XXXI ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2009 год)

Базовый вариант

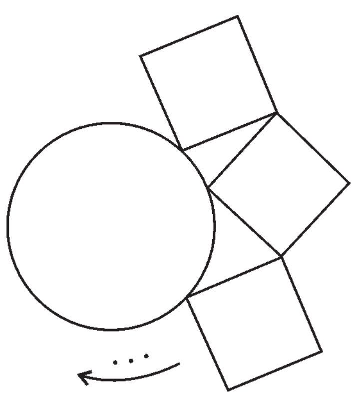
8–9 классы

1 (3)[1]. См. задачу 7 конкурса «Математика 6–8» в «Кванте» №5 за 2009 год.

2 (4). Есть 40 гирек массой 1 г, 2 г, …, 40 г. Из них выбрали 10 гирь четной массы и положили на левую чашу весов. Затем выбрали 10 гирь нечетной массы и положили на правую чашу весов. Весы оказались в равновесии. Докажите, что на какой-нибудь чаше есть 2 гири с разностью масс в 20 г.

В.Произволов

3 (4). На столе лежит картонный круг радиуса 5 см. Петя, пока возможно, прикладывает к кругу снаружи картонные квадраты со стороной 5 см так, чтобы выполнялись условия:
1) у каждого квадрата одна вершина лежит на границе круга;
2) квадраты не перекрываются;
3) каждый следующий квадрат касается предыдущего вершиной к вершине.



Определите, сколько квадратов может выложить Петя, и докажите, что последний и первый квадраты тоже коснутся вершинами.

А.Шаповалов

4 (5). См. задачу М2162 «Задачника «Кванта».

5 (5). См. задачу 6 конкурса «Математика 6–8» в «Кванте» №5 за 2009 год.

10 – 11 классы

1 (4). См. задачу М2162 «Задачника «Кванта».

2 (4). В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная $ABCDEF$, противоположные звенья которой параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). При этом AB не равно DE. Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.

В.Произволов

3 (4). См. задачу 9 конкурса «Математика 6–8» в «Кванте» №5 за 2009 год.

4 (4). На сторонах правильного 2009-угольника отметили по точке. Эти точки являются вершинами 2009-угольника площади S. Каждую из отмеченных точек отразили относительно середины стороны, на которой эта точка лежит. Докажите, что 2009-угольник с вершинами в отраженных точках также имеет площадь S.

П.Кожевников

5 (5). В стране две столицы и несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Среди дорог есть платные. Известно, что на любом пути из южной столицы в северную имеется не меньше десяти платных дорог. Докажите, что все платные дороги можно распределить между десятью компаниями так, чтобы на любом пути из южной столицы в северную имелись дороги каждой из компаний.

И.Нетай, Д.Баранов

Сложный вариант

8 – 9 классы

1 (4). В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко – не поровну, но каждый кувшин оказался заполнен не более чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него поровну во все остальные. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну.

Е.Горинов

2 (6). У Миши есть 1000 одинаковых кубиков, у каждого из которых одна пара противоположных граней белая, вторая – синяя, третья – красная. Он собрал из них большой куб $10 \times 10 \times 10$, прикладывая кубики друг к другу одноцветными гранями. Докажите, что у большого куба есть одноцветная грань.

М.Мурашкин

3 (6). См. задачу М2163,а) «Задачника «Кванта».

4 (6). См. задачу 10 конкурса «Математика 6–8» в «Кванте» №5 за 2009 год.

5. Из гирек массами 1 г, 2 г, …, N г требуется выбрать несколько (больше одной) с суммарной массой, равной средней массе оставшихся гирек. Докажите, что:
а) (2) это можно сделать, если $N + 1$ – квадрат целого числа;
б) (7) если это можно сделать, то $N + 1$ – квадрат целого числа.

А.Шаповалов

6 (10). См. задачу М2164,а) «Задачника «Кванта».

7 (14). См. задачу М2167 «Задачника «Кванта».

10 – 11 классы

1 (4). См. задачу М2161 «Задачника «Кванта».

2 (6). Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из N частей можно было сложить квадрат, а из

[1] *В скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.*

оставшихся N частей – прямоугольник.

