

### Биоэлектростатика

Одной из причин астмы являются продукты жизнедеятельности пылевых клещей (рис.6) – насекомых



Рис. 6. Пылевой клещ, продукты жизнедеятельности которого вызывают астму

размером около 0,5 мм, живущих в нашем доме. Исследования показали, что приступы астмы вызываются одним из белков, который выделяют эти насекомые. Структура этого белка напоминает подкову, оба конца которой

заряжены положительно. Электростатические силы отталкивания между концами такого подковообразного белка делают его структуру стабильной. Однако свойства белка можно изменить, если нейтрализовать его положительные заряды. Это удастся сделать, увеличив концентрацию отрицательных ионов в воздухе с помощью любого ионизатора, например люстры Чижевского (рис. 7). Одновременно с этим уменьшается и частота приступов астмы.



Рис. 7. Один из типов люстры Чижевского

Электростатика помогает не только обезвреживать белки, выделяемые насекомыми, но и ловить их самих. Уже говорилось о том, что волосы «встают дыбом», если их зарядить. Можно себе представить, что испытывают насекомые, когда оказываются элек-



Рис. 8. Электростатическая ловушка для тараканов

трически заряженными. Тончайшие волоски на их лапках расходятся в разные стороны, и насекомые теряют способность передвигаться. На таком принципе основана ловушка для тараканов, показанная на рисунке 8. Тараканов привлекает сладкая пудра, предварительно электростатически заряженная. Пудрой (на рисунке она белая) покрывают наклонную поверхность, находящуюся вокруг ловушки. Оказавшись на пудре, насекомые становятся заряженными и скатываются в ловушку.

### Что такое антистатика?

Одежда, ковры, покрывала и т.п. предметы заряжаются после контакта с другими предметами, а иногда и просто со струями воздуха. В быту и на производстве заряды, возникающие таким образом, часто называют статическим электричеством.

При нормальных атмосферных условиях натуральные волокна (из хлопка, шерсти, шелка и вискозы) хорошо впитывают влагу (гидрофильны) и поэтому слегка проводят электричество. Когда такие волокна касаются других материалов или трутся о них, на их поверхностях появляются избыточные электрические заряды, но на очень короткое время, поскольку заряды сразу же стекают обратно по влажным волокнам ткани, содержащим различные ионы.

В отличие от натуральных, синтетические волокна (полиэфирные, акриловые, полипропиленовые) плохо впитывают влагу (гидрофобны), и на их поверхностях имеется меньшее количество подвижных ионов. При контакте синтетических материалов друг с другом они заряжаются противоположными зарядами, но так как эти заряды стекают очень медленно, материалы прилипают друг к другу, создавая неудобства и неприятные ощущения. Кстати, волосы по структуре очень близки к синтетическим волокнам и тоже гидрофобны, поэтому при контакте, например, с расческой они заряжаются электричеством и начинают отталкиваться друг от друга.

Чтобы избавиться от статического электричества, поверхность одежды или другого предмета можно смазать веществом, которое удерживает влагу и этим увеличивает концентрацию подвижных ионов на поверхности. После такой обработки возникший электрический заряд быстро исчезнет с поверхности предмета или распределится по ней. Гидрофильность поверхности можно увеличить, смазав ее поверхностно-активными веществами, молекулы которых похожи на мыльные молекулы – одна часть очень длинной молекулы заряжена, а другая нет. Вещества, препятствующие появлению статического электричества, называют антистатиками. Антистатиком является, например, и обычная угольная пыль или сажа, поэтому, чтобы избавиться от статического электричества, в состав пропитки ковровых покрытий и обивочных материалов включают так называемую ламповую сажу. Для этих же целей в такие материалы добавляют до 3% натуральных волокон, а иногда и тонкие металлические нити.



# Геометрия звездного неба

В.ПРОТАСОВ

**Н**ЕБО НАД ГОЛОВОЙ – САМЫЙ ДРЕВНИЙ УЧЕБНИК геометрии. Первые понятия, такие как точка и круг, – оттуда. Скорее даже не учебник, а задачник. В котором отсутствует страничка с ответами. Два круга одинакового размера – Солнце и Луна – движутся по небу, каждый со своей скоростью. Остальные объекты – светящиеся точки – движутся все вместе, словно они прикреплены к сфере, вращающейся со скоростью 1 оборот в 24 часа. Правда, среди них есть исключения – 5 точек движутся как им вздумается. Для них подобрали особое слово – «планета», по-гречески – «бродяга». Сколько человечество существует, оно пытается разгадать законы этого вечного движения. Первый прорыв произошел в III веке до н.э., когда греческие ученые, взяв на вооружение молодую науку – геометрию, смогли получить первые результаты об устройстве Вселенной. Об этом и пойдет речь.

Чтобы иметь некоторое представление о сложности задачи, рассмотрим такой пример. Представим себе светящийся шар диаметром 10 см, неподвижно висящий в пространстве. Назовем его  $S$ . Вокруг него на расстоянии чуть больше 10 метров обращается маленький шарик  $Z$  диаметром 1 миллиметр, а вокруг  $Z$  на расстоянии 6 см обращается совсем крохотный шарик

$L$ , его диаметр – четверть миллиметра. На поверхности среднего шарика  $Z$  живут микроскопические существа. Они обладают неким разумом, но покидать пределы своего шарика не могут. Все, что они могут, – смотреть на два других шара –  $S$  и  $L$ . Спрашивается, могут ли они узнать диаметры этих шаров и измерить расстояния до них? Сколько ни думай, дело, казалось бы, безнадежное. Мы нарисовали сильно уменьшенную модель Солнечной системы ( $S$  – Солнце,  $Z$  – Земля,  $L$  – Луна).

Вот такая задача стояла перед древними астрономами. И они ее решили! Более 22 веков назад, не пользуясь ничем, кроме самой элементарной геометрии – на уровне 8 класса (свойства прямой и окружности, подобные треугольники и теорема Пифагора). И, конечно, наблюдая за Луной и за Солнцем.

Над решением трудились несколько ученых. Мы выделим двух. Это математик Эратосфен, измеривший радиус земного шара, и астроном Аристарх, вычисливший размеры Луны, Солнца и расстояния до них. Как они это сделали?

## Как измерили земной шар

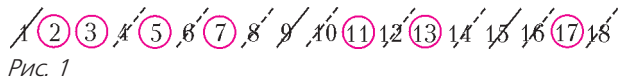
То, что Земля не плоская, люди знали давно. Древние мореплаватели наблюдали, как постепенно меняется картина звездного неба: становятся видны новые созвездия, а другие, напротив, заходят за горизонт. Уплывающие вдаль корабли «уходят под воду», последними скрываются из вида верхушки их мачт. Кто первый высказал идею о шарообразности Земли, неизвестно. Скорее всего – пифагорейцы, считавшие шар совершеннейшей из фигур. Полтора века спустя Аристотель приводит несколько доказательств того, что Земля – шар. Главное из них: во время лунного затмения на поверхности Луны отчетливо видна тень от Земли, и эта тень круглая! С тех пор постоянно предпринимались попытки измерить радиус земного шара. Два простых способа изложены в упражнениях 1 и 2. Измерения, правда, получались неточными. Аристотель, например, ошибся более чем в полтора раза. Считается, что первым, кому удалось сделать это с высокой точностью, был греческий математик Эратосфен Киренский (276–194 до н. э.). Его имя теперь всем известно благодаря *решетке Эра-*



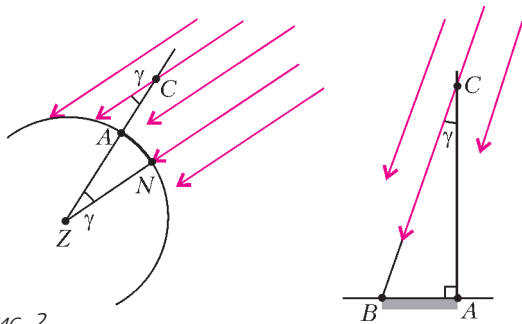
Е.Н.Конева, М.В.Перепухов. *Через тернии к звездам*



тосфена – способу находить простые числа (рис.1). Если вычеркнуть из натурального ряда единицу, затем вычеркивать все четные числа, кроме первого (самого числа 2), затем все числа, кратные трем, кроме первого



