журнал© Квант
МАРТ АПРЕЛЬ 2010 № 2
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН
Издатель – ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

Многогранный Делоне

Н.ДОЛБИЛИН

Метод пустой сферы и триангуляции Делоне

Борис Николаевич Делоне был замечательным популяризатором науки. При этом он придерживался принципа: каждая популярная статья о математике должна содержать доказательство хотя бы одного утверждения. Мы последуем этому принципу и приведем с доказательствами основные идеи очень полезной геометрической теории – теории разбиений Делоне. Эта теория была изложена им в начале 20-х годов в работе «О пустой сфере». В ряде специальных случаев идея такого разбиения уже встречалась, например, в работах Вороного. Заслуга Бориса Николаевича состояла в том, что он с присущей ему ясностью и прозрачностью описал эту простую геометрическую конструкцию для весьма общего класса множеств. Мы сейчас объясним основные идеи этой науки – для простоты лишь на плоскости, хотя эта теория легко переносится на пространство любой размерности.

Рассмотрим на плоскости некоторое множество X точек. Точки множества X, чтобы отличать их от других точек плоскости, не принадлежащих X, будем именовать *узлами*. Предполагается, что множество X узлов удовлетворяет следующим двум условиям. Существуют два положительных числа r и R, такие что

(1) *любой круг радиуса r содержит внутри себя не более одного узла из X;*

(2) *любой круг радиуса R содержит внутри себя или на границе не менее одного узла из X.*

Делоне назвал такое множество X (r, R)-системой. Сейчас это, кстати не очень удачное, название сменилось на *множество Делоне* (с параметрами r и R).

Понятно, что условия (1) и (2) эквивалентны условиям

($1'$) расстояние между узлами не менее $2r$ и

($2'$) расстояние от любой точки плоскости до ближайшего к ней узла из X не превосходит R.

Довольно часто оказывается полезным еще одно эквивалентное определение множества Делоне. Будем рассматривать круги с центрами только в узлах из X. Тогда условия (1) и (2) можно переформулировать:

($1''$) круги радиуса r с центрами в узлах из X попарно не перекрываются, т.е. образуют *упаковку* (рис. 1);

($2''$) круги радиуса R с центрами в узлах из X покрывают всю плоскость, т.е. образуют *покрытие*. Другими словами, любая точка плоскости принадлежит хотя бы одному из этих кругов.

Легко видеть, что в силу условия (2) число всех узлов во множестве Делоне бесконечно.

Окончание. Начало см. в «Кванте» №1.

Заметим, что параметры r и R задаются неоднозначно: из условий (1) и (2) очевидно вытекает, что множество X удовлетворяет тем же условиям (1) и (2) при любых значениях r' и R', если $0 < r' \le r$ и $R' \ge R$.

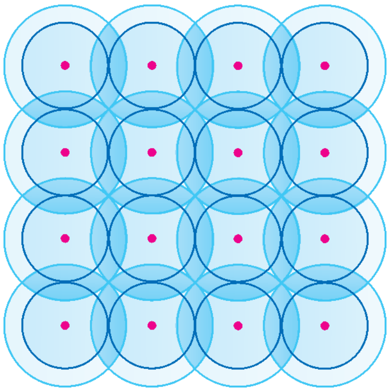


Рис. 1

Теперь вслед за Борисом Николаевичем приступим к построению некоторого особого разбиения плоскости на многоугольники, однозначно связанного с множеством X.

Разбиение плоскости – термин несколько новый, хотя смысл этого термина тот же, что и у известного с детства события: разбивания стекла. Целое стекло разбивается на осколки, из которых можно составить целое, при этом отдельные осколки не налегают друг на друга.[1]

Разбиением плоскости на многоугольники называется множество многоугольников M_1, M_2 и т.д., так расположенных на плоскости, что

(а) никакие два многоугольника не налегают друг на друга (условие упаковки), а

(б) многоугольники, взятые вместе, покрывают всю плоскость (условие покрытия).

Паркет на полу, кафельная плитка на стене, мозаика Пенроуза (рис.2) – все это ограниченные фрагменты разбиения (бесконечной) плоскости.

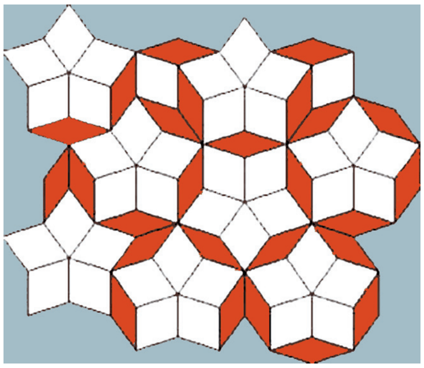


Рис. 2

Изложим теперь идею «пустой сферы», принадлежащую Борису Николаевичу Делоне.

0-й шаг. Возьмем на плоскости, где расположено множество X, маленький кружок, скажем радиуса меньше r, который ни внутри, ни на границе не

[1] *Эта аналогия, как и любая аналогия вообще, далека от совершенства.*

содержит узлов из X. Такой кружок существует, потому что расстояние между узлами не меньше $2r$.

1-й шаг. Оставляя центр O_1 круга неподвижным, увеличиваем его радиус, оставляя его пустым от узлов внутри, до тех пор, пока граница раздуваемого круга не наткнется на какой-нибудь узел x из X. Такой момент обязательно наступит, так как по условию (2) радиус пустого круга не превышает R (рис.3).

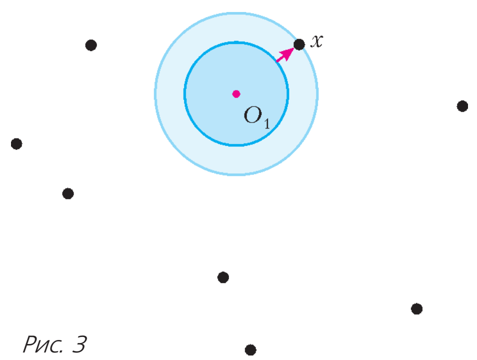


Рис. 3

2-й шаг. Теперь, не снимая круг с узла x, отодвигаем от узла x по прямой xO_1 центр расширяющегося круга до тех пор, пока он не наткнется еще на один узел y (рис.4). Такой момент обязательно наступит вследствие опять же условия (2). Обозначим центр этого круга через O_2.

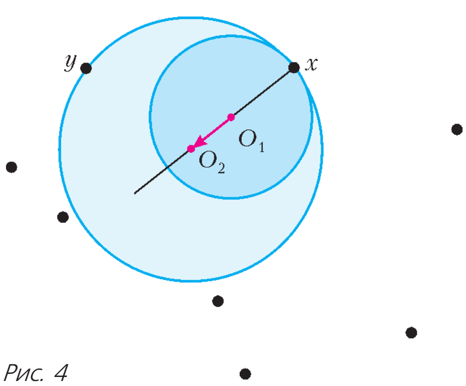


Рис. 4

3-й шаг. Не снимая круг с узлов x и y, будем удалять его центр от узлов x и y по срединному перпендикуляру к отрезку xy, пока расширяющийся круг не наткнется еще на один узел z (рис.5).