А.Шаповалов

3 (7). Сфера касается всех ребер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных ребер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

Фольклор (предложил В.Произволов)

4 (9). См. задачу М2166 «Задачника «Кванта».

5 (9). Даны треугольник XYZ и выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Стороны AB, CD и EF параллельны и равны сторонам XY, YZ и ZX соответственно. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в серединах сторон BC, DE и FA не меньше площади треугольника XYZ.

Н.Белухов

6 (12). См. задачу М2167 «Задачника «Кванта».

7 (14). У входа в пещеру стоит барабан, на нем по кругу через равные промежутки расположены N одинаковых с виду бочонков. Внутри каждого бочонка лежит селедка – либо головой вверх, либо головой вниз, но где как – не видно (бочонки закрыты). За один ход Али-Баба выбирает любой набор бочонков (от 1 до N штук) и переворачивает их все. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, какие бочонки были перевернуты. Пещера откроется, если во время вращения барабана все N селедок будут расположены головами в одну сторону. При каких N Али-Баба сможет за сколько-то ходов открыть пещеру?

Л.Брагинский, Д.Фомин, П.Коган

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов

ИНФОРМАЦИЯ

Современная механика и робототехника для школьников

Механика – древнейшая естественная наука, основа научно-технического прогресса на всем протяжении человеческой истории, а современная робототехника – одно из самых важных и интересных направлений науки и техники, в котором проблемы механики и новых технологий соприкасаются с проблемами искусственного интеллекта. Возможность создать своими руками движущийся механизм, а тем более настоящего робота, всегда привлекала школьников. В последнее время получили широкое распространение лего-конструкторы, а недавно стали проводиться двухэтапные лего-соревнования всероссийского уровня. Достаточно сказать, что сейчас в отборочных соревнованиях в общей сложности принимает участие более 800 команд.

Однако уже более 10 лет проводятся «взрослые» соревнования роботов, в которых участвуют команды студентов, аспирантов и молодых ученых. В отличие от школьников, которые собирают лего-роботов из стандартных деталей, участники взрослых соревнований оказываются на переднем крае научных исследований, сами проектируют и создают новых роботов разных типов (колесных, шагающих, змееподобных) и средства управления ими, а для этого они обсуждают идеи и подходы к решению всего круга вопросов динамики, управления и стабилизации (т.е. придания устойчивости). Каждый, кто видел «взрослые» соревнования роботов, может подтвердить, что они очень интересны и зрелищны, поскольку возможности роботов, участвующих в этих соревнованиях, гораздо шире, чем возможности лего-роботов, а задания, выполняемые ими, весьма разнообразны и гораздо сложнее, чем задания на школьных соревнованиях. Дополнительное преимущество здесь получает робот, у которого более «развит» искусственный интеллект, обеспечивающий ему выбор лучшей стратегии и тактики выполнения задания.

Проблемы создания роботов привели к появлению мехатроники – новой науки, стоящей на стыке механики, электроники, информатики (включая элементы искусственного интеллекта) и робототехники. Знание каждой из этих наук совершенно необходимо для создания современного робота. Существенное препятствие для участия школьников во «взрослых» соревнованиях – незнание ими основ общей механики и других наук в объеме, нужном для разработок робототехнических систем. Ведь в обычном школьном курсе (и даже в физико-математических школах) механика представлена только самыми простыми задачами. Школьники чаще всего не представляют, чем занимается и какие проблемы решает современная наука *механика*, хотя именно она – основа научно-технического прогресса (см. статью Г.Г.Черного в «Кванте» № 3, 4 за 2009 г.). Из-за этого в течение уже многих лет конкурсы абитуриентов при поступлении на отделения механики университетов меньше, чем на отделения математики, физики и информатики, т.е. родственных наук, о которых школьная программа дает несколько лучшее представление.

