказано, что разных чисел не более чем $p/2$, тогда как в действительности – не более чем $(p+1)/2$.) Постарайтесь сами исправить все эти неточности. Выясните, насколько большим должно быть p, чтобы эти неточности действительно были поправимы.

Замечание 2. Попробуйте заменить в приведенном рассуждении число $p^2/8$ на меньшее, например на $p^2/10$ или $p^2/12$. Как далеко вам удастся продвинуться?

7. Решение в общем случае

А теперь, наконец, дадим решение задачи **B** для произвольного p.

Расставим числа нашего набора в произвольном порядке: $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$, но с таким расчетом, чтобы разность $a_{p+k}-a_k$ не делилась на p ни при каком k. (Очевидно, это всегда можно сделать, если только какой-нибудь остаток не встречается p или более раз; этот случай мы, разумеется, можем не рассматривать.) Согласно решению задачи **D**, из этих разностей можно выбрать несколько, дающих любой наперед заданный остаток при делении на p.

Теперь рассмотрим число $S=a_1+a_2+\ldots+a_p$. Пусть r – его остаток при делении на p. Скомбинируем из чисел $\{a_{p+k}-a_k\}$ сумму, дающую при делении на p остаток $(p-r)$. Тогда, прибавив эту сумму к S, мы получим снова сумму p чисел нашего набора (только некоторые из чисел a_k заменены на a_{p+k}), и эта сумма делится на p.

Тем самым, задача решена для произвольного простого p, а в силу п. 2 – также и для любого n.

И это все? – спросит читатель. – Зачем же было столько трудиться, если задача имеет такое короткое и изящное решение?

Ответ был дан в начале статьи. Действительно, в этом решении использованы, по сути, только задачи **A** и **D**, все остальное можно и не читать... если интересоваться только решением задачи **B**. Если же учиться решать задачи, то все приведенные выше идеи весьма полезны.

В особенности хотелось бы обратить внимание на два доказанных нами факта, которые имеют очень широкие приложения: на *первую и вторую транзитивности*. Запомните их!

Обтекание вращающихся тел

С.БЕТЯЕВ

КОЛЕСО, ТУРБИНА, МИКСЕР, ЛОПАСТЬ ВИНТА – ВСЕ ЭТИ вращающиеся в воздухе или в жидкости тела окружают нас на каждом шагу. Хотя сложные гидродинамические явления, сопутствующие вращению тел, до конца еще не разгаданы, их моделирование легко осуществить в домашних условиях.

Опыты Магнуса. Первые опыты по исследованию обтекания воздухом вращающегося цилиндра поставил немецкий физик и химик, профессор Берлинского университета Генрих Густав Магнус. В 1853 году он впервые описал эффект возникновения поперечной силы, действующей на вращающееся и одновременно движущееся поступательно тело. Этот эффект вошел в историю науки как эффект Магнуса.

В те далекие времена стволы артиллерийских орудий не имели нарезки, придающей снаряду устойчивое вращение, поэтому полет пушечного ядра был неустойчивым, даже в безветренную погоду его траектория сильно отклонялась от расчетной. Прусские артиллеристы обратились к Магнусу с просьбой объяснить это явление. Ученый сразу же догадался, что причиной такого поведения ядер служило их вращение, приобретаемое при вылете из ствола вследствие случайных причин. Для подтверждения своей догадки он поставил следующий опыт.

Цилиндр A, свободно вращающийся вокруг вертикальной оси, располагался на одном конце стержня, а на другом его конце находился противовес B (рис.1,*а*). Стержень вместе с цилиндром и противовесом мог вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси OC. Перед цилиндром располагалась труба D, по которой вентилятор гнал воздух. Стержень и цилиндр устанавливались так, чтобы они оставались в покое под действием набегающего потока, когда цилиндр не вращается. Если цилиндр привести во вращение, то стержень начнет отклоняться в направлении вращения цилиндра. Вид установки сверху приведен на рисунке 1,*б*, направление вращения цилиндра показано сплошной линией, а направление вращения стержня относительно оси OC – штриховой линией. Вращающийся в воздушном потоке цилиндр вел себя таким образом, как будто на него действовала некая неведомая сила. Она же и отклоняла пушечные ядра от расчетной траектории движения. Только спустя полвека (после теоретических исследований Н.Е.Жуковского) стало ясно, что эта загадочная сила имеет такое же происхождение, как и подъемная сила птичьего крыла или крыла самолета.