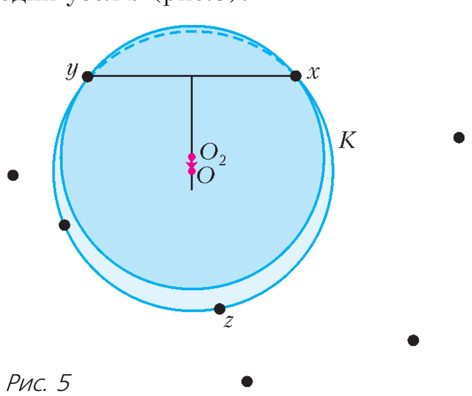


Рис. 5

На этом процесс расширения круга завершен. Обозначим окончательно полученный круг через K, а его центр – через O.

Заметим, что после третьего шага на граничной окружности круга расположено некоторое число k узлов, $k \geq 3$. Построим k-угольник с вершинами в данных k узлах (рис.6). Ясно, что этот миоугольник

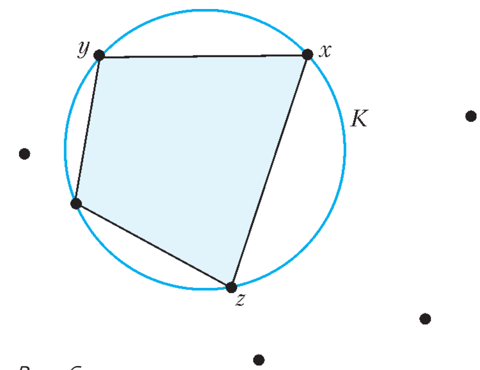


Рис. 6

вписан в круг, который других узлов из X ни внутри, ни на границе не содержит.[2]

Многоугольник M назовем многоугольником Делоне для заданного множества X узлов, если его вершины – это узлы из X и он вписан в некоторый круг K, который ни внутри, ни на границе никаких других узлов, кроме вершин, не содержит.

Полученный в результате описанной выше «четырехходовки» k-угольник является многоугольником Делоне. Таким образом, множество многоугольников Делоне не пусто. Более того, нетрудно видеть, что, применяя «четырехходовку» к маленьким кружкам, взятым в разных частях плоскости, можно получить бесконечно много многоугольников Делоне. Заметим, что любой узел из X является вершиной по крайней мере одного из многоугольников Делоне. Такой многоугольник можно построить посредством четырехходовки, примененной к маленькому кругу, достаточно близко расположенному к данному узлу. Борис Николаевич доказал не очень сложную, но важную теорему:

Теорема. *Множество всех многоугольников Делоне для данного множества X узлов образует разбиение плоскости.*

Доказательство. Напомним, что множество узлов X удовлетворяет условиям (1) и (2). Докажем сначала, что никакие два многоугольника Делоне M_1 и M_2 не перекрываются, т.е. не имеют общих внутренних точек. Возьмем «пустые» круги K_1 и K_2, описанные вокруг M_1 и M_2 соответственно. Никакой из этих кругов не содержится в другом, так как каждый из них внутри пуст от узлов из X и каждый из них содержит некоторое число узлов на границе.

Если круги K_1 и K_2 не перекрываются, то многоугольники M_1 и M_2, в них содержащиеся, тем более не перекрываются. Пусть круги перекрываются по некоторой «линзе» (рис.7), составленной из дуги a_1 первой окружности, входящей внутрь второго круга

[2] *Внимательный читатель мог заметить, что уже на первом шаге расширяющийся круг мог наткнуться не на один, а на два, а то и большее количество узлов. Заметим, что в этом случае мы могли бы перейти с 1-го шага сразу к 3-му, а то и вообще могли бы получить окончательный круг K.*

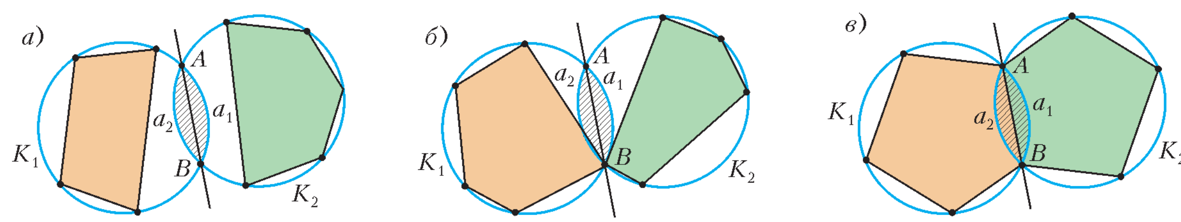


Рис. 7

K_2, и, соответственно, из дуги a_2 второй окружности, лежащей внутри круга K_1. Так как оба круга свободны от узлов внутри, то вершины многоугольников M_1 и M_2 лежат по разные стороны от хорды AB. На концах хорды либо нет узлов (см. рис.7,*а*), либо может быть один (см. рис.7,*б*) или два узла (см. рис.7,*в*). В первом случае многоугольники вовсе не пересекаются, во втором имеют общую вершину, а в третьем – общую сторону.

Докажем теперь, что многоугольники Делоне образуют покрытие. Докажем сначала, что *к любому многоугольнику Делоне по каждой его стороне прилегает некоторый другой многоугольник Делоне*. Возьмем сторону xy многоугольника M. «Снимем» круг K с узла z и, удаляя его центр от узла z, будем «протаскивать» его через узлы x и y (рис.8). Подчеркнем, что в процессе перемещения круг остается внутри пустым от узлов, а на его границе находятся лишь два узла x и y. Обязательно наступит такой момент (из-за условия (2)), когда круг K' с центром, перемещающимся по срединному перпендикуляру к хорде xy, наткнется на узел z'. Этот новый узел вместе, может быть, с другими узлами, оказавшимися на границе круга K', лежит по другую сторону от хорды xy (в силу того, что другая дуга круга K' лежит внутри пустого круга K). Узлы, лежащие на границе круга K' с центром O', образуют многоугольник Делоне M', который имеет с M общую сторону xy.

