

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1-2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2161» или «Ф2168». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2161, M2162, M2163,а, M2164,а, M2166 и M2167 предлагались на XXXI Турнире городов, задача M2165 – на Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи M2161–M2168, Ф2168–Ф2174

M2161. 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей.)

Е.Горинов

M2162. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем *хорошим*. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. За какое наименьшее количество попыток можно с гарантией открыть сейф?

Д.Баранов

M2163. Найдите все такие натуральные числа a и b , что:
а) $(a + b^2)(b + a^2)$ является точной степенью двойки;
б) $(a + b^3)(b + a^3)$ является точной степенью тройки.

В.Произволов

M2164. а) На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов $n \times n$ клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше чем n^2 .

б) На прямоугольный лист бумаги положили 2009 одинаковых единичных квадратов, стороны которых

параллельны краям листа. Затем закрасили все области, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что площадь закрашенной части листа не меньше 1.

И.Пак, Ю.Рабинович

M2165. К двум окружностям ω_1 и ω_2 , пересекающимся в точках A и B , проведена их общая касательная CD (C и D – точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD , чем A). Прямая, проходящая через A , вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P . Докажите, что прямая PB симметрична медиане треугольника KPL , проведенной из вершины P , относительно биссектрисы угла KPL .

Ю.Блинков

M2166. Обозначим через $[k]!$ произведение $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \dots \cdot \underbrace{11\dots11}_k$ – всего k сомножителей. Докажите, что число $[n + m]!$ делится на произведение $[n]! \cdot [m]!$.

М.Берштейн

M2167*. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим.

Фольклор (предложил А.Шаповалов)

М2168*. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω . Пусть R_1 – радиус окружности, касающейся отрезков AB , AD и окружности ω , R_2 – радиус окружности, касающейся отрезков CB , CD и окружности ω . Проводятся всевозможные дуги окружности BD , разбивающие четырехугольник на два криволинейных треугольника. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти криволинейные треугольники, не зависит от выбора дуги BD тогда и только тогда, когда $R_1 = R_2$.

А.Заславский

Ф2168. На Венере странная атмосфера – она простирается до высоты 10 км и обладает практически постоянной плотностью. Отпустим мячик с высоты 5 м – он упадет на поверхность через 1 секунду. С высоты 50 м он падает 3,5 с, с высоты 100 м – 5,5 с. Сколько времени он будет падать с высоты 200 м? Оцените, с какой скоростью он движется в этом случае непосредственно перед падением.

А.Простов

Ф2169. На гладком горизонтальном столе находится груз массой M , к нему привязаны легкие нити, к свободным концам нитей прикреплены грузы массами $2M$ и $M/2$. Нити переброшены через неподвижные, расположенные горизонтально пальцы так, что один кусок каждой нити горизонтален, а другой – вертикален. Вначале груз на плоскости удерживают, затем отпускают. При этом пальцы начинают двигать навстречу друг другу по горизонтали, каждый с ускорением $a = g/7$. Найдите ускорение груза массой M сразу после начала движения.

Р.Пальцев

Ф2170. В два стакана налили одинаковые количества воды – в первый горячую при $+70^\circ\text{C}$, во второй холодную при $+20^\circ\text{C}$. Ложку горячей воды перелили в холодную и перемешали. Температура воды в этом стакане оказалась $+25^\circ\text{C}$. Перелили ложку этой воды обратно в стакан с горячей водой и перемешали. Какой стала температура в горячем стакане? Сколько раз нужно повторить этот процесс (переливание туда и обратно с перемешиванием), чтобы разность температур в стаканах стала меньше одного градуса? Теплоемкостью стаканов и ложки можно пренебречь. Теплообмен с окружающей средой не учитывать.

А.Повторов

Ф2171. Три одинаковых резистора соединены последовательно, батарейка напряжением 6 В подключена к концам этой цепочки. Два одинаковых вольтметра подключены так, как показано на рисунке 1. Один из приборов показывает 3 В. Что показывает второй прибор? Что он будет показывать, если первый вообще отключить от схемы? Показания приборов считать точными, вольтметры – неидеальными.