из них (числа 3), и т.д., то в результате останутся одни простые числа. Среди современников Эратосфен был знаменит как крупнейший ученый-энциклопедист, занимавшийся не только математикой, но и географией, картографией и астрономией. Он долгое время возглавлял Александрийскую библиотеку – центр мировой науки того времени. Работая над составлением первого атласа Земли (речь, конечно, шла об известной к тому времени ее части), он задумал провести точное измерение земного шара. Идея была такова. В Александрии все знали, что на юге, в городе Сиена (современный Асуан), один день в году, в полдень, Солнце достигает зенита. Исчезает тень от вертикального шеста, на несколько минут освещается дно колодца. Происходит это в день летнего солнцестояния, 22 июня – день наивысшего положения Солнца на небе. Эратосфен направляет своих помощников<sup>1</sup> в Сиену, и те устанавливают, что ровно в полдень (по солнечным часам) Солнце находится точно в зените. Одновременно (как написано в первоисточнике: «в тот же час»), т.е. в полдень по солнечным часам, Эратосфен измеряет длину тени от вертикального шеста в Александрии. Получился треугольник ABC (AC – шест, AB – тень, рис.2). Итак, солнечный луч в Сиене (N) перпендикулярен поверхности Земли, а значит, проходит через ее



центр – точку Z. Параллельный ему луч в Александрии (A) составляет угол  $\gamma = \angle ACB$  с вертикалью. Пользуясь равенством накрест лежащих углов при параллельных, заключаем, что  $\angle AZN = \gamma$ . Если обозначить через  $l$  длину окружности, а через  $x$  длину ее дуги AN, то получаем пропорцию  $\frac{l}{360^\circ} = \frac{x}{\gamma}$ . Угол  $\gamma$  в треугольнике ABC Эратосфен измерил, получилось  $7,2^\circ$ . Величина  $x$  – не что иное, как длина пути от Александрии до Сиены, примерно 800 км. Ее Эратосфен аккуратно вычисляет, исходя из среднего времени движения верблюжьих караванов, регулярно ходивших между двумя городами, а также используя данные бематис-

<sup>1</sup> В некоторых источниках сообщается легенда о том, что одним из них был друг Эратосфена – великий Архимед.

тов – людей специальной профессии, измерявших расстояния шагами. Теперь осталось решить пропорцию  $\frac{l}{360^\circ} = \frac{800}{7,2^\circ}$ , получив длину окружности (т.е. длину земного меридиана)  $l = 40000$  км. Тогда радиус Земли  $R$  равен  $l/(2\pi)$ , это примерно 6400 км. То, что длина земного меридиана выражается столь круглым числом в 40000 км, не удивительно, если вспомнить, что единица длины в 1 метр и была введена (во Франции в конце XVIII века) как одна сорокамиллионная часть окружности Земли (по определению!). Эратосфен, конечно, использовал другую единицу измерения – *стадий* (около 200 м). Стадиев было несколько: египетский, греческий, вавилонский, и каким из них пользовался Эратосфен – неизвестно. Поэтому трудно судить наверняка о точности его измерения. Кроме того, неизбежная ошибка возникала в силу географического положения двух городов. Эратосфен рассуждал так: если города находятся на одном меридиане (т.е. Александрия расположена в точности к северу от Сиены), то полдень в них наступает одновременно. Поэтому, сделав измерения во время наивысшего положения Солнца в каждом городе, мы должны получить правильный результат. Но на самом деле Александрия и Сиена – далеко не на одном меридиане. Сейчас в этом легко убедиться, взглянув на карту, но у Эратосфена такой возможности не было, он как раз и работал над составлением первых карт. Поэтому его метод (абсолютно верный!) привел к ошибке в определении радиуса Земли. Тем не менее, многие исследователи уверены, что точность измерения Эратосфена была высока и что он ошибся менее чем на 2%. Улучшить этот результат человечество смогло только через 2 тысячи лет, в середине XIX века. Над этим трудилась группа ученых во Франции и экспедиция В.Я.Струве в России. Даже в эпоху великих географических открытий, в XVI веке, люди не смогли достичь результата Эратосфена и пользовались неверным значением длины земной окружности в 37000 км. Ни Колумб, ни Магеллан не знали, каковы истинные размеры Земли и какие расстояния им придется преодолеть. Они-то считали, что длина экватора на 3 тысячи км меньше, чем на самом деле. Знали бы – может, и не поплыли бы.

В чем причина столь высокой точности метода Эратосфена (конечно, если он пользовался нужным *стадием*)? До него измерения были *локальными*, на расстояниях, обозримых человеческим глазом, т.е. не более 100 км. Таковы, например, способы в упражнениях 1 и 2. При этом неизбежны ошибки из-за рельефа местности, атмосферных явлений и т.д. Чтобы добиться большей точности, нужно проводить измерения *глобально*, на расстояниях, сравнимых с радиусом Земли. Расстояние в 800 км между Александрией и Сиеной оказалось вполне достаточным.

**Упражнения**

1. Как вычислить радиус Земли по следующим данным: с горы высотой 500 м просматриваются окрестности на расстоянии 80 км?
2. Как вычислить радиус Земли по следующим данным:

корабль высотой 20 м, отплыв от берега на 16 км, полностью исчезает из вида?

3. Два друга – один в Москве, другой – в Туле, берут по метровому шесту и ставят их вертикально. В момент, в течение дня, когда тень от шеста достигает наименьшей длины, каждый из них измеряет длину тени. В Москве получилось  $a$  см, а в Туле –  $b$  см. Выразите радиус Земли через  $a$  и  $b$ . Города расположены на одном меридиане на расстоянии 185 км.

Как видно из упражнения 3, опыт Эратосфена можно проделать и в наших широтах, где Солнце никогда не бывает в зените. Правда, для этого нужны две точки обязательно на одном меридиане. Если же повторить опыт Эратосфена для Александрии и Сиены, и при этом сделать измерения в этих городах одновременно (сейчас для этого есть технические возможности), то мы получим верный ответ, при этом будет не важно, на каком меридиане находится Сиена (почему?).

### Как измерили Луну и Солнце. Три шага Аристарха

Греческий остров Самос в Эгейском море – теперь глухая провинция. Сорок километров в длину, восемь – в ширину. На этом крохотном острове в разное время родились три величайших гения – математик Пифагор, философ Эпикур и астроном Аристарх.



Памятник Аристарху Самосскому в Салониках

Про жизнь Аристарха Самосского известно мало. Даты жизни приблизительны: родился около 310 до н.э., умер около 230 до н.э. Как он выглядел, мы не знаем, ни одного изображения не сохранилось (современный памятник Аристарху в греческом городе Салоники – лишь фантазия скульптора). Много лет провел в Александрии, где работал в библиотеке и в обсерватории. Главное его достижение – книга «О величинах и расстояниях Солнца и Луны», – по единодушному мнению историков, является настоящим научным подвигом. В ней он вычисляет радиус Солнца, радиус Луны и расстояния от Земли до Луны и до Солнца. Сделал он это в одиночку, пользуясь очень простой геометрией и всем известными результатами наблюдений за Солнцем и Луной. На этом Аристарх не останавливается, он делает несколько важнейших выводов о строении Вселенной, которые намного опередили свое время. Не случайно его назвали впоследствии «Коперником античности».

Вычисление Аристарха можно условно разбить на три шага. Каждый шаг сводится к простой геометрической задаче. Первые два шага совсем элементарны, третий – чуть посложнее. В геометрических построениях мы будем обозначать через  $Z$ ,  $S$  и  $L$  центры Земли, Солнца и Луны соответственно, а через  $R$ ,  $R_s$  и  $R_l$  –

их радиусы. Все небесные тела будем считать шарами, а их орбиты – окружностями, как и считал сам Аристарх (хотя, как мы теперь знаем, это не совсем так). Мы начинаем с первого шага, и для этого немного понаблюдаем за Луной.

### Шаг 1. Во сколько раз Солнце дальше, чем Луна?

Как известно, Луна светит отраженным солнечным светом. Если взять шар и посветить на него со стороны большим прожектором, то в любом положении освещенной окажется ровно половина поверхности шара. Граница освещенной полусферы – окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной лучам света. Таким образом, Солнце всегда освещает ровно половину поверхности Луны. Видимая нам форма Луны зависит от того, как расположена эта освещенная половина. При новолунии, когда Луна вовсе не видна на небе, Солнце освещает ее обратную сторону. Затем освещенная полусфера постепенно поворачивается в сторону Земли. Мы начинаем видеть тонкий серп, затем – месяц («растущая Луна»), далее – полукруг (эта фаза Луны называется «квадратурой»). Затем день ото дня (вернее, ночь от ночи) полукруг дорастает до полной Луны. Потом начинается обратный процесс: освещенная полусфера от нас отворачивается. Луна «старее», постепенно превращаясь в месяц, повернутый к нам левой стороной, подобно букве «С», и, наконец, в ночь новолуния исчезает. Период от одного новолуния до другого длится примерно четыре недели. За это время Луна совершает полный оборот вокруг Земли. От новолуния до половины Луны проходит четверть периода, отсюда и название «квадратура».