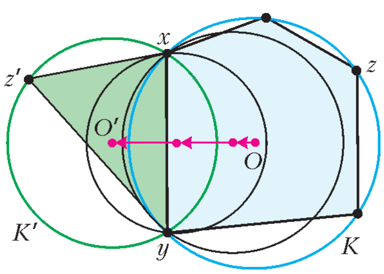


Рис. 8

Здесь может показаться очевидным, что если попарно не перекрывающиеся многоугольники прилегают друг к другу по каждой своей стороне, то они покрывают плоскость. На самом деле это не всегда так. Однако это верно, когда многоугольники расположены на плоскости так, что любой круг на плоскости пересекается лишь с конечным числом этих многоугольников. Множество многоугольников Делоне, построенных для множества X, именно таково (докажите это самостоятельно, опираясь на оба условия (1) и (2) множества X Делоне и на то, что многоугольник Делоне вписан в круг радиуса, не превосходящего R).

Предположим, что некоторая точка P плоскости остается непокрытой ни одним многоугольником Делоне. Заметим, что, по вышесказанному, точка P не является узлом. Возьмем внутри какого-нибудь многоугольника Делоне M_1 точку Q и проведем отрезок PQ. При необходимости сдвинем немного точку Q так, чтобы она оставалась внутри M_1, но PQ не содержал ни одного узла из X. Это можно сделать, так как расстояние между узлами не меньше $2r$. Заметим также, что многоугольников Делоне, которые пересекаются с PQ, конечное число.

Двигаясь по отрезку PQ от точки Q к P, мы выходим из M_1 через внутреннюю точку некоторой его стороны в прилегающий многоугольник Делоне M_2. Из многоугольника M_2 переходим через внутреннюю точку некоторой его стороны в прилегающий M_3 и т.д. В силу конечности числа многоугольников, пересекающихся с PQ, перед тем, как попасть в непокрытую точку P, мы должны были бы выйти из некоторого многоугольника через внутреннюю точку его стороны в непокрытую часть. Но это невозможно из-за доказанного выше прилегания к каждому многоугольнику Делоне по каждой его стороне другого многоугольника.

Итак, многоугольники Делоне не только не перекрывают друг друга, но и покрывают всю плоскость, т.е. образуют разбиение. Такие разбиения Борис Николаевич назвал L-разбиениями. Значение L-разбиений состоит прежде всего в том, что они тесно связаны с другим важным классом разбиений, задаваемых тем же множеством X узлов – разбиениями Вороного.[3]

Разбиения Вороного

Итак, пусть дано множество узлов X, которое удовлетворяет условиям (1) и (2). Для узла x определим его «область влияния» V_x, которая, по определению, состоит из тех точек P плоскости, которые отстоят от узла x не далее, чем от других узлов:

$$V_x := \left\{P \,\middle|\, |Px| \le |Px'| \text{ для всех } x' \in X,\ x' \ne x\right\}. \quad (3)$$

Область V_x называется *областью Вороного* узла x относительно множества X. Очевидно, что область Вороного можно получить так. Соединим узел x с остальными узлами отрезками, к каждому отрезку xx' проведем срединный перпендикуляр и выделим ту из двух разделяемых им полуплоскостей, которая содержит узел x (рис.9). Ясно, что выделенная полуплоскость – это геометрическое место точек P с условием

[3] *В то время эти разбиения назывались разбиениями Дирихле в честь немецкого математика Дирихле (1806–1859). Йохан Петер Густав Лёжен Дирихле (таково его было полное имя) использовал эти разбиения на плоскости и в пространстве в своих исследованиях по теории квадратичных форм. Позже, когда глубокие работы Георгия Феодосьевича Вороного (1868–1908) по теории таких разбиений нашли признание на Западе, их стали называть в честь Вороного.*

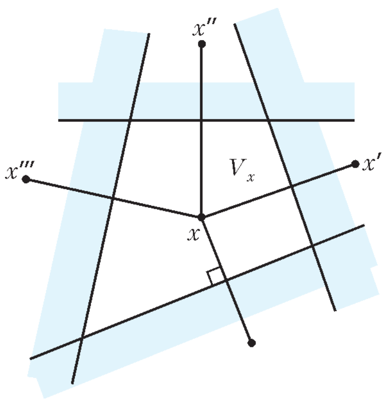


Рис. 9

$|Px| \le |Px'|$. Пересечение всех выделенных полуплоскостей, или, другими словами, множество всех точек, которые одновременно принадлежат всем выделенным полуплоскостям, – это геометрическое место точек, удовлетворяющих условию (3), т.е. это – область Вороного для узла x.

Сразу скажем, что в силу условия (2) для построения области Вороного для узла x вовсе не нужно брать все узлы $x' \in X$ (их, кстати, бесконечно много), а только те, что отстоят от x не далее чем на $2R$ (их, в силу условия (1), конечное число). Действительно, по условию (2) расстояние от узла x до наиболее удаленной точки P в V_x не превышает R.

Срединные перпендикуляры, проведенные к отрезкам xx', где $|xx'| \le 2R$, вырезают выпуклый многоугольник, который и есть область Вороного V_x. Никакие другие срединные перпендикуляры не пересекаются с V_x вовсе.

Действительно, для любой точки P на границе V_x найдется узел x', такой что $|xP| = |x'P| \le R$. По неравенству треугольника, $|xx'| \le |xP| + |Px'| \le 2R$. Поэтому срединные перпендикуляры к отрезкам xx', если $|xx'| > 2R$, не задевают область Вороного вовсе.

Итак, для каждого узла x его область Вороного V_x есть выпуклый многоугольник. Заметим, что для точек P внутри области Вороного выполняются лишь строгие неравенства: $|xP| < |x'P|$ для всех $x' \in X$, $x' \ne x$. В то же время на границе некоторые неравенства обращаются в равенства.

Теорема. *Множество всех областей Вороного V_x, $x \in X$, образует разбиение плоскости.*

Эта теорема почти очевидная, и читатель без труда сам может проверить, что множество областей Вороного покрывает всю плоскость и эти области попарно не имеют общих внутренних точек.

Разбиение Вороного как разбиение плоскости или пространства на «области влияния», играет огромную роль в практических задачах. Важность разбиения Делоне состоит в том, что оно *дуально* разбиению Вороного.

Дуальность этих разбиений означает следующую связь между ними. Любая вершина v в разбиении Вороного принадлежит нескольким областям Вороного, скажем, $V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_k}$ и т.д. и, в силу определения области Вороного, вершина v равноудалена от их центров-узлов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, и других более близких к этой вершине узлов нет. Это означает, что узлы $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k$ составляют вершины некоторого многоугольника Делоне.

Возьмем теперь ребро в разбиении Вороного, соединяющее две смежные вершины v_1 и v_2. Оно разделяет две области Вороного, пусть это будут V_{x_1} и V_{x_2}. Каждой из вершин, как мы видели, соответствуют многоугольники Делоне D_1 и D_2. Каждый из этих многоугольников имеет в качестве вершин узлы x_1 и x_2.

Поэтому отрезок x_1x_2 будет ребром в разбиении Делоне, *соответствующим ребру* v_1v_2 в разбиении Вороного. Более того, ребро v_1v_2 лежит на срединном перпендикуляре к отрезку x_1x_2.