З.Приборов

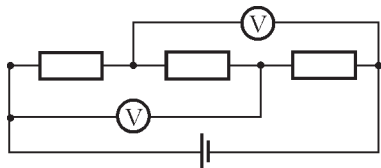


Рис. 1

Ф2172. В глубинах космоса, вдали от всех других тел, висит неподвижно тонкостенная непроводящая сфера радиусом R и массой M . По ее поверхности равномерно «размазан» заряд Q . Издали на сферу налетает очень маленький шарик массой m , заряженный таким же зарядом Q . Начальная скорость шарика равна v_0 и направлена в центр сферы, а в стенках сферы сделаны две маленькие дырки так, чтобы шарик, при большой его скорости, мог проскочить сквозь сферу. Сколько времени шарик летит внутри сферы?

З.Рафаилов

Ф2173. Пружинный маятник состоит из легкой пружины жесткостью k и висящего на ней груза массой M . Вначале система неподвижна (груз в равновесии). В некоторый момент точку подвеса начинают двигать вниз с постоянной скоростью v_0 . Найдите максимальную длину пружины при таком движении. В нерастянутом состоянии пружина имеет длину L .

А.Зильберман

Ф2174. Очень большое количество одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием F расположены на одинаковых расстояниях l друг от друга так, что главные оптические оси всех линз совпадают. Расстояние l много меньше фокусного расстояния F . На первую линзу перпендикулярно ее плоскости падает луч света (рис. 2). Постройте дальнейший ход этого луча. Найдите расстояние между точками, в которых луч в третий и в четвертый раз пересекает главную оптическую ось.¹

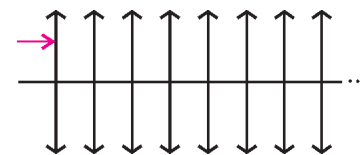


Рис. 2

С.Муравьев

Решения задач М2139–М2145, Ф2153–Ф2159

М2139. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких что произведение двух из них равно третьему?

Ответ: можно. Приведем один из возможных вариантов такой раскраски. Пусть $p_1 < p_2 < \dots < p_{2008}$ – простые числа. Построим множества $A_1, A_2, \dots, A_{2009}$ по следующему правилу. В A_1 включим все натуральные числа, делящиеся на p_1 ; в A_2 – все натуральные числа, делящиеся на p_2 , но не делящиеся на p_1 ; в A_3 – все натуральные числа, делящиеся на p_3 , но не делящиеся на p_1 и на p_2 ; ...; в A_{2008} – все натуральные числа, делящиеся p_{2008} , но не делящиеся ни на одно из чисел $p_1, p_2, \dots, p_{2007}$. Наконец, в A_{2009} включим все остальные натуральные числа.

Тогда для любых чисел $x \in A_k, y \in A_n$, где $k < n$, их произведение принадлежит множеству A_k , поэтому

¹ При решении этой задачи советуем ознакомиться с задачей Ф193 из «Задачника «Кванта». (Прим. ред.)

при таком разбиении натуральных чисел на множества не удастся найти разноцветную тройку чисел, произведение двух из которых равно третьему числу.

Н.Агаханов

M2140. Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

Ответ: 47 прыжков.

Разделим доску на четыре квадрата 4×4 . Заметим, что если ладья прыгает через забор, то либо начальная, либо конечная клетка прыжка закрашена цветом – голубым или розовым – на рисунке 1. Так как закрашенных клеток 24 и через каждую может проходить максимум два прыжка, то всего может оказаться не более 48 прыжков. При этом, если их ровно 48, то из каждой закрашенной клетки должно быть сделано два прыжка в незакрашенные клетки (в предыдущем подсчете прыжок из закрашенной клетки в закрашенную будет подсчитан два раза!). Тогда все ходы из голубых клеток будут вести в белый квадрат под диагональю, а оттуда – только в голубые клетки (либо в другие клетки этого же квадрата). Значит, подобным образом ладья никогда не попадет в розовые клетки. Противоречие. Таким образом, количество прыжков не превосходит 47.