Замечательная догадка Аристарха состояла в том, что при квадратуре солнечные лучи, освещающие половину Луны, перпендикулярны прямой, соединяющей Луну с Землей. Таким образом, в треугольнике  $ZLS$  угол при

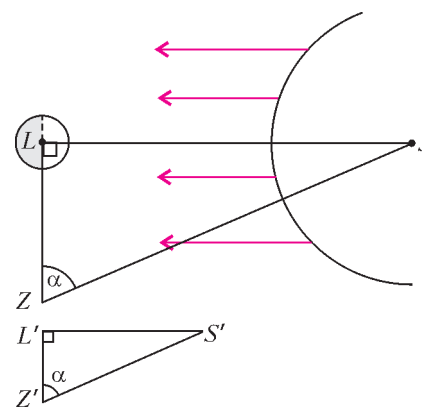


Рис. 3

вершине  $L$  – прямой (рис.3). Если теперь измерить угол  $LZS$ , обозначим его через  $\alpha$ , то получим, что  $\frac{ZL}{ZS} = \cos \alpha$ . Для простоты мы считаем, что наблюдатель находится в центре Земли. Это несильно повлияет на результат, поскольку расстояния от Земли до Луны и до Солнца значительно превосходят радиус Земли.

Итак, измерив угол  $\alpha$  между лучами  $ZL$  и  $ZS$  во время квадратуры, Аристарх вычисляет отношение расстояний до Луны и до Солнца. Как одновременно застать Солнце и Луну на небосводе? Это можно сделать ранним утром. Сложность возникает по другому, неожиданному, поводу. Во времена Аристарха не

было косинусов. Первые понятия тригонометрии появятся позже, в работах Аполлония и Архимеда. Но Аристарх знал, что такое подобные треугольники, и этого было достаточно. Начертив маленький прямоугольный треугольник  $Z'L'S'$  с тем же острым углом  $\alpha = \angle L'Z'S'$  и измерив его стороны, находим, что  $\frac{ZL}{ZS} = \frac{Z'L'}{Z'S'}$ , и это отношение примерно равно  $\frac{1}{400}$ . Получается, что Солнце в 400 раз дальше от Земли, чем Луна. Эту константу – отношение расстояний от Земли до Солнца и от Земли до Луны – мы будем обозначать буквой  $\kappa$ . Итак, мы нашли, что  $\kappa = 400$ .

### Шаг 2. Во сколько раз Солнце больше Луны?

Для того чтобы найти отношение радиусов Солнца и Луны, Аристарх привлекает солнечные затмения (рис.4). Они происходят, когда Луна загораживает Солнце. При частичном, или, как говорят астрономы, *частном*, затмении Луна лишь проходит по диску Солнца, не закрывая его полностью. Порой такое

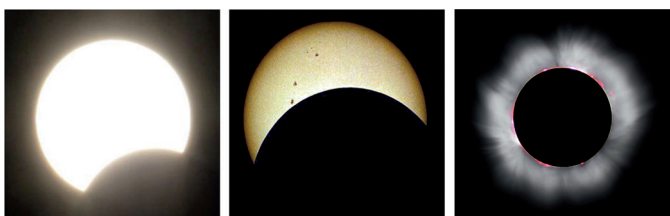


Рис. 4

затмение даже нельзя разглядеть невооруженным глазом, Солнце светит как в обычный день. Лишь сквозь сильное затемнение, например, закопченное стекло, видно, как часть солнечного диска закрыта черным кругом. Гораздо реже происходит полное затмение, когда Луна на несколько минут полностью закрывает солнечный диск. В это время становится темно, на небе появляются звезды. Затмения наводили ужас на древних людей, считались предвестниками трагедий. Солнечное затмение наблюдается по-разному в разных частях Земли. Во время полного затмения на поверхности Земли возникает тень от Луны – круг, диаметр которого не превосходит 270 км. Лишь в тех районах земного шара, по которым проходит эта тень, можно наблюдать полное затмение. Поэтому в одном и том же месте полное затмение происходит крайне редко – в среднем раз в 200–300 лет. Аристарху повезло – он смог наблюдать полное солнечное затмение собственными глазами. На безоблачном небе Солнце постепенно начало тускнеть и уменьшаться в размерах, установились сумерки. На несколько мгновений Солнце исчезло. Потом проглянул первый луч света, солнечный диск стал расти, и вскоре Солнце засветило в полную силу. Почему затмение длится столь короткое время? Аристарх отвечает: причина в том, что Луна имеет те же видимые размеры на небе, что и Солнце. Что это значит? Проведем плоскость через центры Земли, Солнца и Луны. Получившееся сечение изображено на рисунке 5,а. Угол между касательными, проведенными из точки  $Z$  к окружности Луны, называется *угловым размером Луны*, или ее *угловым диаметром*. Так же

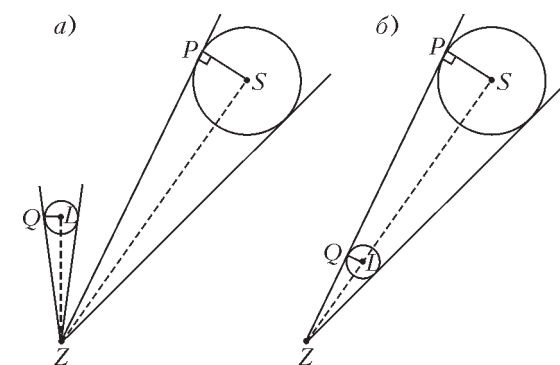


Рис. 5

определяется угловой размер Солнца. Если угловые диаметры Солнца и Луны совпадают, то они имеют одинаковые видимые размеры на небе, а при затмении Луна действительно полностью загораживает Солнце (рис.5,б), но лишь на мгновение, когда совпадут лучи  $ZL$  и  $ZS$ . На фотографии полного солнечного затмения (см. рис.4) ясно видно равенство размеров.

Вывод Аристарха оказался поразительно точен! В реальности средние угловые диаметры Солнца и Луны отличаются всего на 1,5%. Мы вынуждены говорить о средних диаметрах, поскольку они меняются в течение года, так как планеты движутся не по окружностям, а по эллипсам.

Соединив центр Земли  $Z$  с центрами Солнца  $S$  и Луны  $L$ , а также с точками касания  $P$  и  $Q$ , получим два прямоугольных треугольника  $ZSP$  и  $ZLQ$  (см. рис. 5,а). Они подобны, поскольку у них есть пара равных острых углов  $\frac{\beta}{2}$ . Следовательно,  $\frac{R_s}{R_l} = \frac{SP}{LQ} = \frac{ZS}{ZL}$ . Таким образом, *отношение радиусов Солнца и Луны равно отношению расстояний от их центров до центра Земли*. Итак,  $\frac{R_s}{R_l} = \kappa = 400$ . Несмотря на то, что их видимые размеры равны, Солнце оказалось больше Луны в 400 раз!

Равенство угловых размеров Луны и Солнца – счастливое совпадение. Оно не вытекает из законов механики. У многих планет Солнечной системы есть спутники: у Марса их два, у Юпитера – четыре (и еще несколько десятков мелких), и все они имеют разные угловые размеры, не совпадающие с солнечным.

Теперь мы приступаем к решающему и самому сложному шагу.

### Шаг 3. Вычисление размеров Солнца и Луны и расстояний до них

Итак, нам известно отношение размеров Солнца и Луны и отношение их расстояний до Земли. Эта информация *относительна*: она восстанавливает картину окружающего мира лишь с точностью до подобия. Можно удалить Луну и Солнце от Земли в 10 раз, увеличив во столько же раз их размеры, и видимая с Земли картина останется такой же. Чтобы найти реальные размеры небесных тел, надо соотнести их с каким-то известным размером. Но из всех астрономических

величин Аристарху пока известен только радиус<sup>2</sup> земного шара  $R = 6400$  км. Поможет ли это? Хотя в каком-то из видимых явлений, происходящих на небе, появляется радиус Земли? Не случайно говорят «небо и земля», имея в виду две несовместные вещи. И все же такое явление есть. Это – лунное затмение. С его помощью, применив довольно хитроумное геометрическое построение, Аристарх вычисляет отношение радиуса Солнца к радиусу Земли, и цепь замыкается: теперь мы одновременно находим радиус Луны, радиус Солнца, а заодно и расстояния от Луны и от Солнца до Земли.

При лунном затмении Луна уходит в тень Земли. Спрятавшись за Землю, Луна лишается солнечного света, и, таким образом, перестает светить. Она не исчезает из вида полностью, поскольку небольшая часть солнечного света рассеивается земной атмосферой и доходит до Луны в обход Земли. Луна темнеет, приобретая красноватый оттенок (через атмосферу лучше всего проходят красные и оранжевые лучи). На лунном диске при этом отчетливо видна тень от Земли (рис.6). Круглая форма тени еще раз подтверждает шарообразность Земли.



Рис. 6

Аристарха же интересовал размер этой тени. Для того, чтобы определить радиус круга земной тени (мы сделаем это по фотографии на рисунке 6), достаточно решить простое упражнение.

**Упражнение 4.** На плоскости дана дуга окружности. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, равный ее радиусу.