И, наконец, область Вороного V_x соответствует очевидным образом вершине разбиения Делоне – узлу x.

Подведем итог. Между множествами вершин, ребер и многоугольников в разбиении Вороного и множествами (*взятыми в обратном порядке*) многоугольников, ребер и вершин в разбиении Делоне существуют взаимно однозначные соответствия, как говорят, с сохранением инцидентностей. Например, если вершина v принадлежит ребру e в одном разбиении, то соответствующий вершине v многоугольник M' в другом разбиении содержит в качестве стороны ребро e', соответствующее ребру e. Причем соответствующие друг другу ребра e и e' должны быть перпендикулярны друг другу, но, заметим, не обязаны пересекать друг друга.

В заключение отметим, что разбиения Делоне и Вороного обладают многими замечательными свойствами и оба имеют очень широкое применение.

История названия «разбиение Делоне»

Ниже – любопытная история о том, почему эти разбиения, которые Борис Николаевич, а вслед за ним и его студенты, называли L-разбиениями, теперь получили (к сожалению, после его смерти) название «разбиения Делоне».

Однажды в конце 1950-х годов Борису Николаевичу попала в руки статья одного из крупнейших геометров XX века, канадского математика Гарольда Коксстера. В этой статье Коксстер ввел и использовал L-разбиения без упоминания соответствующей работы Делоне. Борис Николаевич написал Коксстеру пись-

Б.Делоне (второй справа) и Г.Коксстер (четвертый справа). Крайний справа – С.С.Рышков. Международный конгресс математиков, Москва, МГУ, август 1966 года мо, в котором, по словам самого Делоне, он сообщил о том, что эти разбиения им были изучены еще в 1920-е годы. В 1924 году Делоне попросил академика В.А.Стеклова[4], который направлялся на международный конгресс математиков в Торонто, доложить его, Делоне, работу. Позднее, в 1928 году, эта работа была опубликована в трудах конгресса. При этом в письме Борис Николаевич не преминул упомянуть, что конгресс проходил в родном городе Кокстера, в Торонто. Ответ Кокстера был очень корректен. Он нашел в материалах математического конгресса 1924 года упоминание о работе Делоне. Кокстер в письме просил Делоне извинить его, тем более что в 1924 году он, Кокстер, был столь юн, что еще, опять же со слов Бориса Николаевича, «ходил под стол в коротких штанишках». Тогда же Кокстер написал в Кембридж профессору К.А.Роджерсу, который заканчивал свою ставшую своего рода математическим бестселлером книгу «Укладки и покрытия». Роджерс вставил в книгу упоминание о разбиении Делоне. Скорее всего, термин – разбиение Делоне (в вычислительной геометрии – триангуляции Делоне) – впервые появился именно в этой книге. В 1980-е годы он стал распространенным на Западе, откуда в конце прошлого века пришел в Россию.

В 1990-е мне довелось встречаться с профессором Кокстером и выступать у него на семинаре в Торонтском университете. Я попросил мэтра рассказать об этой истории. Кокстер в целом подтвердил историю, рассказанную Борисом Николаевичем, за исключением «ходьбы под стол в коротких штанишках». В 1924 году Кокстеру (1907–2003) было уже 17 лет. А фраза о «ходьбе под стол» была характерным для Бориса Николаевича проявлением экспрессии и юмора – качеств, которыми Делоне обладал сполна.

[4] *Владимир Андреевич Стеклов (1864–1926) – знаменитый российский математик, академик. В 1920-е годы организовал Физико-математический институт Академии наук и был первым его директором. Позднее, в 1934 году, этот институт разделился на два академических института: Математический институт им.В.А.Стеклова и Физический институт им. П.Н.Лебедева.*

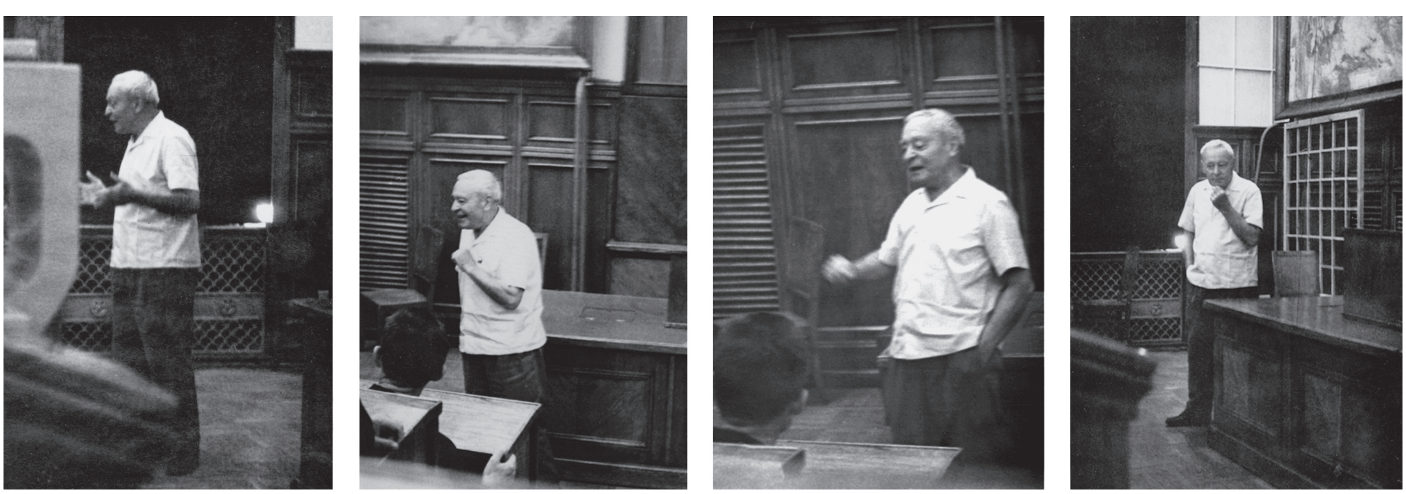
Ленинградский период (1922–1934)

Работа о разбиениях пространства обозначила сдвиг исследований в сторону геометрии. Он был постепенным и естественным. Определенную роль здесь сыграло соприкосновение при исследовании неопределенных уравнений с работами Вороного. Но основная причина геометризации исследований Бориса Николаевича заключалась в нем самом, в его исключительно образном, художественном восприятии мира.

Характерно, что Борис Николаевич не жалел сил и времени на то, чтобы довести понимание уже законченного математического результата до уровня, на котором результат оформлялся бы в геометрический образ. «Что это означает попросту?» – любимый вопрос, который он задавал и себе и коллегам всякий раз, когда обсуждалась очередная работа.