Вот почему Институт механики МГУ им. М.В.Ломоносова в 2004 году начал проведение Научно-образовательной программы (НОП) для школьников и учителей, желающих узнать о последних достижениях механики, мехатроники и робототехники. Одна из главных задач НОП – помочь школьникам в выборе будущей специальности, дать желающим начальное образование в области механики и робототехники, ближе познакомить с этими науками. Эта Программа предусматривает чтение спецкурса, проведение серии лекций, индивидуальную работу со школьниками, консультации и научное руководство, включая подготовку выступлений на школьных конференциях, конференциях молодых ученых, а также организацию конкурсов и многое другое. При содействии выбранного руководителя школьники могут начать самостоятельную научно-исследовательскую работу, попробовать свои силы в решении и исследовании конкретных задач и в конструировании робототехнических и мехатронных систем. Лучшие работы школьников рекомендуются к опубликованию в ведущих научных журналах и представлению на научных семинарах и конференциях.

Предлагаемые спецкурсы рассчитаны на учащихся 9–11 классов, читаются на доступном для школьников уровне, но охватывают широкий круг вопросов – от классических результатов в механике и робототехнике и смежных областях науки и техники до новейших научных исследований. Проводятся также лекции Лектория «Встречи с интересными учеными-механиками», тематика которых носит популярный характер и рассчитана на весьма широкий круг слушателей. Лекции часто имеют междисциплинарный характер и посвящены вопросам, далеким от традиционных областей общей механики и робототехники. Например, были представлены такие темы: явление кавитации; математические модели систем управления объектами национальной значимости; вулканические извержения; свойства зрения живых существ и их использование при создании систем технического зрения; различные аспекты биомеханики (т.е. науки, стоящей на стыке механики и биологии) – тренажеры для космонавтов, современные материалы и их использование при протезировании костей, а также разработанная только недавно теория, удовлетворительно объясняющая измерение артериального давления крови с помощью простого прибора, состоящего из резиновой надувной манжеты, груши и манометра. Организуются экскурсии на уникальные экспериментальные установки Института механики МГУ (гидродинамическая труба, аэродинамическая труба, гидроканал и т.п.).

Ознакомление с современной механикой и робототехникой важно не только для школьников, но и для учителей средней школы. Поэтому в рамках нашей Программы проводятся курсы повышения квалификации учителей.

Важное направление Программы – создание списка научно-исследовательских задач, предлагаемых школьникам. В настоящее время он включает более 30 заданий. Так, ежегодно объявляется конкурс на постановку и проведение эксперимента по исследованию свойств сухого трения. Со списком задач и объявлением о конкурсе можно познакомиться на сайте, указанном в конце статьи.

Для подготовки видеокурса лекций ведется их видеозапись и создается видеотека – основа для дистанционного обучения (включая работу со школами для детей с ограниченными возможностями).

Все перечисленные выше мероприятия Программы для школьников и учителей, осуществляемые на традиционных площадках, **проводятся на бесплатной основе**. Однако, по согласованию, возможно также проведение выездных лекций и семинаров, кружков, осуществление других форм сотрудничества.

Принять участие в любом мероприятии Программы (прослушивание лекций, участие в конкурсе, решение задач) может любой желающий школьник. Обращаем внимание на то, что по многим направлениям (конкурсы, научно-исследовательская работа и т.п.) возможно дистанционное участие.

Регулярно обновляемая информация обо всех мероприятиях Программы представлена на сайте Института механики http://www.imec.msu.ru/school

Наш электронный адрес: school@imec.msu.ru

Почтовый адрес для переписки: 119192 Москва, Мичуринский проспект, д.1, Институт механики МГУ, Научно-образовательная программа по механике.

Приглашаем всех заинтересованных лиц и организации принять участие в нашей Программе!

Публикацию подготовили
С.Довбыш, Б.Локшин, М.Салмина

Конкурс «Свободный полет»

Благотворительный фонд «Новая мысль» (учредитель ЗАО «Финам») продолжает конкурс «Свободный полет» среди лиц, склонных к критическому анализу различных проблем физики, математики и информатики. Конкурсант должен сам поставить задачу и представить ее решение.

Цель конкурса: выявление и поощрение самостоятельно и конструктивно мыслящих людей.

Конкурс – ежегодный. Условия проведения очередного конкурса объявляются в декабре, итоги подводятся в мае следующего года, причем отдельно для лиц не старше 18 лет и для лиц до 35 лет.