Выполнив построение, находим, что радиус земной тени примерно в  $t = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$  раза больше радиуса Луны. Обратимся теперь к рисунку 7. Серым цветом закрашена область земной тени, в которую попадает Луна при затмении. Предположим, что центры окружностей  $S$ ,  $Z$  и  $L$  лежат на одной прямой. Проведем диаметр Луны  $M_1M_2$ , перпендикулярный прямой  $LS$ . Продолжение этого диаметра пересекает общие касательные окружностей Солнца и Земли в точках  $D_1$  и  $D_2$ .

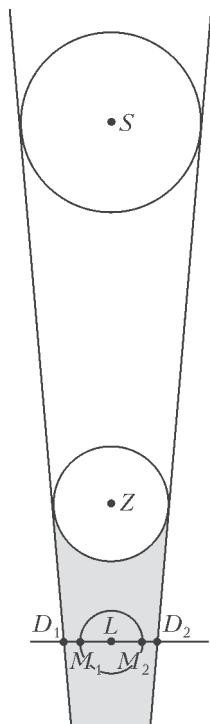


Рис. 7

Тогда отрезок  $D_1D_2$  приближенно равен диаметру тени Земли. Мы пришли к следующей задаче.

**Задача 1.** Даны три окружности с центрами  $S$ ,  $Z$  и  $L$ , лежащими на одной прямой. Отрезок  $D_1D_2$ , проходящий через  $L$ , перпендикулярен прямой  $SL$ , а его концы лежат на общих внешних касательных к первой и второй окружностям. Известно, что отношение отрезка  $D_1D_2$  к диаметру третьей окружности равно  $t$ , а отношение диаметров первой и третьей окружности равно  $\frac{ZS}{ZL} = \kappa$ . Найдите отношение диаметров первой и второй окружностей.

Если решить эту задачу, то будет найдено отношение радиусов Солнца и Земли. Значит, будет найден радиус Солнца, а с ним и Луны. Но решить ее не удастся. Можете попробовать – в задаче не хватает одного данного. Например, угла между общими внешними касательными к первым двум окружностям. Но даже если этот угол был бы известен, решение будет использовать тригонометрию, которую Аристарх не знал (мы формулируем соответствующую задачу в упражнении 6). Он находит более простой выход. Проведем диаметр  $A_1A_2$  первой окружности и диаметр  $B_1B_2$  второй, оба – параллельные отрезку  $D_1D_2$ . Пусть  $C_1$  и  $C_2$  – точки пересечения отрезка  $D_1D_2$  с прямыми  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  соответственно (рис.8). Тогда в качестве диаметра земной тени возьмем отрезок  $C_1C_2$  вместо отрезка  $D_1D_2$ . Стоп, стоп! Что значит, «возьмем один отрезок вместо другого»? Они же не равны! Отрезок  $C_1C_2$  лежит внутри отрезка  $D_1D_2$ , значит,  $C_1C_2 < D_1D_2$ . Да, отрезки разные, но они почти равны. Дело в том, что расстояние от Земли до Солнца во много раз больше диаметра Солнца (примерно в 215 раз). Поэтому расстояние  $ZS$  между центрами первой и второй окружности значительно превосходит их диаметры. Значит, угол между общими внешними касательными к этим окружностям близок к нулю (в реальности он примерно  $0,5^\circ$ ), т.е. касательные «почти параллельны». Если бы они были в точности параллельны, то точки  $A_1$  и  $B_1$  совпадали бы с точками касания, следовательно, точка  $C_1$  совпала бы с  $D_1$ , а  $C_2$  с  $D_2$ , и значит,  $C_1C_2 = D_1D_2$ . Таким образом, отрезки  $C_1C_2$  и  $D_1D_2$  почти равны. Интуиция и здесь не подвела Аристарха: на самом деле отличие между длинами отрезков составляет менее сотой доли процента! Это – ничто по сравнению с возможными погрешностями измерений. Убрав теперь лишние линии, включая окружности и их общие касательные, приходим к такой задаче.

**Задача 1'.** На боковых сторонах  $A_1C_1$  и  $A_2C_2$

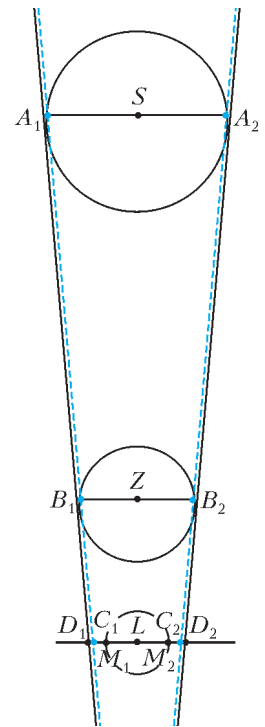


Рис. 8

<sup>2</sup> Неизвестно, знал ли Аристарх об измерении Эратосфена или пользовался другим значением радиуса Земли. Это не так важно, поскольку он брал радиус Земли в качестве единицы длины.

трапеции  $A_1A_2C_2C_1$  взяты точки  $B_1$  и  $B_2$  так, что отрезок  $B_1B_2$  параллелен основаниям. Пусть  $S$ ,  $Z$  и  $L$  – середины отрезков  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  соответственно. На основании  $C_1C_2$  лежит отрезок  $M_1M_2$  с серединой  $L$ . Известно, что  $\frac{A_1A_2}{M_1M_2} = \frac{ZS}{ZL} = \kappa$  и  $\frac{C_1C_2}{M_1M_2} = t$ . Найдите  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}$ .

**Решение.** Так как  $\frac{A_1A_2}{M_1M_2} = \frac{ZS}{ZL}$ , то  $\frac{A_2S}{M_1L} = \frac{ZS}{ZL}$ , а значит, треугольники  $A_2SZ$  и  $M_1LZ$  подобны с коэффициентом  $\frac{SZ}{LZ} = \kappa$ . Следовательно,  $\angle A_2SZ = \angle M_1LZ$ , и поэтому точка  $Z$  лежит на отрезке  $M_1A_2$ . Аналогично,  $Z$  лежит на отрезке  $M_2A_1$  (рис.9). Так как  $C_1C_2 = t \cdot M_1M_2$  и  $M_1M_2 = \frac{1}{\kappa} A_1A_2$ , то  $C_1C_2 = \frac{t}{\kappa} A_1A_2$ .

Далее, треугольники  $A_2C_2M_1$  и  $A_2B_2Z$  подобны. Их коэффициент подобия равен

$$\frac{M_1A_2}{ZA_2} = 1 + \frac{ZM_1}{ZA_2} = 1 + \frac{ZL}{ZS} = 1 + \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa + 1}{\kappa}.$$

Следовательно,

$$C_2M_1 = \frac{\kappa + 1}{\kappa} B_2Z = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} B_1B_2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} C_2M_1 &= C_2L + LM_1 = \frac{1}{2} C_1C_2 + \frac{1}{\kappa} SA_2 = \\ &= \frac{t}{2\kappa} A_1A_2 + \frac{1}{2\kappa} A_1A_2. \end{aligned}$$

Значит,  $\frac{\kappa + 1}{2\kappa} B_1B_2 = \frac{t + 1}{2\kappa} A_1A_2$ . Из этого равенства сразу получаем, что  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{\kappa + 1}{t + 1}$ .

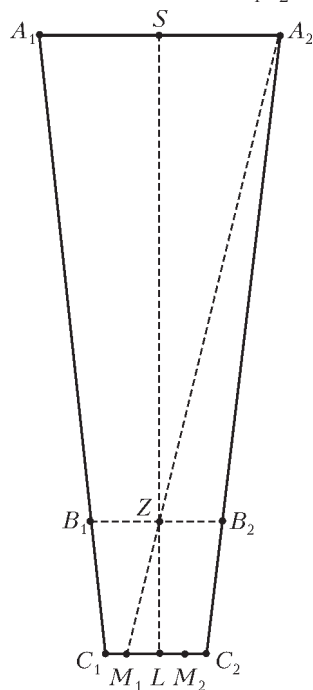


Рис. 9

Итак, отношение диаметров Солнца и Земли равно  $\frac{\kappa + 1}{t + 1}$ , а Луны и Земли равно  $\frac{\kappa + 1}{\kappa(t + 1)}$ . Подставляя известные нам величины  $\kappa = 400$  и  $t = \frac{8}{3}$ , получаем, что Луна примерно в 3,66 раза меньше Земли, а Солнце в 109 раз больше Земли. Так как радиус Земли  $R$  нам известен, находим радиус Луны  $R_l = R/3,66$  и радиус Солнца  $R_s = 109R$ .