Признание научных заслуг не заставило себя долго ждать: в 1929 году Б.Н.Делоне выбирают в члены-корреспонденты Академии наук. К этому моменту он уже 7 лет профессорствует в Ленинградском университете. Его предельно ясные и продуманные лекции вызывают большой интерес у студентов. Популярность его была столь велика, что на первых лекциях его специальных (факультативных) курсов собиралось несколько сотен студентов, желавших увидеть легендарного лектора.

Надо сказать, что Делоне никогда не упускал возможности рассказать студентам о трудной нерешенной проблеме. Борис Николаевич руководствовался известным принципом, принадлежащим, кажется, Плутарху: «Ученик – не сосуд, который нужно наполнить, а факел, который нужно зажечь». А зажечь может тот, кто сам горит. Высокий научный авторитет, преданное и вместе с тем эстетическое отношение к науке, личное обаяние – все это притягивало к нему молодых людей. Неудивительно, что у него было много учеников, среди которых несколько выдающихся математиков: академики Александр Данилович Александров (1912–1999) и Игорь Ростиславович Шафаревич (1923 г.р.), член-корреспондент Академии наук Дмитрий Константинович Фаддеев (1907–1989).



Б.Н.Делоне читает лекцию

А.Д.Александров

Весной 1934 года в Ленинграде Борис Николаевич организовал первую школьную олимпиаду по математике, с которой начались математические олимпиады в нашей стране. Участники первой ленинградской олимпиады еще долго потом вспоминали, какое ошеломляющее впечатление произвели на них встречи с Б.Н.Делоне (см., например, «Квант» №9 за 1984 г., с.52).

Б.Н.Делоне и И.Р.Шафаревич (конец 1940-х годов)

Московский период (1934–1980)

В 1934 году в Ленинграде был образован Математический институт им.В.А.Стеклова, в котором Борис Николаевич работал с момента основания. До 1960 года он заведовал отделом алгебры, а затем до конца жизни отделом геометрии. Вскоре после создания Математический институт (точнее бóльшая его часть) переводится вместе с другими ведущими научными учреждениями Академии наук в Москву. С 1935 года Делоне работает профессором в Московском университете, в течение многих лет руководит кафедрой геометрии, теперь это – кафедра высшей геометрии и топологии на мехмате. В МГУ он создает весьма оригинальный курс аналитической геометрии, выделявшийся исключительным богатством геометрических идей. В этом нетрудно убедиться, открыв двухтомник по аналитической геометрии, написанный им в соавторстве с Д.Е.Райковым. Студенты, имевшие счастье слушать его лекции, вряд ли подозревали, что за их великолепием скрывалась тщательнейшая подготовка. На подготовку двухчасовой лекции у него уходило два полных дня, в дальнейшем – день. Он отшлифовывал каждую идею, каждый рисунок. И, как следствие, во время лекции на доске легко и быстро появлялись четкие додекаэдры и икосаэдры, элегантные параболоиды и гиперболоиды, симпатичные «аффинные коты», которых он ввел в свой курс аналитической геометрии для иллюстрации того, что происходит с фигурой при аффинном преобразовании.

У студентов мехмата МГУ одно время была в моде серия весьма остроумных анекдотов о своих профессорах на тему: «Кто (из профессоров) в чем варит суп?» По студенческой версии, не лишенной иронии, Борис Николаевич варил суп в n-мерной решетке[5]: суп, правда, вытекал, зато оставалась геометрическая наглядность.

Борис Николаевич был начисто лишен какого-либо резонерства, занудства. Приведу эпизод, о котором мне рассказал Н.Я.Виленкин, учившийся у Делоне. Однажды Борис Николаевич появился на лекции с каким-то злым выражением лица и начал строить неприятные гримасы и даже рычать. Студенты, привыкшие видеть Делоне всегда слегка хитро улыбающимся, были ошеломлены: что случилось с Борисом Николаевичем? Это продолжалось секунд десять-пятнадцать, а затем гримаса исчезла, все увидели знакомую улыбку и услышали объяснение случившемуся: «По дороге к вам встретил вашего куратора. Она мне очень жаловалась на вас, пропускаете занятия, многие не сдали коллоквиумы и т.д., и очень просила вас попугать...»

Относительно научной работы в московский период назову лишь некоторые основные направления, в которых Борис Николаевич упорно работал и получил важные результаты. Это – прежде всего геометрия положительных квадратичных форм и ее приложения к теории так называемых решетчатых покрытий и упаковок пространства. Были получены принципиально новые результаты в теории правильных и кристаллографических разбиений многомерного пространства, а также в геометрии чисел. Ряд результатов 1960–70 годов был получен совместно с коллегами и учениками.

Б.Н.Делоне был выдающимся популяризатором математики и вообще науки. Его популярные лекции, рассчитанные на широкую аудиторию, собирали сотни слушателей. У него были заранее заготовленные «экспромты» – приемы, при помощи которых он делал лекцию живой, увлекательной и незабываемой. Например, в 1940-е годы он несколько раз читал лекцию на тему «Теорема Н.Е.Жуковского о поддерживающей силе крыла самолета». Свою лекцию в знаменитой Большой аудитории Политехнического музея в Москве перед несколькими сотнями собравшихся Борис Николаевич начинал так.

Б.Н.: «Вы, наверное, знаете знаменитого математика академика Павла Сергеевича Александрова[6]?»

Отдельные голоса: «Да, конечно».

---

[5] *Решетка здесь означает множество точек с целыми координатами.*

[6] *П.С.Александров (1896–1982) – выдающийся математик, один из создателей отечественной топологической школы, академик, профессор мех-мата МГУ.*

Б.Н.: «А знаете ли вы, что знаменитый математик академик Александров никогда не летает самолетом?»

Легкий гул, аудитория недоумевает.

Б.Н.: «А знает ли вы, почему академик Александров боится летать самолетами?»

Гул нарастает.

Б.Н. (с хитрой улыбкой) завершает: «Академик Александров никогда не летает самолетами, потому что не знает теоремы Жуковского. А я вот знаю и летаю много. Сегодня я познакомлю вас с этой теоремой, и вы никогда не будете бояться полетов».

К этому моменту аудитория «разогрета» и готова слушать рассказ о такой важной теореме.

Вершина Белуха и пик Делоне

Не только наука

Среди многочисленных нематематических увлечений Бориса Николаевича особое место занимал альпинизм. Это, бесспорно, самое сильное увлечение прошло через всю жизнь. Зародилось оно, как уже говорилось, в детские годы во время летних выездов семьи в Швейцарию. В альпинизме его особенно влекла красота далеко открывающихся панорам, геометрически выразительных силуэтов хребтов и пиков. И, конечно, азарт победить высоту во что бы то ни стало. Занимался альпинизмом он вполне профессионально. В Альпах он еще в 1910 году поднялся на вторую по высоте после Монблана, но технически несложную вершину Монте-Роза.