Премиальные фонды формируются в таких размерах:

для участников не старше 18 лет – 300000 руб. (главная премия 150000 руб., три поощрительные по 50000 руб.);

для участников не старше 35 лет – 500000 руб. (главная премия 200000 руб., три поощрительные по 100000 руб.).

Оргкомитет конкурса планирует впоследствии увеличение объемов наградных фондов.

Условия проведения конкурса

Каждый участник представляет на рассмотрение жюри свой проект, содержащий сформулированную задачу и ее решение. (В отдельных случаях жюри готово рассматривать задачи с незавершенными решениями.)

Общий объем отчета по проекту должен быть не более 10 машинописных страниц, при этом все громоздкие вычисления должны быть вынесены в приложения, которые являются составной частью отчета.

Распечатанный вариант отчета (1 экз.) нужно прислать по почте в редакцию журнала «Квант» по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, д. 64-А, а электронный отчет отдельным файлом нужно послать на электронный адрес редакции: admin@kvant.info

Титульный лист отчета должен содержать следующую информацию о конкурсанте:

фамилия, имя, отчество;

почтовый адрес, электронный адрес, телефон;

данные об образовании, о наличии научной степени (если таковая имеется).

Срок приема заявок на участие в конкурсе – *до 15 апреля 2010 года.* Итоги конкурса будут подведены в конце мая 2010 года.

Работы, с согласия их авторов и заслуживающие общего внимания по мнению жюри, будут размещаться на специальном сайте фонда «Новая мысль» с указанием тех работ, которые отмечены премиями.

Заочное отделение Малого мехмата МГУ

Малый мехмат — школа юных математиков при механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова – работает более 30 лет. Основные задачи Малого мехмата – углубление знаний по темам школьной программы и расширение математического кругозора за рамки программы средней школы.

Малый мехмат состоит из двух отделений: вечернего и заочного. На вечернем отделении по субботам работают кружки по математике для школьников 1–11 классов Москвы и Московской области; для учащихся 9–11 классов организованы еще и лекции.

На заочное отделение принимают учащихся из России, стран СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. В 2010 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2010/11 учебный год в 8–10 классы.

Обучение на заочном отделении Малого мехмата осуществляется по переписке: школьники выполняют задания по высылаемым им методическим разработкам и отправляют свои решения для проверки. Преподаватели, проверяющие работы, указывают на ошибки в рассуждениях или вычислениях и дают указания, помогающие школьникам самостоятельно исправить эти ошибки. После проверки работы отсылаются обратно. Методические разработки заочного отделения содержат необходимый для изучения данной темы теоретический материал и решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения.

На заочном отделении существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего школьного преподавателя и может включать не более 15 учащихся из одной параллели (если учащихся, желающих заниматься, больше, то можно сформировать несколько групп). Как правило, группы изучают материалы методических разработок во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как *один учащийся*, т.е. оформляет по каждому заданию одну работу.

Школьники, прошедшие полный курс обучения (трех- или четырехлетний) и успешно закончившие обучение на заочном отделении (с итоговой оценкой «хорошо» или «отлично»), получают свидетельства об окончании Малого мехмата. Школьники, прошедшие неполный курс обучения или закончившие заочное отделение с оценкой «удовлетворительно», получают справки об окончании Малого мехмата.

Обучение на заочном отделении *бесплатное*, за исключением почтовых расходов (если таковые имеются).

Условия приема

Зачисление индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе,* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы.

Ученики, желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата, должны *не позднее 30 апреля 2010 года* выслать в наш адрес письмом или по электронной почте решения задач вступительной работы. Для разных классов предусмотрены задачи с разными номерами, но при этом они не обязательно должны быть решены все. Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. Записывать решения в тетрадь следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради следует наклеить лист бумаги со следующими данными:

1. Фамилия, имя, отчество учащегося
2. Класс *(в 2010/11 учебном году)*
3. Полный домашний адрес *с указанием почтового индекса*
4. Адрес электронной почты (если он у вас есть)
5. Телефон (с кодом города)
6. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» *не нужно* выполнять вступительную работу, необходимо лишь *не позднее*

15 сентября 2010 года выслать письмом или по электронной почте следующие данные:

1. Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2. Фамилии, имена, отчества учащихся (не более 15 человек)
3. Класс *(в 2010/11 учебном году)*
4. Полный адрес руководителя группы (по которому будут высылаться задания*) с указанием почтового индекса*
5. Адрес электронной почты (если он есть)
6. Телефон (с кодом города)
7. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение.