Теперь расстояния от Земли до Луны и до Солнца вычисляются в один шаг, это может быть сделано с помощью углового диаметра. Угловой диаметр  $\beta$  Сол-

нца и Луны составляет примерно полградуса (если быть совсем точным,  $0,53^\circ$ ). Как древние астрономы его измеряли, об этом речь впереди. Опустив касательную  $ZQ$  на окружность Луны, получаем прямоугольный треугольник  $ZLQ$  с острым углом  $\beta/2$  (рис.10).

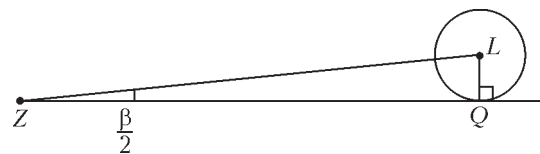


Рис. 10

Из него находим  $ZL = \frac{1}{\sin(\beta/2)} R_l$ , что примерно равно  $215R_l$ , или  $62R$ . Аналогично, расстояние до Солнца равно  $215R_s = 23455R$ .

Всё. Размеры Солнца и Луны и расстояния до них найдены.

### Упражнения

- Докажите, что прямые  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  и две общие внешние касательные к первой и второй окружностям (см. рис.8) пересекаются в одной точке.
- Решите задачу 1, если дополнительно известен угол между касательными между первой и второй окружностью.
- Солнечное затмение может наблюдаться в одних частях земного шара и не наблюдаться других. А лунное затмение?
- Докажите, что солнечное затмение может наблюдаться только во время новолуния, а лунное затмение – только во время полнолуния.
- Что происходит на Луне, когда на Земле происходит лунное затмение?

### О пользе ошибок

На самом деле все было несколько сложнее. Геометрия только формировалась, и многие привычные для нас еще с восьмого класса школы вещи были в то время совсем не очевидны. Аристарху потребовалось написать целую книгу, чтобы изложить то, что мы изложили на трех страницах. И с экспериментальными измерениями тоже все было непросто. Во-первых, Аристарх ошибся с измерением диаметра земной тени во время лунного затмения, получив отношение  $t = 2$  вместо  $t = 2\frac{2}{3}$ . Кроме того, он, вроде бы, исходил из неверного значения угла  $\beta$  – углового диаметра Солнца, считая его равным  $2^\circ$ . Но эта версия спорная: Архимед в своем трактате «Псаммит» пишет, что, напротив, Аристарх пользовался почти правильным значением в  $0,5^\circ$ . Однако самая ужасная ошибка произошла на первом шаге, при вычислении параметра  $\kappa$  – отношения расстояний от Земли до Солнца и до Луны. Вместо  $\kappa = 400$  у Аристарха получилось  $\kappa = 19$ . Как можно было ошибиться более чем в 20 раз? Обратимся еще раз к шагу 1, рисунок 3. Для того чтобы найти отношение  $\kappa = ZS/ZL$ , Аристарх измерил угол  $\alpha = \angle SZL$ , и тогда  $\kappa = \frac{1}{\cos \alpha}$ . Например, если угол  $\alpha$  был бы равен  $60^\circ$ , то мы получили бы  $\kappa = 2$ , и Солнце было бы вдвое дальше от Земли, чем Луна. Но результат измерения оказался неожиданным: угол  $\alpha$  полу-

чался почти прямым. Это означало, что катет  $ZS$  во много раз превосходит  $ZL$ . У Аристарха получилось  $\alpha = 87^\circ$ , и тогда  $\cos \alpha = \frac{1}{19}$  (напомним, что все вычисления у нас – приближенные). Истинное значение угла  $\alpha = \left(89\frac{6}{7}\right)^\circ$ , и  $\cos \alpha = \frac{1}{400}$ . Так погрешность измерения менее чем в  $3^\circ$  привела к ошибке в 20 раз! Завершив вычисления, Аристарх приходит к выводу, что радиус Солнца равен 6,5 радиусов Земли (вместо 109).

Ошибки были неизбежны, учитывая несовершенные измерительные приборы того времени. Важнее то, что метод оказался правильным. Вскоре (по историческим меркам, т.е. примерно через 100 лет) выдающийся астроном античности Гиппарх (190 – ок. 120 до н.э.) устранил все неточности и, следуя методу Аристарха, вычислит правильные размеры Солнца и Луны. Возможно, ошибка Аристарха оказалась в конце концов даже полезной. До него господствовало мнение, что Солнце и Луна либо вовсе имеют одинаковые размеры (как и кажется земному наблюдателю), либо отличаются несильно. Даже отличие в 19 раз удивило современников. Поэтому не исключено, что, найдя Аристарх правильное отношение  $\kappa = 400$ , в это никто бы не поверил, а может быть, и сам ученый отказался бы от своего метода, сочтя результат несуразным. Известный принцип гласит, что геометрия – это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах. Перефразируя, можно сказать, что наука в целом – это искусство делать верные выводы из неточных, или даже ошибочных, наблюдений. И Аристарх такой вывод сделал. За 17 веков до Коперника он понял, что в центре мира находится не Земля, а Солнце. Так впервые появилась гелиоцентрическая модель и понятие Солнечной системы.

### Что в центре?

Господствовавшее в Древнем Мире представление об устройстве Вселенной, знакомое нам по урокам истории, заключалось в том, что в центре мира – неподвижная Земля, вокруг нее по круговым орбитам вращаются 7 планет, включая Луну и Солнце (которое тоже считалось планетой). Завершается все небесной сферой с прикрепленными к ней звездами. Сфера вращается вокруг Земли, делая полный оборот за 24 часа. Со временем в эту модель многократно вносились исправления. Так, стали считать, что небесная сфера неподвижна, а Земля вращается вокруг своей оси. Затем стали исправлять траектории движения планет: круги заменили циклоидами, т.е. линиями, которые описывают точки окружности при ее движении по другой окружности (об этих замечательных линиях можно прочитать в книгах Г.Н.Бермана «Циклоида», А.И.Маркушевича «Замечательные кривые», а также в «Кванте»: статья С.Ворова «Тайны циклоиды» №8, 1975, и статья С.Г.Гиндикина «Звездный век циклоиды», №6, 1985). Циклоиды лучше согласовывались с результатами наблюдений, в частности, объясняли «попятные» движения планет. Это – *геоцент-*

*рическая* система мира, в центре которой – Земля («гея»). Во II веке она приняла окончательный вид в книге «Альмагест» Клавдия Птолемея (87–165), выдающегося греческого астронома, однофамильца египетских царей. Со временем некоторые циклоиды усложнялись, добавлялись все новые промежуточные окружности. Но в целом система Птолемея господствовала около полутора тысячелетий, до XVI века, до открытий Коперника и Кеплера. Поначалу геоцентрической модели придерживался и Аристарх. Однако, вычислив, что радиус Солнца в 6,5 раз больше радиуса Земли, он задал простой вопрос: почему такое большое Солнце должно вращаться вокруг такой маленькой Земли? Ведь если радиус Солнца больше в 6,5 раз, то его объем больше почти в 275 раз! Значит, в центре мира должно находиться Солнце. Вокруг него вращаются 6 планет, включая Землю.<sup>3</sup> А седьмая планета, Луна, вращается вокруг Земли. Так появилась *гелиоцентрическая* система мира («гелиос» – Солнце). Уже сам Аристарх отмечал, что такая модель лучше объясняет видимое движение планет по круговым орбитам, лучше согласуется с результатами наблюдений. Но ее не приняли ни ученые, ни официальные власти. Аристарх был обвинен в безбожии и подвергся преследованиям. Из всех астрономов античности только Селевк стал сторонником новой модели. Больше ее не принял никто, по крайней мере, у историков нет твердых сведений на этот счет. Даже Архимед и Гиппарх, почитавшие Аристарха и развившие многие его идеи, не решились поставить Солнце в центр мира. Почему?

### Почему мир не принял гелиоцентрической системы?

Как же получилось, что в течении 17 веков ученые не принимали простой и логичной системы мира, предложенной Аристархом? И это несмотря на то, что официально признанная геоцентрическая система Птолемея часто давала сбои, не согласуясь с результатами наблюдений за планетами и за звездами. Приходилось добавлять все новые окружности (так называемые *вложенные циклы*) для «правильного» описания движения планет. Самого Птолемея трудности не пугали, он писал: «К чему удивляться сложному движению небесных тел, если их сущность нам неизвестна?» Однако уже к XIII веку этих окружностей накопилось 75! Модель стала столь громоздкой, что начали раздаваться осторожные возражения: неужели мир в самом деле устроен так сложно? Широко известен случай с Альфонсом X (1226–1284), королем Кастилии и Леона, государства, занимавшего часть современной Испании. Он, покровитель наук и искусств, собравший при своем дворе пятьдесят лучших астрономов мира, на одной из научных бесед

<sup>3</sup> Именно шесть, а не девять, поскольку Уран, Нептун и Плутон были открыты гораздо позже. Совсем недавно, 13 сентября 2006 года, по решению Международного астрономического союза (IAU) Плутон лишился статуса планеты. Так что планет в Солнечной системе теперь восемь.