Затем был Кавказ с многочисленными сложными восхождениями, в том числе и первовосхождениями. Но особенно Борис Николаевич любил Алтай. В 1926 году бывал и на горе, теперь носящей его имя. Пик Делоне находится на плече, ведущем на высшую вершину Алтая – Белуху. Путешествуя по Алтаю вместе И.Е.Таммом[7], они открыли изумительное по красоте место: озеро Шавло, в чистейшей воде которого отражались две покрытые снегами великолепные вершины. Одну из них Делоне назвал *Красавицей*, другую Тамм назвал *Сказкой*. По мнению Делоне, красота этого места превосходит все знаменитые места в Альпах. В наше время маршрут к Красавице и Сказке – один из самых привлекательных на Алтае.

В 30-е – 40-е годы прошлого века Борис Николаевич активно занимался организацией массового альпинизма в нашей стране. Летом 1931 года он организовал на Кавказе первый в стране альпинистский лагерь для рабочих ленинградского путиловского завода и проводил в нем занятия по технике альпинизма, вместе с инструкторами анализировал восхождения. В 1934 году ему было присвоено звание мастера альпинизма. В это время альпинизм становился массовым видом спорта, и стало необходимым создать систему класси-

Нижнее Шавлинское озеро и белоснежные вершины Сказка и Красавица

[7] *Игорь Евгеньевич Тамм (1895–1971) – выдающийся физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии (1958).*

фикации спортивных достижений. Делоне разработал принципы классификации горных восхождений (пять ступеней) и в соответствии с ними расклассифицировал более 200 маршрутов на вершины Кавказа, Средней Азии и Алтая. В 1938 году написал первый путеводитель для альпинистов «Вершины Западного Кавказа» (часть Кавказского хребта, расположенная к западу от Эльбруса). В нем описаны несколько десятков основных вершин этого района и пути восхождений на них. Описание сопровождалось рисунком каждой вершины вместе с кроками восхождения на нее. В книге на вклейке была помещена панорама всего западно-кавказского хребта, которую сделал Борис Николаевич, перемещаясь с вершины на вершину на параллельном хребте.

С возрастом на смену альпинистским восхождениям пришли туристские походы. Не прогулки на 5–10 километров, а именно настоящие 30–40-километровые походы, иногда очень трудные, проходившие неизменно по самым красивым местам Подмосковья. Борис Николаевич был физически исключительно закаленным человеком. И все равно было не по себе наблюдать в конце зимы быстро идущего с рюкзаком обнаженного по пояс пожилого человека. Падающий снег таял и, стекая по седой голове, застывал в виде крупных сосулек.

Борис Николаевич очень любил природу и восторгался ее красотой всегда молча, словно стараясь впитать в себя все и вся. Его восхищение невольно передавалось спутникам. Общение с природой походило на таинство, и ему было неприятно, хотя он и не подавал виду, когда это таинство нечаянно нарушалось чьими-то разговорами. Зато у костра или в электричке его спутники становились слушателями многочисленных историй, одна другой интереснейй. Рассказчиком Б.Н.Делоне был замечательным… «Вы, конечно, не знаете, что моя сестра святая (пауза, лукавый взгляд рассказчика, недоумение слушателей). Да-да, совершенно серьезно, святая…»

…Дальше начинался интереснейший рассказ о двоюродной сестре и подруге детства Елизавете Пиленко (в замужестве Кузьмина-Караваева), поэтессе (ее стихи высоко ценил Александр Блок). После революции 1917 года она эмигрировала во Францию, стала монахиней (мать Мария – таково было монашеское имя, так же назывался у нас художественный фильм, посвященный ей). Во время оккупации Франции фашистами мать Мария вступила в ряды Сопротивления, была арестована и погибла в немецком концлагере. После войны была официально канонизирована католической церковью.

«Вечер жизни»

В приветственном адресе по случаю 80-летия Германская академия естествоиспытателей «Леопольдина» пожелала члену этой академии Б.Н.Делоне «спокойного вечера жизни». «Вечер жизни» продолжался десять лет. В эти годы он вместе со своими учениками получил важные результаты по теории оптимальных покрытий пространства шарами, по локальной теории так называемых правильных структур, являющихся своего рода математическими моделями кристаллов.

Борис Николаевич был главой и опорой большой семьи. Он очень любил своих внуков, которые обожали своего деда. Борис Николаевич заботился о них, но особенно он беспокоился за судьбу старшего внука – Вадика. Вадим Делоне (см. http://vadim-delaunay.org), талантливый поэт, красавец, обладал нежным сердцем и отзывчивой душой. В 18 лет стал диссидентом, правозащитником. В 19 лет был осужден за организацию политической демонстрации в Москве. Через год после освобождения, 25-го августа 1968 года, вышел в составе знаменитой «семерки» на Красную площадь в знак протеста против введения советских войск в Чехословакию. За лозунг «За вашу и нашу свободу», который он держал в течение нескольких секунд, Вадим получил 3 года «несвободы». Борис Николаевич делал все, чтобы облегчить судьбу внука. Собирал подписи известных людей в защиту Вадима, с этими письмами посещал «высочайшие» кабинеты на Лубянке. Уже после суда ездил к нему, как только получал разрешение, на свидание в лагерь на севере Тюменской области.

Другим объектом особой заботы была жена, которая долго болела и нуждалась в уходе. После отъезда Вадима за границу и смерти жены он, уже 86-летний, «бросился во все тяжкие»: работа, лекции, поездки, два похода в неделю по 20–40 км каждый. В один из наиболее активных дней его постиг удар: инсульт, почти полная потеря речи, памяти, ограниченная подвижность. Принимая во внимание возраст, врачи были предельно скупы в оценке перспектив. Однако Борис Николаевич начинает бороться за полноценную жизнь и одерживает последнюю, но, может быть, самую важную победу в жизни (не без помощи своих близких, учеников и коллег). У него восстанавливаются утерянные функции, и он возвращается к настоящей жизни. Разумеется, длинные походы сменились прогулками «всего» на какие-то 10–15 километров, и не по глухим лесам, а по местам с «индустриальным пейзажем», и не дважды, а только раз в неделю. Конечно, работоспособность не была столь высокой, но это была полноценная яркая жизнь.

Однако «вечер жизни» подошел к своей естественной границе. Никогда не забуду, как однажды серым мартовским днем (это было месяца за четыре до конца) Борис Николаевич достал из книжного шкафа книгу и прочитал одно замечательное место у Пуанкаре.

Дыхание от волнения прерывалось, голос дрожал: «… жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и… в этом эпизоде прошедшая и будущая длительность сознательной мысли – не более чем мгновение. Мысль – только вспышка света посреди долгой ночи. Но эта вспышка – все».

Что может электростатика

К. БОГДАНОВ

...Все предсказания электростатики следуют из двух ее законов. Но одно дело высказать эти вещи математически, и совсем другое – применять их с легкостью и с нужной долей остроумия.