Наш адрес: 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, мехмат, ММMФ.

Электронная почта: zaoch.mmmf@gmail.com

Сайт: http://mmmf.math.msu.su

Телефон: (495) 939–39–43.

Вступительная работа

После номера каждой задачи в скобках указано, для поступающих в какие классы она предназначена.

1 (8). В некотором городе каждый одиннадцатый математик – музыкант, а каждый тринадцатый музыкант – математик. Кого в городе больше – музыкантов или математиков?

2 (8). Докажите, что для любого натурального k число $k^3 + 5k$ делится на 3.

3 (8–10). Разрежьте квадрат на: а) 6 квадратов; б) 7 квадратов.

4 (8–10). Леня и Паша спускаются по движущемуся вниз эскалатору, не пропуская ступенек. Паша успевает сделать три шага, пока Леня делает два. Паша, пока спускался, успел сделать 45 шагов, а Леня только 40. Сколько ступенек в видимой части эскалатора?

5 (8–10). Внутри равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и угол B равен $100°$, отмечена точка M так, что угол MAB равен $20°$, угол MBA равен $10°$. Вычислите угол BMC.

6 (8–10). У капитана Смоллетта двое сыновей и несколько дочерей. Если возраст капитана (конечно, ему меньше ста лет) умножить на количество его детей и на длину его шхуны (это целое число футов), то получится 32118. Сколько лет капитану Смоллетту, сколько у него детей и какова длина его корабля?

7 (8–10). Делится ли $2^{62}+1$ на $2^{31}+2^{16}+1$?

8 (8–10). Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади треугольника.

9 (9–10). Решите уравнение $\left(x^2-x+1\right)^4-10x^2\left(x^2-x+1\right)^2+9x^4=0$.

10 (9–10). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Докажите, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне AB.

11 (9–10). Квадратный трехчлен с целыми коэффициентами ax^2+bx-5 имеет два различных целых корня. Найдите a и b.

12 (9–10). В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов. После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т.п. не было). При этом партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее количество мест в парламенте она может получить?

Заочная школа «Юный математик»

Заочная школа «Юный математик», работающая при поддержке Всероссийской заочной многопредметной школы (ОЛ ВЗМШ) и Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО), объявляет набор на 2010/11 учебный год учащихся из России, стран СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. В школе «Юный математик» обучаются школьники 8–11 классов. Обучение проводится заочно — как по переписке, так и с использованием интернет-технологий. В рамках школы организовано три потока:

- поток «элементарная математика» по программе углубленного изучения школьного курса математики (для 8–11 классов); тематика этого потока приближена к школьной программе, хотя на нем представлены и методические разработки, посвященные олимпиадным задачам и темам, почти не рассматриваемым в школе;
- одногодичный поток «ГИА» по подготовке к Государственной итоговой аттестации (для 9 класса);
- одногодичный поток «ЕГЭ» по подготовке к Единому государственному экзамену (для 11 класса).

На потоке «ЕГЭ» учащимся предлагаются на выбор две программы: стандартная и повышенной сложности. Выбрать наиболее подходящую программу можно при помощи диагностической работы, размещенной на сайте школы, или же просто исходя из того, какой уровень подготовки вам требуется.

Зачисление на поток «элементарная математика» конкурсное, по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы. На потоки «ГИА» и «ЕГЭ» принимаются все желающие.

После зачисления каждый учащийся получает комплект методических пособий, по которым он в течение года будет выполнять в письменном виде контрольные задания и высылать их на проверку каждые 20–30 дней. Преподаватели, проверяющие задание, укажут на допущенные ошибки и дадут подробные указания к нерешенным задачам, после чего проверенная работа будет выслана обратно. По завершении полного курса обучения выдается свидетельство об окончании Заочной школы «Юный математик».