обмолвился, что «если бы при сотворении мира Господь оказал мне честь и спросил моего совета, многое было бы устроено проще». Подобная дерзость не прощалась даже королям: Альфонс был низложен и отправлен в монастырь.<sup>4</sup> Но сомнения остались. Часть из них можно было бы разрешить, поставив Солнце в центр Вселенной и приняв систему Аристарха. Его труды были хорошо известны. Однако еще много веков никто из ученых не решался на такой шаг. Причины были не только в страхе перед властями и официальной церковью, которая считала теорию Птолемея единственно верной. И не только в инертности человеческого мышления: не так-то просто признать, что наша Земля – не центр мира, а лишь рядовая планета. Все-таки для настоящего ученого ни страх, ни стереотипы – не препятствия на пути к истине. Гелиоцентрическая система отвергалась по вполне научным, можно даже сказать, геометрическим причинам. Если допустить, что Земля вращается вокруг Солнца, то ее траектория – окружность с радиусом, равным расстоянию от Земли до Солнца. Как мы знаем, это расстояние равно 23455 радиусов Земли, т.е. более 150 миллионов километров. Значит, Земля в течение полугода перемещается на 300 миллионов километров. Гигантская величина! Но картина звездного неба для земного наблюдателя при этом остается такой же. Земля то приближается, то удаляется от звезд на 300 миллионов километров, но ни видимые расстояния между звездами (например, форма созвездий), ни их яркость не меняются. Это означает, что расстояния до звезд должны быть еще в несколько тысяч раз больше, т.е. небесная сфера должна иметь совершенно невообразимые размеры! Это, между прочим, осознавал и сам Аристарх, который писал в своей книге: «Объем сферы неподвижных звезд во столько раз больше объема сферы с радиусом Земля–Солнце, во сколько раз объем последней больше объема земного шара», т.е. по Аристарху выходило, что расстояние до звезд равно  $(23455)^2 R$ , это более 3,5 триллионов километров. В реальности расстояние от Солнца до ближайшей звезды еще примерно в 11 раз больше. (В модели, которую мы представили в самом начале, когда расстояние от Земли до Солнца равно 10 м, расстояние до ближайшей звезды равно ... 2700 километров!) Вместо компактного и уютного мира, в центре которого находится Земля и который помещается внутри относительно небольшой небесной сферы, Аристарх нарисовал бездну. И эта бездна испугала всех.

### Венера, Меркурий и невозможность геоцентрической системы

Между тем невозможность геоцентрической системы мира, с круговыми движениями всех планет вокруг Земли, может быть установлена с помощью простой геометрической задачи.

<sup>4</sup> Истинной причиной опалы короля Альфонса была, видимо, обычная борьба за власть, но его ироничное замечание об устройстве мира послужило веским поводом для его недругов.

**Задача 2.** На плоскости даны две окружности с общим центром  $O$ , по ним равномерно движутся две точки: точка  $M$  по одной окружности и точка  $V$  по другой. Докажите, что либо они двигаются в одном направлении с одинаковой угловой скоростью, либо в некоторый момент времени угол  $\angle MOV$  тупой.

**Решение.** Если точки движутся в одном направлении с разными скоростями, то через некоторое время лучи  $OM$  и  $OV$  окажутся сонаправленными. Далее угол  $\angle MOV$  начинает монотонно возрастать до следующего совпадения, т.е. до  $360^\circ$ . Следовательно, в некоторый момент он равен  $180^\circ$ . Случай, когда точки движутся в разных направлениях, рассматривается так же.

**Теорема.** Ситуация, при которой все планеты Солнечной системы равномерно вращаются вокруг Земли по круговым орбитам, невозможна.

**Доказательство.** Пусть  $O$  – центр Земли,  $M$  – центр Меркурия, а  $V$  – центр Венеры. Согласно многолетним наблюдениям, у Меркурия и Венеры разные периоды обращения, а угол  $\angle MOV$  никогда не превосходит  $76^\circ$ . В силу результата задачи 2 теорема доказана.

Конечно, древние греки неоднократно встречались с подобными парадоксами. Именно поэтому, чтобы спасти геоцентрическую модель мира, они заставили планеты двигаться не по окружностям, а по циклоидам.

Доказательство теоремы не совсем честно, поскольку Меркурий и Венера вращаются не в одной плоскости, как в задаче 2, а в разных. Хотя плоскости их орбит почти совпадают: угол между ними – всего несколько градусов. В упражнении 10 мы предлагаем вам устранить этот недостаток и решить аналог задачи 2 для точек, вращающихся в разных плоскостях. Другое возражение: может быть, угол  $MOV$  бывает тупым, но мы этого не видим, поскольку на Земле в это время день? Принимаем и это. В упражнении 11 нужно доказать, что для *трех* вращающихся радиусов всегда настанет момент времени, когда они будут образовывать друг с другом тупые углы. Если на концах радиусов – Меркурий, Венера и Солнце, то в этот момент времени Меркурий и Венера будут видны на небе, а Солнце – нет, т.е. на земле будет ночь. Но должны предупредить: упражнения 10 и 11 значительно сложнее задачи 2. Наконец, в упражнении 12 мы предлагаем вам, ни много ни мало, вычислить расстояние от Венеры до Солнца и от Меркурия до Солнца (они, конечно, вращаются вокруг Солнца, а не вокруг Земли). Убедитесь сами, насколько это просто, после того, как мы узнали метод Аристарха.

### Упражнения

**10.** В пространстве даны две окружности с общим центром  $O$ , по ним равномерно с разными угловыми скоростями движутся две точки: точка  $M$  по одной окружности и точка  $V$  по другой. Докажите, что в некоторый момент угол  $MOV$  тупой.

**11.** На плоскости даны три окружности с общим центром  $O$ , по ним равномерно с разными угловыми скоростями движутся три точки. Докажите, что в некоторый момент все три угла между лучами с вершиной  $O$ , направленными в данные точки, тупые.

**12.** Известно, что максимальное угловое расстояние между Венерой и Солнцем, т.е. максимальный угол между лучами, направленными с Земли к центрам Венеры и Солнца, равно

$48^\circ$ . Найдите радиус орбиты Венеры. То же – для Меркурия, если известно, что максимальное угловое расстояние между Меркурием и Солнцем равно  $28^\circ$ .

### Последний штрих: измерение угловых размеров Солнца и Луны

Следуя шаг за шагом рассуждениям Аристарха, мы упустили лишь один аспект: как измерялся угловой диаметр Солнца? Сам Аристарх этого не делал, пользуясь измерениями других астрономов (по-видимому, не совсем верными). Напомним, что радиусы Солнца и Луны он смог вычислить, не привлекая их угловые диаметры. Посмотрите еще раз на шаги 1, 2 и 3: нигде значение углового диаметра не используется! Он нужен только для вычисления расстояний до Солнца и до Луны. Попытка определить угловой размер «на глазок» успеха не приносит. Если попросить несколько человек оценить угловой диаметр Луны, большинство назовут угол от 3 до 5 градусов, что в разы больше истинного значения. Сказывается обман зрения: ярко-белая Луна на фоне темного неба кажется массивной. Первым, кто провел математически строгое измерение углового диаметра Солнца и Луны, был Архимед (287 – 212 до н.э.) Он изложил свой метод в книге «Псаммит» («Исчисление песчинок»). Сложность задачи он осознавал: «Получить точное значение этого угла – дело нелегкое, потому что ни глаз, ни руки, ни приборы, при помощи которых производится отсчет, не обеспечивают достаточной точности». Поэтому Архимед не берется вычислить точное значение углового диаметра Солнца, он лишь оценивает его сверху и снизу. Он помещает круглый цилиндр на конце длинной линейки, напротив глаза наблюдателя. Линейка направляется на Солнце, и цилиндр придвигается к глазу до тех пор, пока он не заслонит собой Солнце полностью. Затем наблюдатель уходит, а на конце линейки отмечается отрезок  $MN$ , равный размеру человеческого зрачка (рис.11). Тогда угол  $\alpha_1$  между прямыми  $MP$  и  $NQ$  меньше углового диаметра

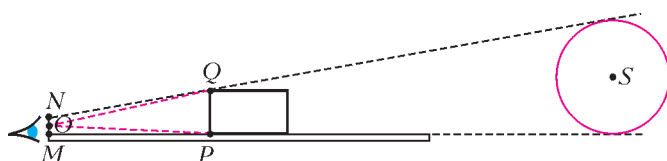


Рис. 11

Солнца, а угол  $\alpha_2 = \angle POQ$  – больше. Мы обозначили через  $PQ$  диаметр основания цилиндра, а через  $O$  – середину отрезка  $MN$ . Итак,  $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$  (докажите это в упражнении 13). Так Архимед находит, что угловой диаметр Солнца заключен в пределах от  $0,45^\circ$  до  $0,55^\circ$ .