Ричард Фейнман

Электростатика изучает взаимодействие неподвижных зарядов. Ключевые эксперименты электростатики были проведены в XVII – XVIII веках. С открытием электромагнитных явлений и той революции в технологиях, которые они произвели, интерес к электростатике на некоторое время был утерян. Однако современные научные исследования показывают огромное значение электростатики для понимания многих процессов живой и неживой природы.

Электростатика и жизнь

В 1953 году американские ученые С.Миллер и Г.Юри показали, что одни из «кирпичиков жизни» – аминокислоты – могут быть получены путем пропускания электрического разряда через газ, близкий по составу первобытной атмосфере Земли, состоящей из метана, аммиака, водорода и паров воды. В течение последующих 50 лет другие исследователи повторили эти опыты и получили те же результаты. При пропускании коротких импульсов тока через бактерии в их оболочке (мембране) появляются поры, через которые внутрь могут проходить фрагменты ДНК других бактерий, запуская один из механизмов эволюции. Таким образом, энергия, необходимая для зарождения жизни на Земле и ее эволюции, действительно могла быть электростатической энергией разрядов молний (рис.1).

Рис. 1. Разряд молнии

Как электростатика вызывает молнии

В каждый момент времени в разных точках Земли сверкает около 2000 молний, в каждую секунду примерно 50 молний ударяют в Землю, каждый квадратный километр поверхности Земли поражается молнией в среднем шесть раз в году. Еще в XVIII веке Бенджамин Франклин доказал, что молнии, бьющие из грозовых облаков, это электрические разряды, переносящие на Землю *отрицательный* заряд. При этом каждый из разрядов снабжает Землю несколькими десятками кулонов электричества, а амплитуда тока при ударе молнии составляет от 20 до 100 килоампер. Скоростная фотосъемка показала, что разряд молнии длится лишь десятые доли секунды и что каждая молния состоит из нескольких более коротких.

С помощью измерительных приборов, установленных на атмосферных зондах, в начале XX века было измерено электрическое поле Земли, напряженность которого у поверхности оказалась равной приблизительно 100 В/м, что соответствует суммарному заряду планеты около 400000 Кл. Переносчиком зарядов в атмосфере Земли служат ионы, концентрация которых увеличивается с высотой и достигает максимума на высоте 50 км, где под действием космического излучения образовался электропроводящий слой – ионосфера. Поэтому можно сказать, что электрическое поле Земли – это поле сферического конденсатора с приложенным напряжением около 400 кВ. Под действием этого напряжения из верхних слоев в нижние все время течет ток силой 2–4 кА, плотность которого составляет $(1-2)\cdot 10^{-12}$ А/м^2, и выделяется энергия до 1,5 ГВт. И если бы не было молний, это электрическое поле исчезло бы! Получается, что в хорошую погоду электрический конденсатор Земли разряжается, а при грозе – заряжается.

Грозовое облако – это огромное количество пара, часть которого сконденсировалось в виде мельчайших капелек или льдинок. Верх грозового облака может находиться на высоте 6–7 км, а низ – нависать над землей на высоте 0,5–1 км. Выше 3–4 км облака состоят из льдинок разных размеров, так как температура там всегда ниже нуля. Эти льдинки находятся в постоянном движении, вызванном восходящими потоками теплого воздуха, поднимающегося снизу от нагретой поверхности земли. Мелкие льдинки легче, чем крупные, и они увлекаются восходящими потоками воздуха и по дороге все время сталкиваются с крупными. При каждом таком столкновении происходит электризация, при которой крупные льдинки заряжаются отрицательно, а мелкие – положительно. Со временем положительно заряженные мелкие льдинки собирают-

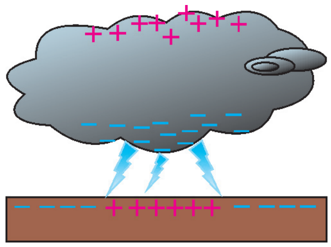


Рис. 2. Схематическое изображение разделения электрических зарядов в грозовом облаке и появления положительных зарядов на земле под облаком (вследствие электростатической индукции) перед разрядом молнии

ся преимущественно в верхней части облака, а отрицательно заряженные крупные – внизу (рис.2). Другими словами, верхушка облака заряжается положительно, а низ – отрицательно. При этом на земле непосредственно под грозовым облаком наводятся положительные заряды. Теперь все готово для разряда молнии, при котором происходит пробой воздуха и отрицательный заряд с нижней части грозовой тучи перетекает на Землю.

Характерно, что перед грозой напряженность электрического поля Земли может достигать 100 кВ/м, т.е. в 1000 раз превышать ее значение в хорошую погоду. В результате во столько же раз увеличивается положи-

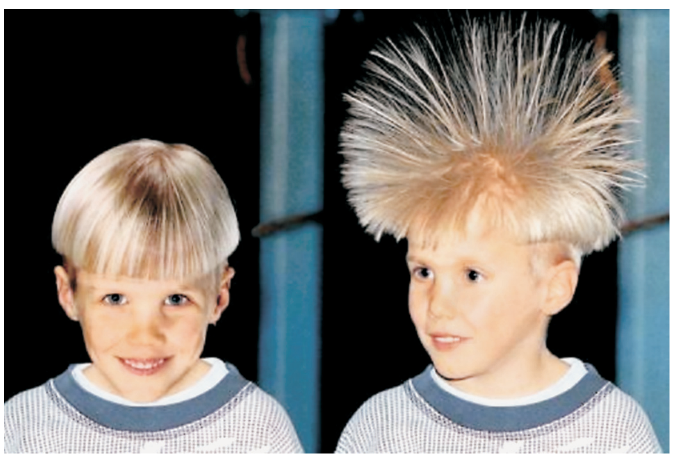


Рис. 3. Как встают волосы в сильном электрическом поле

тельный заряд каждого волоска на голове человека, стоящего под грозовой тучей, и они, отталкиваясь друг от друга, встают дыбом (рис.3).

Фульгурит – след молнии на земле

При разряде молнии выделяется энергия порядка $10^9 - 10^{10}$ Дж . Бóльшая часть этой энергии тратится на гром, нагрев воздуха, световую вспышку и излучение других электромагнитных волн, и только маленькая часть выделяется в том месте, где молния входит в землю. Но и этой «маленькой» части вполне достаточно, чтобы вызвать пожар, убить человека или разрушить здание. Молния может разогревать канал, по которому она движется, до 30000 °С, что гораздо выше температуры плавления песка (1600 – 2000 °С). Поэтому молнии, попадая в песок, плавят его, а раскаленный воздух и водяные пары, расширяясь, формируют из расплавленного песка трубку, которая через некоторое время застывает. Так рождаются фульгуриты (громовые стрелы, чертовы пальцы) – полые цилиндры, сделанные из оплавленного песка (рис. 4). Самые длинные из раскопанных фульгуритов уходили под землю на глубину более пяти метров.