В Заочной школе «Юный математик» имеется возможность обучения нескольких учеников по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего преподавателя (обычно – школьного учителя) и может включать не более 15 учащихся из одной параллели. Как правило, группы изучают материалы методических разработок во время факультативных (кружковых) занятий. Группы «Коллективный ученик» зачисляются в школу «Юный математик» без конкурса.

Обучение в школе «Юный математик» платное. Стоимость обучения для индивидуальных учащихся не превышала в 2009/10 учебном году 5000 руб. за годовой курс (ученики потока «элементарная математика», наиболее успешно написавшие вступительную работу, зачисляются на бесплатное или льготное обучение); для коллективных учащихся стоимость обучения зависит от числа учеников.

Ученики 7–10 классов, желающие поступить в Заочную школу «Юный математик», должны выслать в наш адрес обычным письмом заполненную анкету либо же заполнить ее на сайте «Юного математика». При отправке анкеты обычной почтой заполняйте ее печатными буквами.

Анкета учащегося

1. Фамилия, имя, отчество
2. Класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2010 года (с 8 по 11)
3. Полный домашний адрес с указанием индекса
4. Адрес электронной почты (если есть)
5. Домашний телефон с кодом города
6. Источник, из которого вы узнали о наборе в школу «Юный математик»
7. Укажите потоки, на которых вы хотите учиться:
 - «Элементарная математика»
 - «ГИА» (только для поступающих в 9 класс)
 - «ЕГЭ» (только для поступающих в 11 класс)
8 (только для подающих заявку на поток «ЕГЭ»). Укажите выбранную вами программу:
 - стандартная
 - повышенной сложности
9. Адрес вашей школы
10. Фамилия, имя, отчество вашего учителя математики (можно указать нескольких учителей).

Для зачисления на поток «элементарная математика» необходимо выполнить приведенную ниже вступительную работу (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Записывать решения следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе. Победители и призеры региональных, городских или районных математических олимпиад принимаются *без выполнения вступительной работы* — вместо нее достаточно выслать копию диплома.

Вступительную работу вместе с анкетой нужно выслать обычной почтой либо загрузить через сайт «Юного математика» *не позднее 30 апреля 2010 года*. При отправке работы обычной почтой заполненную анкету следует наклеить на обложку тетради. Вступительные работы обратно не высылаются.

Если вы поступаете только на потоки «ГИА» или «ЕГЭ», то вы должны выслать анкету *не позднее 1 июля 2010 года*. Выполнять вступительную работу для поступления на потоки «ГИА» или «ЕГЭ» не требуется.

Группам «Коллективный ученик» вступительную работу выполнять также *не нужно*, достаточно лишь *не позднее 15 сентября 2010 года* выслать обычным письмом заполненную анкету либо же заполнить ее на сайте «Юного математика». При отправке анкеты обычной почтой заполняйте ее печатными буквами.

Анкета группы «Коллективный ученик»

1. Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2. Класс, в котором члены группы будут учиться с 1 сентября 2010 года (с 8 по 11; в составе одной группы могут быть учащиеся только из одной параллели)
3. Полный почтовый адрес руководителя группы (по которому следует высылать задания) с указанием индекса
4. Адрес электронной почты (если есть)
5. Домашний телефон руководителя группы (с кодом города) или телефон школы
6. Источник, из которого вы узнали о наборе в Заочную школу «Юный математик»
7. Укажите потоки, на которых ваша группа будет учиться:
 - «Элементарная математика»
 - «ГИА» (только для поступающих в 9 класс)
 - «ЕГЭ» (только для поступающих в 11 класс)
8. Фамилии, имена, отчества учащихся в алфавитном порядке (не более 15 человек).

Наш почтовый адрес: 119002 Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО, Заочная школа «Юный математик».
Телефон: (499) 241-89-79.
Сайт: http://zaoch.ru

Вступительная работа

После номера каждой задачи в скобках указано, для поступающих в какие классы она предназначена. За решения задач для других классов баллы не начисляются!