Неясным остается, почему Архимед измеряет Солнце, а не Луну. Он был хорошо знаком с книгой Аристарха и знал, что угловые диаметры Солнца и Луны одинаковы. Луну же измерять гораздо удобнее: она не слепит глаза и границы ее видны отчетливее.

Некоторые древние астрономы измеряли угловой диаметр Солнца, исходя из продолжительности сол-

нечного или лунного затмения. (Попробуйте восстановить этот способ в упражнении 14.) А можно сделать то же, не дожидаясь затмений, а просто наблюдая закат Солнца. Выберем для этого день весеннего равноденствия 22 марта, когда Солнце восходит точно на востоке, а заходит точно на западе. Это означает, что точки восхода  $E$  и заката  $W$  диаметрально противоположны. Для земного наблюдателя Солнце движется по окружности с диаметром  $EW$ . Плоскость этой окружности составляет с плоскостью горизонта угол  $90^\circ - \gamma$ , где  $\gamma$  – географическая широта точки  $M$ , в которой находится наблюдатель (например, для Москвы  $\gamma = 55,5^\circ$ , для Александрии  $\gamma = 31^\circ$ ). Доказательство приведено на рисунке 12. Прямая  $ZP$  – ось вращения Земли, перпендикулярная плоскости экватора. Широта точки  $M$  – угол между отрезком  $ZP$  и плоскостью экватора. Проведем через центр Солнца  $S$  плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную оси  $ZP$ . Плоскость горизонта касается земного шара в точке  $M$ . Для наблюдателя, находящегося в точке  $M$ , Солнце в течение дня движется по окружности в плоскости  $\alpha$  с центром  $P$  и радиусом  $PS$ . Угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью горизонта равен углу  $MZP$ , который равен  $90^\circ - \gamma$ , поскольку плоскость  $\alpha$  перпендикулярна  $ZP$ , а плоскость горизонта перпендикулярна  $ZM$ . Итак, в день равноденствия Солнце заходит за горизонт под углом  $90^\circ - \gamma$ . Следовательно, во время заката оно проходит дугу окружности, равную  $\beta/\cos \gamma$ , где  $\beta$  – угловой диаметр Солнца (рис.13). С другой стороны, за 24 часа оно проходит по этой окружности полный оборот, т.е.  $360^\circ$ .

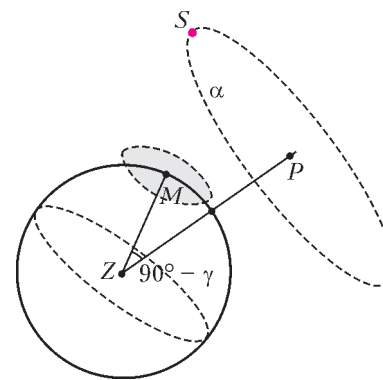


Рис. 12

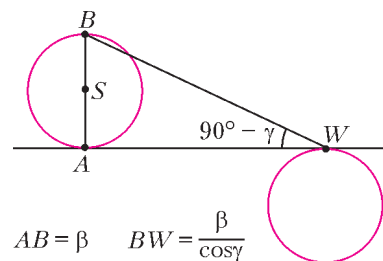


Рис. 13

Получаем пропорцию  $\frac{\beta/\cos \gamma}{360} = \frac{T}{24}$ , где  $T$  – продолжительность заката (единица измерения – час). Зная  $\gamma$  и измерив время  $T$ , находим  $\beta = 0,53^\circ$ .

#### Упражнения

**13.** Докажите, что угол  $\alpha_1$  между прямыми  $MP$  и  $NQ$  (см. рис.11.) меньше углового диаметра Солнца, а угол  $\alpha_2 = \angle POQ$  – больше.

**14.** Предложите способ измерения угловых размеров Луны во время лунного затмения.

С автором статьи можно связаться по адресу: v-protassov@yandex.ru

# Как рассмотреть нанообъект в оптический микроскоп

А.ЕЖОВ

КАК ИЗВЕСТНО, ОСНОВНУЮ ДОЛЮ ИНФОРМАЦИИ об окружающем мире человек получает с помощью зрения. Глаз человека – сложный и совершенный прибор. Этот созданный природой прибор работает со светом – электромагнитным излучением, диапазон длин волн которого находится между 400 и 760 нанометрами. Цвет, который при этом воспринимает человек, изменяется от фиолетового до красного.

Электромагнитные волны, соответствующие видимому свету, взаимодействуют с электронными оболочками атомов и молекул глаза. Результат этого взаимодействия зависит от того, в каком состоянии находятся электроны этих оболочек. Свет может поглощаться, отражаться или рассеиваться. Что именно произошло со светом, может многое рассказать об атомах и молекулах, с которыми он взаимодействовал. Диапазон размеров атомов и молекул – от 0,1 до десятков нанометров. Это во много раз меньше, чем длина волны света. Тем не менее, объекты именно таких размеров – назовем их нанообъектами – очень важно увидеть. Что же надо для этого сделать? Обсудим сначала, что может рассмотреть человеческий глаз.

Обычно, когда говорят о разрешающей способности того или иного оптического прибора, оперируют двумя понятиями. Одно из них – угловое разрешение, а второе – линейное разрешение. Эти понятия взаимосвязаны. К примеру, для человеческого глаза угловое разрешение составляет приблизительно 1 угловую минуту. При этом глаз может различить два точечных объекта, удаленных от него на 25–30 см, только тогда, когда расстояние между этими объектами больше чем 0,075 мм. Это вполне сравнимо с разрешением обычного компьютерного сканера. В самом деле, разрешение 600 точек на дюйм означает, что сканер может различить точки, расположенные на расстоянии 0,042 мм друг от друга.

Для того чтобы можно было различать объекты, расположенные на еще меньших расстояниях друг от друга, был придуман оптический микроскоп – прибор, увеличивающий разрешающую способность глаза. Выглядят эти приборы по-разному (что видно из рисунка 1), но принцип действия у них один тот же. Оптический микроскоп позволил отодвинуть предел разрешения до долей микрона. Уже 100 лет назад оптическая микроскопия сделала возможным изучать объекты микронных размеров. Однако тогда же стало



Рис.1. Оптические микроскопы. Слева – микроскоп фирмы Carl Zeiss 1906 года, справа – современный исследовательский микроскоп той же фирмы с двумя видеокамерами на основе ПЗС-матриц сверху

ясно, что простым увеличением количества линз и улучшением их качества добиться дальнейшего увеличения разрешающей способности невозможно. Разрешение оптического микроскопа оказалось ограничено свойствами самого света, а именно его волновой природой.

Еще в конце позапрошлого века было установлено, что разрешение оптического микроскопа составляет

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin u}$$

. В этой формуле  $\lambda$  – длина волны света, а  $n \sin u$  – числовая апертура объектива микроскопа, которая характеризует как микроскоп, так и то вещество, которое находится между объектом изучения и самой близкой к нему линзой микроскопа. И действительно, в выражении для числовой апертуры входят показатель преломления  $n$  среды, находящейся между объектом и объективом, и угол  $u$  между оптической осью объектива и самыми крайними лучами, которые выходят из объекта и могут попасть в этот объектив. Показатель преломления вакуума равен единице. У воздуха этот показатель очень близок к единице, у воды он составляет 1,33303, а у специальных жидкостей, используемых в микроскопии для получения максимального разрешения,  $n$  доходит до 1,78. Каким бы ни был угол  $u$ , величина  $\sin u$  не может быть больше единицы. Таким образом, разрешение оптического микроскопа не превышает долей длины волны света.

Обычно считается, что разрешение составляет половину длины волны.