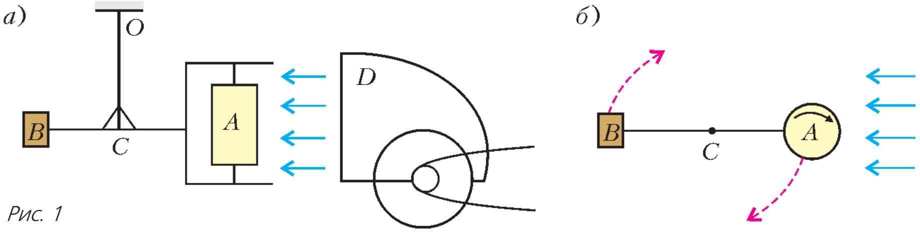


Рис. 1

Эффект Магнуса более полно проявляется в опытах с продолговатыми телами типа цилиндра, чем с круглыми телами типа пушечных ядер. Его можно наглядно продемонстрировать с помощью легкой картонной катушки с намотанной полотняной лентой, свободный конец которой прикреплен к палочке (рис.2). Если эту палочку дернуть вбок в горизонтальном направлении, то катушка приобретет горизонтальную составляющую скорости. Вместе с тем, разматывающаяся лента придаст катушке вращение. Возникшая при этом подъемная сила заставит цилиндр описать в воздухе замысловатую петлю.

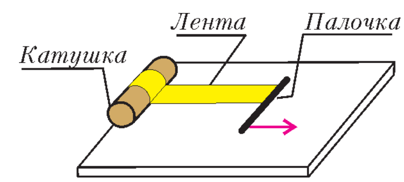


Рис. 2

Можно упростить опыт, приведя легкий цилиндр в быстрое вращение руками, а затем отпустив его в свободное падение. Траекторией движения цилиндра будет не вертикальная прямая, а пологая кривая. Кроме силы тяжести $m\vec{g}$ и подъемной силы $\vec{Y}$, перпендикулярной направлению движения, на цилиндр будет действовать еще сила сопротивления $\vec{X}$, направленная против движения (рис. 3). Равнодействующая этих трех сил и отклоняет траекторию цилиндра от вертикали. При некотором навыке аналогичный опыт удается провести и с продолговатой прямоугольной пластиной, вырезанной, например, из картона.

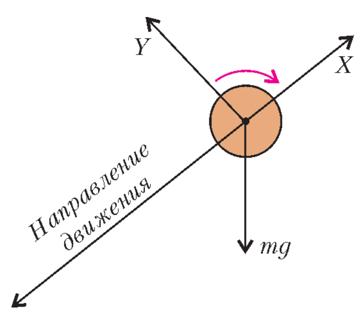


Рис. 3

Качественное объяснение природы загадочной силы Y дал еще И.Ньютон в 1671 году: «Я часто видел, как теннисный мяч при ударе ракеткой описывает кривую. Когда такой удар вызывает и поступательное и вращательное движение, части мяча с той стороны, где движения совпадают, должны давить на прилегающий воздух сильнее и возбуждать пропорционально большее сопротивление и противодействие воздуха». Кстати, в настоящее время установлено, что сила, действующая на рифленый мяч, почти в два раза превосходит силу, действующую при тех же условиях на гладкий мяч. (Такой удивительный эффект связан с тем, что рифленый мяч передает окружающему его воздуху гораздо больший момент количества движения, чем гладкий мяч.)

Самовращение. Проделайте такой опыт. Деревянный цилиндр закрепите так, чтобы он мог свободно вращаться вокруг своей оси при несимметричном обтекании его струей воды, как это показано на рисунке 4. В какую сторону будет вращаться цилиндр? Здравый смысл, т.е. наш жизненный опыт, подсказывает, что

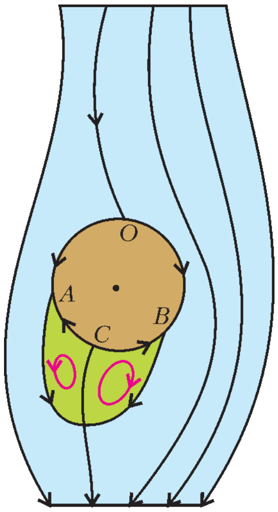


Рис. 4

цилиндр будет вращаться в ту сторону, в какую его раскручивает толстая часть струи. Однако цилиндр не всегда вращается в естественно ожидаемом направлении. При некоторых специально подобранных значениях параметров он вращается в противоположном направлении.