1 (8–9). Вверх по реке шел катер. В полдень за борт упала бочка. В час дня пропажу на катере заметили и повернули обратно. В котором часу катер догонит бочку, если скорость катера постоянна?

2 (8–9). Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1; один из острых углов треугольника равен 15°. Найдите гипотенузу.

3 (8–9). За 18 дней брусок мыла уменьшился на 50% по высоте, на 30% по длине и на 20% по ширине. На сколько еще дней его хватит, если каждый день расходуется один и тот же объем мыла?

4 (8–9). В отаре 8 овец. Первая съедает копну сена за 1 день, вторая — за 2 дня, и так далее; восьмая — за 8 дней. Кто быстрее съест копну сена: первые две овцы или все остальные?

5 (8–9). Средний возраст одиннадцати футболистов — 22 года. Во время игры один из игроков был удален с поля, после чего средний возраст оставшихся игроков стал равен 21 году. Сколько лет удаленному футболисту?

6 (8–11). В треугольнике ABC угол B равен 120°. На биссектрисе угла B выбрана точка D так, что $BD = AB + BC$. Докажите, что треугольник ACD равносторонний.

7 (8–11). Три простых числа p_1, p_2, p_3, каждое из которых больше трех, таковы, что $p_1 - p_2 = p_2 - p_3$. Докажите, что $p_1 - p_2$ делится на 6 без остатка. (Напомним, что *простым* называется натуральное число, имеющее ровно два делителя – единицу и само себя.)

8 (8–11). В скачках принимали участие три лошади. На победу первой лошади ставки принимались из расчета 4:1 (это значит, что если первая лошадь побеждает, то игроку возвращаются поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; если лошадь не побеждает, то игрок теряет поставленные деньги), на победу второй лошади – 3:1, на победу третьей – 1:1. Можно ли так распределить ставки, чтобы при любом исходе скачек оказаться в выигрыше?

9 (8–11). В фильме «Самогонщики» три друга гонят самогон. У Труса течет жидкость крепостью a% и стандартная бутыль наполняется за a часов. У Балбеса течет жидкость крепостью b% и такая же бутыль наполняется за b часов; у Бывалого – c% и c часов соответственно. Для ускорения процесса друзья направили трубки аппаратов в одну бутыль и наполнили ее за сутки. Найдите крепость полученной смеси.

10 (8–11). Нарисуйте все различные развертки куба. Развертки считаются различными, если их нельзя совместить при помощи поворота или отражения.

11 (10–11). Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$.

12 (10–11). Решите уравнение $x^3 + \frac{1}{x^3} = 5\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

13 (10–11). В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 9$, $BC = 8$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точку A, касается стороны BC в точке D и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF.

14 (10–11). Постройте график функции $y = \left|\frac{3}{|x-3|} - 3\right|$ и определите, при каких значениях a уравнение $\left|\frac{3}{|x-3|} - 3\right| = a$ имеет ровно два корня.

15 (10–11). Прямоугольник $m \times n$ (m, n — натуральные числа) разбит на квадратные клетки со стороной 1. Сколько таких клеток пересекает диагональ прямоугольника? (Диагональ *пересекает* клетку, если она проходит хотя бы через одну ее внутреннюю точку.)

Пока горит свеча... или кристалл

(Начало см. на с. 31)

сеть только от температуры его стенок, и поэтому, затвердевая, парафин будет отдавать каждую минуту такое же количество теплоты, как и вода, т.е. $q_в$. Можно считать, что затвердевание парафина в нашем опыте продолжалось в течение интервала времени $t_з = 120$ мин. Тогда для удельной теплоты плавления парафина $\lambda_п$ получим

$$\lambda_п = \frac{q_в t_з}{m_п} = \frac{m_в}{m_п} c_в r_в t_з \approx 640 \text{ кДж/кг}.$$

К сожалению, справочники указывают для $\lambda_п$ величину от 200 до 220 кДж/кг, что может означать неправильность сделанного нами допущения – пренебрежения процессами конвекции. Очевидно, что в стакане с водой процессы конвекции гораздо более существенны для теплообмена, чем в меде и жидком парафине. Поэтому удельную теплоту плавления парафина лучше вычислять, используя кривую остывания меда, а не воды. Из рисунка следует, что в диапазоне температур от 62 до 58 °С мед массой 253 г, имеющий удельную теплоемкость $c_м = 2400$ Дж/(кг·°С), остывает со скоростью $r_м = 0{,}45$ °С/мин. Поэтому

$$\lambda_п = \frac{m_м}{m_п} c_м r_м t_з \approx 210 \text{ кДж/кг}.$$

Полученная оценка $\lambda_п$ очень близка к табличным значениям, что подтверждает сделанные нами предположения.