Интенсивность, разрешение и увеличение объекта – разные вещи. Можно сделать так, что расстояние между центрами изображений объектов, которые расположены в 10 нм друг от друга, будет 1 мм. Это будет соответствовать увеличению в 100000 раз. Тем не менее, различить, один это объект или два, не получится. Дело в том, что изображения объектов, размеры которых очень малы по сравнению с длиной волны света, будут иметь одинаковую форму и размеры, не зависящие от формы самих объектов. Такие объекты называют точечными – их размерами можно пренебречь. Если такой точечный объект светится, то оптический микроскоп изобразит его в виде светлого кружка, окруженного светлыми и темными кольцами. Будем далее, для простоты, рассматривать именно источники света. Типичное изображение точечного источника света, полученное с помощью оптического микроскопа, показано на рисунке 2. Интенсивность светлых колец

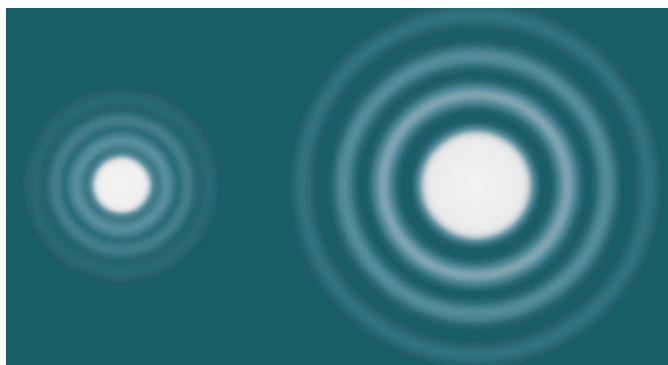


Рис.2. Изображения одного и того же точечного источника, полученные с помощью объективов с различными числовыми апертурами – для левого изображения она в два раза больше того, чем для правого. Интенсивность центрального максимума составляет приблизительно 85% суммарной интенсивности от всех частей изображения

намного меньше, чем у кружочка, и убывает по мере удаления от центра изображения. Чаще всего видно только первое светлое кольцо. Диаметр первого темно-

го кольца равен  $d = \frac{\lambda}{n \sin u}$ . Функция, которая описывает такое распределение интенсивности, называется функцией рассеяния точки. Эта функция не зависит от того, каково увеличение. Изображение нескольких точечных объектов будет представлять собой именно круги и кольца, как это видно из рисунка 3. Полученное изображение можно увеличивать, однако если изображения двух соседних точечных объектов сливаются, то они будут сливаться и дальше. Такое увеличение часто называют бесполезным – большие изображения просто будут более размытыми. Пример бесполезного увеличения показан на рисунке 4. Формула

$d = \frac{\lambda}{2n \sin u}$  часто называется дифракционным пределом, и она настолько знаменита, что именно ее высекли на памятнике автору этой формулы – немецкому физику-оптику Эрнсту Аббе.



Рис.3. Изображения группы точечных источников. Источники 1 и 2 расположены на расстоянии, значительно большем  $d = \lambda / (n \sin u)$ , источники 3 и 4 – на расстоянии  $d/2$ , а источники 5 и 6 – на расстоянии, значительно меньшем  $d/2$



Рис.4. Изображения двух точечных источников, полученные объективами, имеющими одинаковые числовые апертуры, но дающими различные увеличения. Расстояние между точечными источниками равно  $\lambda / (2n \sin u)$

Конечно, со временем оптические микроскопы стали снабжать разнообразными устройствами, позволяющими запоминать изображения. Человеческий глаз дополнили сначала пленочные фото- и кинокамеры, а потом – камеры, в основе которых лежат цифровые устройства, преобразующие попадающий на них свет в электрические сигналы. Самыми распространенными из таких устройств являются ПЗС-матрицы (ПЗС расшифровывается как прибор с зарядовой связью). Количество пикселей в цифровых камерах продолжает расти, однако само по себе это не может улучшить разрешение оптических микроскопов.

Еще двадцать пять лет назад казалось, что дифракционный предел непреодолим и что, для того чтобы изучать объекты, размеры которых во много раз меньше, чем длина волны света, необходимо отказаться от света как такового. Именно таким путем пошли создатели электронных и рентгеновских микроскопов. Несмотря на многочисленные преимущества таких микроскопов, задача использования именно света для рассмотрения нанообъектов оставалась. Причин для этого было много: удобство и простота работы с объектами, небольшое время, которое требуется для получения изображения, известные способы окрашивания образцов и многое другое. Наконец, после долгих лет напряженной работы стало возможным рассматривать нанообъекты с помощью оптического микроскопа. Наибольший прогресс в этом направлении достигнут в области люминесцентной микроскопии. Конечно, дифракционный предел никто не отменял, но его удалось обойти. В настоящее время существуют различные

оптические микроскопы, позволяющие рассматривать объекты, размеры которых намного меньше длины волны того самого света, который создает изображения этих объектов. Все эти приборы объединяет один общий принцип. Попробуем пояснить, какой именно.

Из того, что уже говорилось о дифракционном пределе разрешения, ясно, что увидеть точечный источник не так уж сложно. Если этот источник обладает достаточной интенсивностью, его изображение будет отчетливо видно. Форма и размер этого изображения, как уже говорилось, будут определяться свойствами оптической системы. При этом, зная свойства оптической системы и будучи уверенными в том, что объект точечный, можно определить, где именно находится объект. Точность определения координат такого объекта достаточно высока. Иллюстрацией этого может служить рисунок 5. Координаты точечного объекта

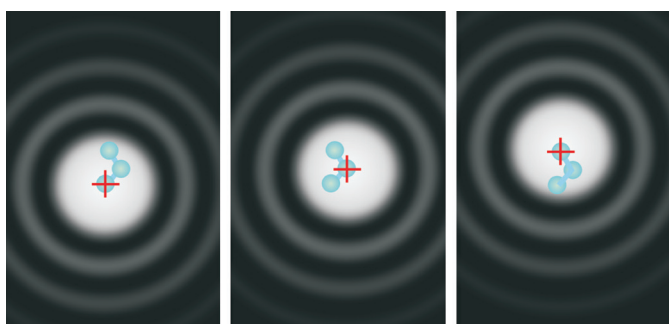


Рис.5. Последовательное определение положения точечного источника с точностью, значительно превышающей  $\lambda/(2n\sin u)$ . Красным крестом отмечено текущее положение источника, а голубым цветом обозначена траектория движения источника, построенная по трем его положениям. Размер голубого кружка соответствует точности определения положения источника

можно определить тем точнее, чем интенсивнее он светится. Еще в 80-х годах прошлого века с помощью оптического микроскопа умели определять положение отдельных светящихся молекул с точностью в 10–20 нанометров. Необходимым условием столь точного определения координат точечного источника является его одиночество. Ближайший к нему другой точечный источник должен находиться настолько далеко, чтобы исследователь точно знал, что обрабатываемое изображение соответствует одному источнику. Понятно, что это расстояние  $l$  должно удовлетворять условию  $l \geq \frac{\lambda}{2n \sin u}$ . В этом случае анализ изображения может дать очень точные данные о положении самого источника.

Большинство объектов, размеры которых намного меньше разрешающей способности оптического микроскопа, можно представить как набор точечных источников. Источники света в таком наборе находятся друг от друга на расстояниях, намного меньших величины  $\frac{\lambda}{2n \sin u}$ . Если эти источники будут светить одновременно, то сказать что-либо о том, где именно они расположены, будет невозможно. Тем не менее, если

суметь заставить эти источники светить по очереди, то положение каждого них можно определить с высокой точностью. Если эта точность превышает расстояние между источниками, то, обладая знанием о положении каждого из них, можно узнать о том, каково их взаимное расположение. А это означает, что получена информация о форме и размерах объекта, который представлен как набор точечных источников. Другими словами, в таком случае можно рассмотреть в оптический микроскоп объект, размеры которого меньше, чем дифракционный предел!

Таким образом, ключевым моментом является получение информации о различных частях нанобъекта независимо друг от друга. Существуют три основные группы методов, позволяющие сделать это.

Первая группа методов целенаправленно заставляет светить ту или иную часть исследуемого объекта. Самый известный из этих методов – сканирующая оптическая микроскопия ближнего поля. Рассмотрим ее подробнее.

Если внимательно изучить те условия, которые подразумеваются, когда речь идет о дифракционном пределе, обнаружится, что расстояния от объектов до линз значительно больше длины волны света. На расстояниях, сравнимых и меньших этой длины волны, картина получается другой. Вблизи любого объекта, попавшего в электромагнитное поле световой волны, существует переменное электромагнитное поле, частота изменения которого такая же, как частота изменения поля в световой волне. В отличие от световой волны, это поле быстро затухает по мере удаления от нанобъекта. Расстояние, на котором происходит уменьшение интенсивности, например, в  $e$  раз, сравнимо с размерами объекта. Таким образом, электромагнитное поле оптической частоты оказывается сконцентрированным в объеме пространства, размер которого намного меньше, чем длина волны света. Любой нанобъект, попавший в эту область, будет так или иначе взаимодействовать со сконцентрированным полем. Если тот объект, с помощью которого осуществляется это концентрирование поля, последовательно перемещать по какой-либо траектории вдоль изучаемого нанобъекта и регистрировать свет, излучаемый этой системой, то можно построить изображение по отдельным точкам, лежащим на этой траектории. Конечно, в каждой точке изображение будет выглядеть так, как показано на рисунке 2, но разрешение при этом будет определяться тем, насколько удалось сконцентрировать поле. А это, в свою очередь, определяется размерами того объекта, с помощью которого это поле концентрируется.

Самым распространенным способом такой концентрации поля является изготовление очень маленького отверстия в металлическом экране. Обычно это отверстие находится на конце заостренного и покрытого тонкой пленкой металла световода (световод часто называется оптическим волокном и широко используется для передачи данных на большие расстояния). Сейчас удастся изготавливать отверстия с диаметрами от 30 до 100 нм. Таким же по величине получается и

(Продолжение см. на с. 35)