Наиболее правдоподобная гипотеза объясняет аномальное вращение цилиндра образованием за ним двух замкнутых зон возвратного течения, показанных на рисунке 4 зеленым цветом. Момент, вращающий цилиндр, создается касательными силами трения со стороны воды, приложенными к поверхности цилиндра. Силы трения, действующие на участках OA (O – передняя точка торможения потока) и BC, стремятся повернуть цилиндр против часовой стрелки, а силы трения, действующие на участках OB и AC, разворачивают его в противоположную сторону. Аномальному вращению цилиндра способствует тот факт, что участок BC оказывается протяженнее, чем участок AC.

Такое самовращение цилиндра происходит относительно оси, перпендикулярной направлению скорости его поступательного движения. Другой случай – вращение тела вокруг продольной оси. Самовращение крыльев мельницы, винта вертолета в режиме авторотации, падающего семени клена не удивительно – на их лопасти действуют силы, каждая из которых вносит положительный вклад в создание вращательного момента. Интересно самовращение симметричного тела, когда имеет место парадокс неединственности: наряду с самовращательным движением виртуально существует и невращательное движение.

Самовращение прямоугольного крыла, установленного под углом атаки α, впервые обнаружил в 1906 году замечательный русский ученый, основоположник современной аэродинамики Николай Егорович Жуковский. Крыло-пластинка (рис.5) укреплялось в центре тяжести на оси, совпадающей с направлением скорости невозмущенного потока, таким образом, чтобы при вращении крыла вокруг этой оси угол атаки не изменялся. На левое полукрыло и на правое полукрыло действовали подъемные силы $\vec{Y}_1$ и $\vec{Y}_2$. Если крыло не вращалось, то силы были равными. За счет вращения одно полукрыло приобретало дополнительно положительный угол атаки $\Delta\alpha$, а другое – отрицательный. Вращающий момент создавался, если подъемная сила убывала с ростом угла атаки. Такая зависимость наблюдалась при достаточно больших значениях α. В авиации самовращение проявляется в виде штопора – неуправляемого снижения интенсивно вращающегося самолета.

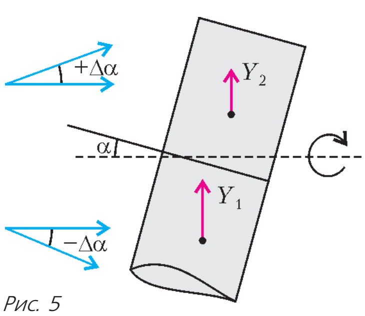


Рис. 5

Гироскопический эффект. Хотя возраст бумеранга – метательного орудия в виде серповидной доски – равен трем тысячам лет, механизм его полета был установлен лишь в семидесятых годах двадцатого столетия. На бумеранг, как и на всякое быстро вращающееся, подобно гироскопу, тело, кроме гидродинамических сил действуют еще и гироскопические силы – его ось прецессирует вокруг вертикальной оси.

Аналогично, невращающийся снаряд под воздействием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, направленной практически противоположно скорости движения центра тяжести снаряда и приложенной несколько выше его, опрокидывается, и дальность стрельбы значительно уменьшается из-за возрастания силы сопротивления (рис.6,*а*). Чтобы снаряд стал устойчивым в полете и попадал в цель, причем головной частью (рис.6,*б*), он предварительно закручивается в стволе орудия, где для этого нарезана резьба. Такой принудительно вращающийся снаряд, подобно бумерангу, прецессирует вокруг прямой, направленной по скорости его движения, т.е. вокруг касательной к траектории центра тяжести. Силы тяжести снаряда $m\vec{g}$ и сопротивления воздуха $\vec{X}$, действующие на снаряд, скорость его поступательного движения $\vec{u}$ и конус прецессии (зеленый цвет) показаны на рисунке 7.