Относительно большие значения удельной теплоты плавления и удельной теплоемкости парафина (2,2 – 2,9 кДж/(кг·°С)) делают его очень ценным строительным материалом, так как он может хорошо сохранять тепло. Парафин добавляют в сухую штукатурку, днем он слегка расплавляется, а ночью отвердевает, возвращая тепло. Эти свойства парафина используются также для термостабилизации электроники космических кораблей. В будущем парафин планируется использовать в качестве топлива космических кораблей с так называемым гибридным двигателем, у которого окислитель находится в газообразном виде, а топливо – в твердом. Опыты показали, что при горении мелких гранул парафина в струе кислорода его удельная теплота горения может увеличиваться в несколько раз. Однако основным преимуществом парафина перед существующими видами топлива является его безопасность и безвредность для окружающей среды – ведь при горении образуется только углекислый газ и вода. Безвредность парафина для человека обусловила его широкое применение в пищевой промышленности.

Итак, мы еще раз доказали справедливость слов М.Фарадея – изучая свечу, изучаешь физику.

К.Богданов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2009 г.)

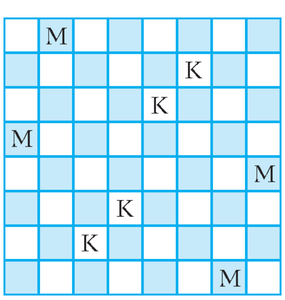


Рис. 1

1. См. рис. 1.

2. 1.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – все делители числа A, кроме самого A, а $b_1, \ldots, b_m$ – все делители числа B, кроме самого B. Тогда $A = b_1 + \ldots + b_m$ и $B = a_1 + \ldots + a_n$. По условию, имеем два равенства: $\alpha = \frac{1}{A} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} - 1$, $\beta = \frac{1}{B} + \frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_m} - 1$. Приведем все дроби, стоящие в правой части первого равенства, к одному знаменателю A. В числителе полученной дроби окажется сумма всех делителей числа A (почему?). Получаем

$$\alpha = \frac{a_1 + \ldots + a_n + A}{A} - 1 = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{A} = \frac{B}{A}.$$

Аналогично найдем $\beta = \frac{A}{B}$. Отсюда следует, что $\alpha\beta = 1$.

3. 49.

Рассмотрим маршрут, в котором каждая дорога пройдена ровно один раз. Пусть этот маршрут начинается в городе A и заканчивается в городе B. В каждый город, за исключением, возможно, A и B, мы попадали столько же раз, сколько покидали его, – всего четное число раз, поэтому хотя бы один раз прилетали в него или улетали из него. Тогда количество перелетов не меньше чем $\frac{100-2}{2} = 49$.

Докажем, что 49 перелетов всегда достаточно. Пусть города и дороги расположены так, что они образуют m изолированных областей, между которыми дорожного сообщения нет (но в одной области можно попасть из любого города в любой, двигаясь по дорогам). Поскольку из каждого города выходит хотя бы одна дорога, то в каждой области не меньше двух городов, а областей не больше 50. Обозначим эти области $O_1, \ldots, O_m$. Выберем в каждой области O_i любые два города A_i и B_i. Объясним теперь, как построить нужный нам маршрут, в котором город A_1 будет его началом, а город B_m – концом. Сначала для каждого i от 1 до $m - 1$ соединим соседние области O_i и O_{i+1} перелетом из B_i в A_{i+1} (всего понадобится $m - 1$ перелетов). Городов, которые мы пока никак не обозначили, осталось $100 - 2m$. Разобьем их как-