Рис. 4. Фульгуриты, найденные автором статьи в районе Крылатское (Москва); для масштаба на том же фото показана пятирублевая монета

Как электростатика защищает от молний

К счастью, большинство разрядов молнии происходят между облаками и поэтому не угрожают здоровью людей. Однако считается, что каждый год молнии убивают более тысячи людей по всему миру. По крайней мере, в США, где ведется такая статистика, ежегодно от удара молнии страдают около тысячи человек и более ста из них погибают. Ученые давно пытались защитить людей от этой «кары божьей». Например, изобретатель первого электрического конденсатора (лейденской банки) Питер ван Мушенбрук в статье об электричестве, написанной для знаменитой французской «Энциклопедии», защищал традиционные способы предотвращения молнии – колокольный звон и стрельба из пушек, которые, как он считал, оказываются довольно эффективными.

В 1750 году Франклин изобрел громоотвод (молниеотвод). Пытаясь защитить здание Капитолия столицы штата Мэриленд от удара молнии, он прикрепил к зданию толстый железный стержень, возвышающийся над куполом на несколько метров и соединенный с землей. Ученый отказался патентовать свое изобретение, желая, чтобы оно как можно скорее начало служить людям. Механизм действия громоотвода легко объяснить, если вспомнить, что напряженность электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника увеличивается с ростом кривизны этой поверхности. Поэтому под грозовым облаком вблизи острия громоотвода напряженность поля будет так высока, что вызовет ионизацию окружающего воздуха и коронный разряд в нем. В результате вероятность попадания молнии в громоотвод значительно возрастет. Так знание электростатики не только позволило объяснить происхождение молний, но и найти способ защититься от них.

Весть о громоотводе Франклина быстро разнеслась по Европе, и его выбрали во все академии, включая и Российскую. Однако в некоторых странах набожное население встретило это изобретение с возмущением. Сама мысль, что человек так легко и просто может укротить главное оружие божьего гнева, казалась кощунственной. Поэтому в разных местах люди из благочестивых соображений ломали громоотводы.

Любопытный случай произошел в 1780 году в одном небольшом городке на севере Франции, где горожане потребовали снести железную мачту громоотвода и дело дошло до судебного разбирательства. Молодой адвокат, защищавший громоотвод от нападок мракобесов, построил защиту на том, что и разум человека, и его способность покорять силы природы имеют божественное происхождение. Все, что помогает спасти жизнь, во благо – доказывал молодой адвокат. Он выиграл процесс и снискал большую известность. Адвоката звали… Максимилиан Робеспьер.

Ну, а сейчас портрет изобретателя громоотвода – самая желанная репродукция в мире, ведь она украшает известную всем стодолларовую купюру.

Электростатика, возвращающая жизнь

Энергия разряда конденсатора не только привела к возникновению жизни на Земле, но и может вернуть жизнь людям, у которых клетки сердца перестали синхронно сокращаться. Асинхронное (хаотичное) сокращение клеток сердца называют фибрилляцией. Фибрилляцию сердца можно прекратить, если пропустить через все его клетки короткий импульс тока. Для этого к грудной клетке пациента прикладывают два электрода, через которые пропускают импульс длительностью около десяти миллисекунд и амплитудой до нескольких десятков ампер. При этом энергия разряда через грудную клетку может достигать 400 Дж (что равно потенциальной энергия пудовой гири, поднятой на высоту 2,5 м). Устройство, обеспечивающее электрический разряд, прекращающий фибрилляцию сердца, называют дефибриллятором. Простейший дефибриллятор представляет собой колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью 20 мкФ и катушки индуктивностью 0,4 Гн. Зарядив конденсатор до напряжения 1–6 кВ и разрядив его через катушку и пациента, сопротивление которого составляет около 50 Ом, можно получить импульс тока, необходимый для возвращения пациента к жизни.

Электростатика, дающая свет

Люминесцентная лампа может служить удобным индикатором напряженности электрического поля. Чтобы убедиться в этом, находясь в темном помещении, потрем лампу полотенцем или шарфом – в результате внешняя поверхность лампового стекла зарядится положительно, а ткань – отрицательно. Как только это произойдет, мы увидим всполохи света, возникающие в тех местах лампы, к которым мы прикасаемся заряженной тканью. Измерения показали, что напряженность электрического поля внутри работающей люминесцентной лампы составляет около 10 В/м. При такой напряженности свободные электроны обладают необходимой энергией для ионизации атомов ртути внутри люминесцентной лампы.

Рис. 5. Свечение люминесцентных ламп, воткнутых в землю под высоковольтными линиями электропередач

Электрическое поле под высоковольтными линиями электропередач – ЛЭП – может достигать очень высоких значений. Поэтому если в темное время суток люминесцентную лампу воткнуть в землю под ЛЭП, то она загорится, и довольно ярко (рис.5). Так с помощью энергии электростатического поля можно освещать пространство под ЛЭП.

Как электростатика предупреждает о пожаре и делает дым чище

В большинстве случаев при выборе типа детектора пожарной сигнализации предпочтение отдается дымовому датчику, так как пожар обычно сопровождается выделением большого количества дыма и именно этот тип детектора способен предупредить людей в здании об опасности. Дымовые датчики используют ионизацию или фотоэлектрический принцип для обнаружения дыма в воздухе.

В ионизационных детекторах дыма имеется источник α-излучения (как правило, америций-241), ионизирующий воздух между металлическими пластинами-электродами, электрическое сопротивление между которыми постоянно измеряется с помощью специальной схемы. Образующиеся в результате α-излучения ионы обеспечивают проводимость между электродами, а оказывающиеся там микрочастицы дыма связываются с ионами, нейтрализуют их заряд и увеличивают таким образом сопротивление между электродами, на что реагирует электрическая схема, подавая сигнал тревоги. Датчики, устроенные на этом принципе, демонстрируют весьма впечатляющую чувствительность, реагируя еще до того, как самый первый признак дыма обнаруживается живым существом. Следует отметить, что используемый в датчике источник радиации никакой опасности для человека не представляет, так как альфа-лучи не могут пройти даже через лист бумаги и полностью поглощаются слоем воздуха толщиной в несколько сантиметров.

Способность частичек пыли к электризации широко используется в промышленных электростатических пылеуловителях. Газ, содержащий, например, частицы сажи, поднимаясь вверх, проходит через отрицательно заряженную металлическую сетку, в результате чего эти частицы приобретают отрицательный заряд. Продолжая подниматься вверх, частицы оказываются в электрическом поле положительно заряженных пластин, к которым они притягиваются, после чего частицы падают в специальные емкости, откуда их периодически удаляют.