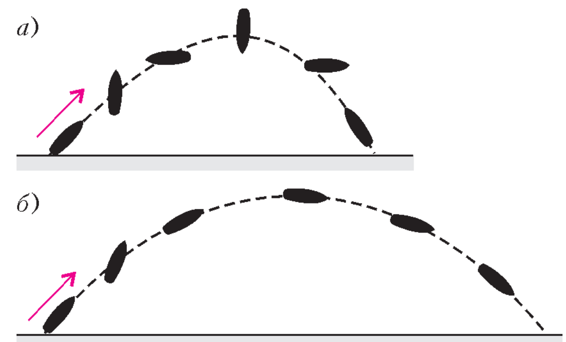


Рис. 6

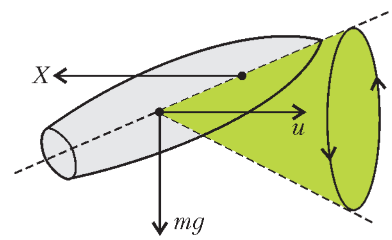


Рис. 7

Кстати, Земля тоже является гигантским гироскопом, совершающим прецессию. Однако проявление прецессии здесь ослаблено – внутри Земли находится жидкая среда. Представление о таком движении можно получить с помощью простого опыта: залейте внутрь детского предварительно загерметизированного волчка некоторое количество воды и запустите его. Если вращающуюся игрушку на мгновение притормозить пальцем, то продолжающая вращение жидкость вновь раскрутит ее. Тот факт, что тело, заполненное жидкостью, противится вращению, мы каждый раз ощущаем, когда, вращая на столе яйцо, пытаемся определить, сырое оно или вареное. Вареное яйцо вращается «стоя», сырое – нет.

Гироскопические силы действуют и на игрушку, называемую летающей тарелкой. Она способна пролетать расстояния вплоть до нескольких сотен метров и возвращаться обратно.

Задачи механики в неинерциальных системах отсчета

В.ШУТОВ

В РЯДЕ СЛУЧАЕВ ОКАЗЫВАЕТСЯ УДОБНЫМ РАССМАТРИвать движение тела в *неинерциальной* системе отсчета (НСО). Как надо действовать в этом случае?

Особенно просто и наглядно выглядит ответ для поступательного движения системы отсчета. Рассмотрим НСО, движущуюся поступательно с ускорением $\vec{a}_{\text{со}}$. Тогда, по формуле сложения ускорений,

$$\vec{a}_{\text{и}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{со}},$$

где $\vec{a}_{\text{и}}$ – ускорение тела в инерциальной системе отсчета (ИСО), $\vec{a}_{\text{отн}}$ – ускорение тела в НСО. Второй закон Ньютона $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{\text{и}}$ в НСО можно записать в виде

$$\sum_i \vec{F}_i + \left(-m\vec{a}_{\text{со}}\right) = m\vec{a}_{\text{отн}}.$$

Получаем, что в НСО второй закон Ньютона выглядит так же, как и в инерциальной системе отсчета, если к реальным силам добавить фиктивную силу, которую называют силой инерции и которая равна

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_{\text{со}}.$$

Сила инерции, как и сила тяжести, пропорциональна массе тела. Если тело находится в поле тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$, то можно объединить эти две силы:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}} = m\left(\vec{g} - \vec{a}_{\text{со}}\right) = m\vec{g}_{\text{эф}},$$

введя эффективное ускорение свободного падения

$$\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}_{\text{со}}.$$

Например, если тело находится в лифте, ускорение которого $\vec{a}$ направлено вверх, то $g_{\text{эф}} = g + a$, а если $\vec{a}$ направлено вниз, то $g_{\text{эф}} = g - a$.

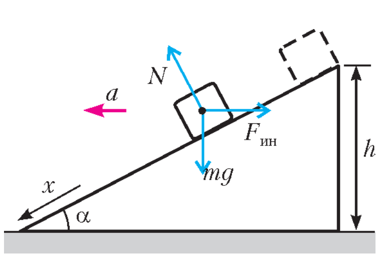


Рис. 1

Задача 1. *Гладкий клин с углом наклона* α *и высотой* h *движется горизонтально с ускорением* a *(рис.1). За какое время маленький брусок, помещенный на вершину клина, соскользнет к его основанию?*

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с клином. Тогда на брусок, кроме сил тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N}$, будет действовать еще сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$. В проекции на ось x получаем

$$mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = ma_{\text{отн}},$$

или

$$a_{\text{отн}} = g\sin\alpha - a\cos\alpha.$$

Тело будет соскальзывать вниз только при $a < g\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (при $a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$ вектор $\vec{g}_{\text{эф}}$ перпендикулярен плоскости клина). Время соскальзывания найдем из уравнения

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{a_{\text{отн}}t^2}{2},$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{\text{отн}}\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{\left(g\sin\alpha - a\cos\alpha\right)\sin\alpha}}.$$

Задача 2. *В сосуде с водой плавает тело. Как изменится глубина погружения тела в воду, если сосуд начнет двигаться вниз с ускорением* a*?*

Решение. В первом случае уравнение равновесия для тела имеет вид

$$F_{\text{А}1} = mg, \text{ или } \rho_{\text{в}}V_{\text{п}1}g = mg,$$

где $V_{\text{п}}$ – объем тела, погруженного в воду. Во втором случае относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с сосудом, тело тоже будет находиться в покое, но ускорение свободного падения нужно заменить на $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$. Очевидно, что направление $\vec{g}_{\text{эф}}$ такое же, как у вектора $\vec{g}$ (рис.2). Условие равновесия теперь будет выглядеть так:

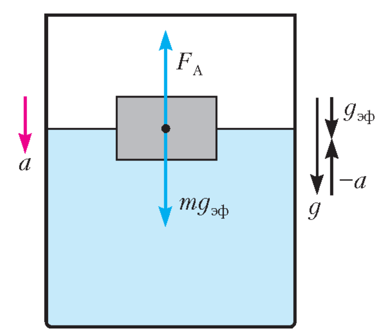


Рис. 2

$$F_{\text{А}2} = mg_{\text{эф}}, \text{ или } \rho_{\text{в}}V_{\text{п}2}g_{\text{эф}} = mg_{\text{эф}}.$$

Сравнивая два условия равновесия, видим, что объем погруженной в воду части тела не изменится: $V_{\text{п}1} = V_{\text{п}2}$, значит, глубина погружения останется прежней.

Задача 3. *Найдите период колебаний математического маятника длиной* $l = 1$ *м, находящегося в лифте, движущемся с ускорением* $a = 2$ *м/с*^{2}*, если: а) ускорение направлено вертикально вверх; б) ускорение направлено вниз; в) ускорение направлено вправо; г) кабина лифта скользит без трения по наклонной плоскости с углом* $\alpha = 30°$.

Решение. Будем решать задачу относительно неинерциальной системы отсчета – кабины лифта.

В случаях *а*) и *б*) направление «вертикали» не меняется, т.е. $\vec{g}_{\text{эф}}$ направлено действительно по вертикали.

а) Модуль эффективного ускорения свободного падения равен $g_{\text{эф}} = g + a$ (рис.3,*а*), и период колебаний составляет

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a}} \approx 1{,}8 \text{ с}.$$

б) Модуль эффективного ускорения свободного падения равен $g_{\text{эф}} = g - a$ (рис.3,*б*), и период колебаний составляет

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a}} \approx 2{,}2 \text{ с}.$$

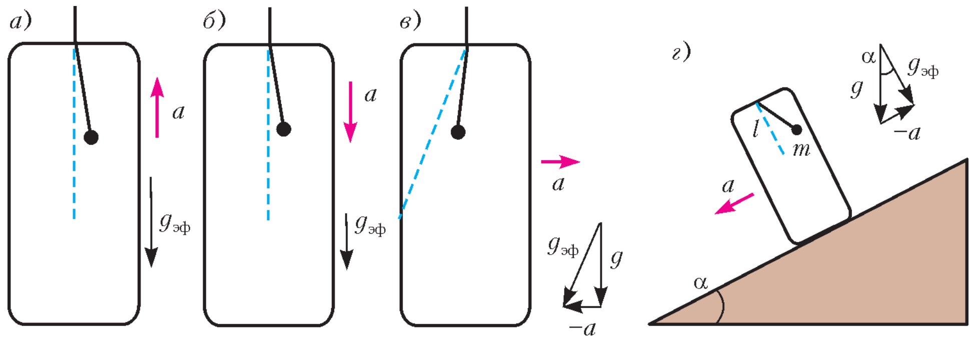


Рис. 3

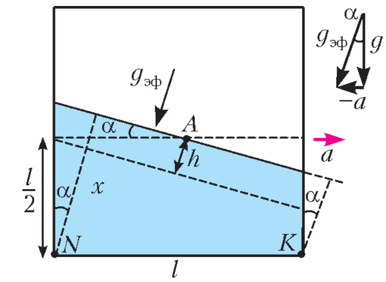


Рис. 5

в) В этом случае «вертикаль» меняет направление (рис.3,*в*), модуль эффективного ускорения свободного падения $g_{эф} = \sqrt{g^2 + a^2}$, и период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}} \approx 2$ с.

г) Ускорение движения лифта по гладкой наклонной плоскости, очевидно, равно $a = g\sin\alpha$. Решим задачу относительно ускоренно движущегося лифта. Тогда вектор $\vec{g}_{эф}$ оказывается перпендикулярным плоскости (рис.3,*г*), и $g_{эф} = \sqrt{g^2 - a^2} = \sqrt{g^2 - g^2\sin^2\alpha} = g\cos\alpha$. Период колебаний в этом случае равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_{эф}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}} \approx 2{,}1$ с.

Задача 4. *Через невесомый блок перекинута нить, на концах которой подвешены грузы с массами $m_1 = 0{,}7$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг. Блок перемещают вниз с ускорением $a = 3$ м/с^2. Определите силу натяжения нити и ускорения грузов относительно неподвижной системы отсчета.*

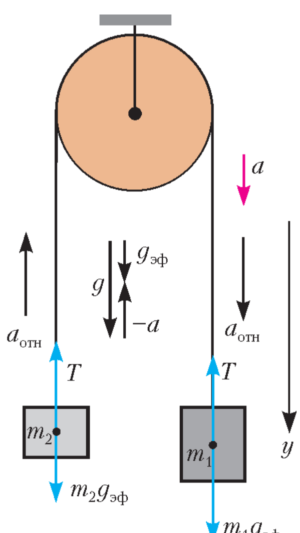


Рис. 4

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с осью блока, в которой блок, очевидно, покоится. Ускорение свободного падения $\vec{g}$ заменим на $\vec{g}_{эф}$. Направление «вертикали», определяемой вектором $\vec{g}_{эф}$, не меняется, а модуль этого ускорения равен $g_{эф} = g - a$ (рис.4). Для каждого груза запишем уравнение движения:

$$m_1 a_{отн} = m_1 g_{эф} - T,$$

$$m_2 a_{отн} = T - m_2 g_{эф}.$$

Исключая из этих уравнений силу натяжения T, найдем

$$a_{отн} = g_{эф}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = (g - a)\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 2{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Далее, учитывая, что $\vec{a}_1 = \vec{a} + \vec{a}_{отн}$ и $\vec{a}_2 = \vec{a} + \vec{a}_{отн}$, и проектируя эти уравнения на направление оси y, получим

$$a_1 = a + a_{отн} = 5{,}8 \text{ м/с}^2,\quad a_2 = a - a_{отн} = 0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Силу натяжения нити можно найти из уравнения движения, например, первого груза:

$$T = m_1\left(g_{эф} - a_{отн}\right) = m_1\left(g - a - a_{отн}\right) = 2{,}94 \text{ Н}.$$

Задача 5. *Сосуд, имеющий форму куба с ребром l и наполовину заполненный водой, движется с горизонтальным ускорением a. Определите форму поверхности воды и давление воды на дно сосуда.*

Решение. В инерциальной системе отсчета, связанной с землей, давление на плоскости, параллельной поверхности воды и отстоящей от нее на h, равно $p = \rho_в g h$. Относительно ускоренно движущегося сосуда направление «вертикали» изменится – это направление $\vec{g}_{эф}$, и поверхность воды будет перпендикулярна этому направлению (рис.5). Давление в жидкости будет одним и тем же на любой плоской поверхности, параллельной поверхности воды, и равным $\rho_в g_{эф} h$, где h – расстояние между этими плоскостями, а $g_{эф} = \sqrt{g^2 + a^2}$. Понятно, что точка A не изменит своего положения при движении. Из векторного треугольника для ускорений следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g} \text{ и } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}.$$

Для точки N

$$x = \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{a}{g}\right)\cos\alpha,$$

и давление в этой точке равно

$$p_N = \rho_в g_{эф} x = \rho_в\sqrt{g^2 + a^2}\,\frac{l}{2}\left(1 + \frac{a}{g}\right)\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} = \rho_в\left(g + a\right)\frac{l}{2}.$$

Аналогично, для точки K

$$x = \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right)\cos\alpha,$$

и давление в этой точке равно

$$p_K = \rho_в g_{эф} x = \rho_в\sqrt{g^2 + a^2}\,\frac{l}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right)\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} = \rho_в\left(g - a\right)\frac{l}{2}.$$

Так же просто находится давление в любой другой точке жидкости.

Задача 6. *Тройник из трех вертикальных трубок, открытых в атмосферу, полностью заполнен водой. При горизонтальном равноускоренном движении из него вылилось 9/32 всей массы воды. Найдите ускорение тройника.*

Решение. При равноускоренном движении вправо уровни воды в вертикальных трубках будут такими, как показано на рисунке 6 справа (поверхность жидкости всегда перпендикулярна $\vec{g}_{эф}$). Пусть масса воды в трубке единичной длины равна m_1. Тогда масса вылившейся воды

$$m = \frac{9}{32}4m_1 L = m_1\left(x + y\right).$$

Из подобия треугольников ABC, DBE и треугольника для

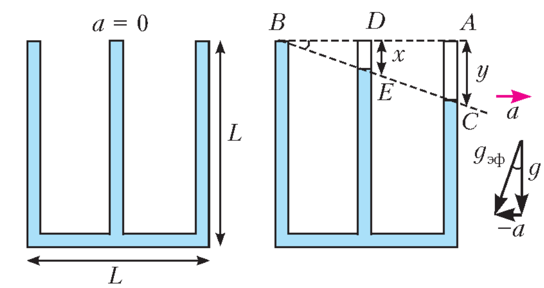


Рис. 6

ускорений следует

$$\frac{y}{L}=\frac{a}{g} \text{ и } \frac{x}{L/2}=\frac{a}{g}, \text{ откуда } y=\frac{aL}{g} \text{ и } x=\frac{aL}{2g}.$$

Подставляя значения x и y в выражение для m, получим

$$\frac{36}{32}m_1L=m_1\left(\frac{aL}{2g}+\frac{aL}{g}\right).$$

Отсюда находим

$$a=\frac{3}{4}g.$$

Задача 7. *Математический маятник, прикрепленный к потолку кабины лифта, совершает колебания с периодом T = 1 с и угловой амплитудой α = 0,05 рад. В момент прохождения маятником положения равновесия трос, удерживающий кабину, обрывается, и она начинает свободно падать. Через какое время после этого маятник ударится о потолок кабины?*

Решение. В момент обрыва троса переходим в систему отсчета, связанную с лифтом. Поскольку лифт падает с ускорением $\vec{g}$, то $\vec{g}_{эф}=\vec{g}-\vec{g}=0$. Это означает, что относительно лифта маятник находится в состоянии невесомости и дальнейшее движение тела будет происходить под действием только силы натяжения нити $F_н$, которая изменяться не будет (рис.7). Поскольку сила натяжения нити перпендикулярна скорости, тело будет двигаться по окружности с постоянной скоростью v и ударится о потолок, когда пройдет по дуге окружности расстояние $\pi l/2$ за время $t=\pi l/(2v)$. Длина маятника l находится из того, что известен период колебаний:

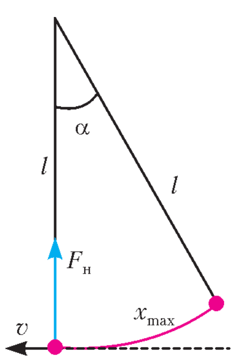


Рис. 7

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ откуда } l=\frac{T^2g}{4\pi^2}=0{,}25 \text{ м}.$$

Скорость, которая максимальна в момент обрыва троса, можно найти из характеристик колебательного движения: $v=x_{max}\omega$, где x_{max} – длина дуги, проходимая от положения максимального отклонения до положения равновесия, а $\omega=2\pi/T$. Поскольку $x_{max}=l\alpha$, а $\omega=\sqrt{g/l}$, то

$$v=\sqrt{gl\alpha^2}=0{,}08 \text{ м/с}.$$

Таким образом, время, прошедшее до удара о потолок, равно

$$t=\frac{\pi l}{2v}\approx 5 \text{ с}.$$

Задача 8. *Алюминиевый шар объемом V_0 и плотностью ρ_0 находится в сосуде с водой. Угол между стенками сосуда и горизонтальным дном α. Внутренняя поверхность сосуда гладкая. Плотность воды ρ. Найдите силу давления шара на дно сосуда в двух случаях: 1) сосуд неподвижен; 2) сосуд движется с постоянным горизонтальным ускорением a.*

Решение. В первом случае, когда ускорение равно нулю, боковая стенка сосуда, очевидно, не давит на шарик, иначе он не мог бы находиться в покое. Вертикальные силы, а именно сила тяжести $m\vec{g}$, архимедова сила $\vec{F}_A$ и реакция опоры $\vec{N}_1$, уравновешены, поэтому

$$N_1=mg-F_A=V_0g(\rho_0-\rho).$$

По третьему закону Ньютона такая же по величине сила давит на дно.

В случае ускоренного движения сосуда проще перейти в неинерциальную систему отсчета, связанную с ним. В этой системе сосуд покоится, и $\vec{g}$ необходимо заменить на $\vec{g}_{эф}=\vec{g}-\vec{a}$ (ускорение $\vec{g}_{эф}$ определяет новое положение «вертикали»), при этом силы $m\vec{g}_{эф}$ и $\vec{F}_A$ ($F_A=\rho V_0 g_{эф}$) направлены противоположно (рис.8). Векторное уравнение равновесия шара будет иметь вид

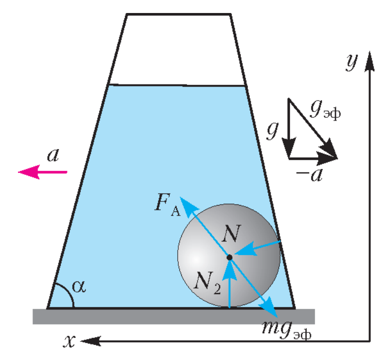


Рис. 8

$$V_0\rho(\vec{a}-\vec{g})+V_0\rho_0(\vec{g}-\vec{a})+\vec{N}+\vec{N}_2=0,$$

или

$$V_0\vec{g}(\rho_0-\rho)+V_0\vec{a}(\rho-\rho_0)+\vec{N}+\vec{N}_2=0.$$

Проектируя на направления осей x и y, получим

$$N\sin\alpha=V_0a(\rho_0-\rho) \text{ и } V_0g(\rho_0-\rho)+N\cos\alpha=N_2.$$

Исключая N, найдем

$$N_2=V_0g(\rho_0-\rho)(g+a\operatorname{ctg}\alpha).$$

Упражнения

1. Два груза с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг прикреплены к концам нити, перекинутой через блок, причем первоначально тяжелый груз находился на h = 1 м выше легкого. С каким ускорением перемещают вверх ось блока, если грузы оказались на одинаковом уровне через t = 0,5 с?

2. Прямоугольный бак без крышки движется с горизонтальным ускорением. В бак налита вода до уровня h. Известны также длина бака l и его высота H. Каким должно быть ускорение бака, чтобы вода начала выливаться из него?

3. Сосуд с водой (рис.9) движется с горизонтальным ускорением. Трубки, из которых состоит сосуд, тонкие, расстояние между вертикальными трубками l = 20 см, разность уровней воды в этих трубках h = 1 см. С каким ускорением движется сосуд?

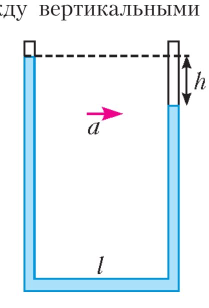


Рис. 9

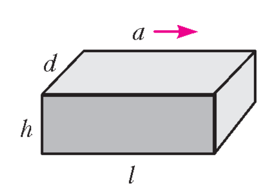


Рис. 10

4. Цистерна (рис.10) полностью заполнена водой и движется с горизонтальным ускорением a. Определите силу, с которой вода действует на крышку цистерны.