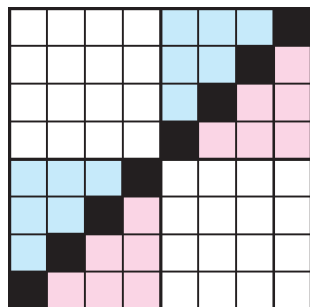


Рис. 1

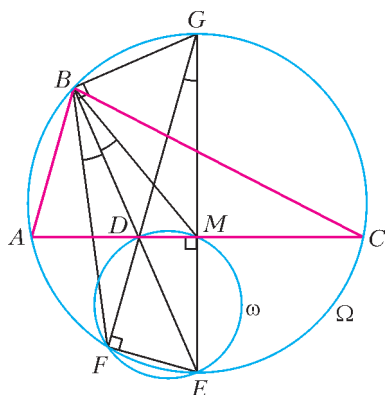
Один из возможных примеров с 47 прыжками показан на рисунке 2 (числа в клетках указывают, в каком порядке ладья по ним проходит).

	1	7	15	37	25	31	
	3	5	17	39	27		4
	11	9	13	41		12	10
	23	21	19		24	22	20
43	45	47		42	44	46	48
33	35		18	36	34	32	
29		8	16	38	28	30	
	2	6	14	40	26		

Рис. 2

Р.Женодаров

M2141. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω , описанную около треугольника ABC , в точках B и E . Окружность ω , построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F . Докажите,



что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD , содержит медиану треугольника ABC .

Пусть M – середина стороны AC (см. рисунок). Так как дуги AE и CE равны, то ME – серединный перпендикуляр к отрезку AC . Поскольку $\angle DME = 90^\circ$, то M лежит на окружности ω . Пусть прямая DF пересекает вторично окружность Ω в точке G . Так как $\angle DFE = 90^\circ$, то G – точка, диаметрально противоположная точке E , в частности EG проходит через M . Имеем $\angle FBE = \angle FGE$.

Далее, поскольку EG – диаметр, $\angle GBE = 90^\circ$. Из равенств $\angle GBD = \angle GMD = 90^\circ$ вытекает, что $GBDM$ – вписанный четырехугольник (в окружность с диаметром DG), откуда $\angle MBE = \angle MBD = \angle MGD = \angle EGF$. Окончательно, $\angle FBE = \angle FGE = \angle MBE$, что и требовалось установить.

Л.Емельянов, П.Кожевников

M2142. Сколько раз функция

$$f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2009}$$

меняет знак на отрезке $\left[0; \frac{2009\pi}{2}\right]$?

Ответ: 75 раз.

Обозначим $n = 2009$. Рассмотрим функцию $\cos \frac{x}{k}$. Она меняет знак при

$$x = k \left(\pi m + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{k(2m+1)\pi}{2},$$

где m – произвольное целое число. Значит, нулями функции $f(x)$ на отрезке $\left[0; \frac{2009\pi}{2}\right]$ могут являться только точки $x_i = \frac{\pi i}{2}$, где $1 \leq i \leq n$. Тогда менять знак она может лишь в точках x_i при $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Функция $\cos \frac{x}{k}$ меняет знак в точке x_i , если $i = k(2m+1)$ при целом m . Значит, количество косинусов, которые меняют знак в точке x_i , совпадает с количеством нечетных делителей числа i . Поэтому функция $f(x)$ будет менять знак в тех и только тех точках x_i , для которых у числа i нечетное количество нечетных делителей. Представим $i = 2^l j$, где l целое, а j нечетно. Тогда количество нечетных делителей у чисел i и j совпадает. Но у нечетного числа j количество делителей нечетно тогда и только тогда, когда j – это точный квадрат (действительно, если j не квадрат, то все его делители разбиваются на пары a и $\frac{j}{a}$; если же $j = s^2$, то число s – единственное оставшееся без пары).

В итоге получаем, что функция $f(x)$ меняет знак в точке x_i , если число i – либо квадрат, либо удвоенный квадрат (в зависимости от четности числа l). Но среди чисел от 1 до $n-1$ есть $\left[\sqrt{n-1}\right]$ квадратов и $\left[\sqrt{\frac{n-1}{2}}\right]$ удвоенных квадратов. Значит, искомое количество равно $\left[\sqrt{n-1}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-1}{2}}\right] = 44 + 31 = 75$.

Замечание. Выражение «функция $f(x)$ меняет знак в точке x_0 » не вполне корректно даже в том случае, когда функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Например, можно ли сказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

меняет знак в точке $x_0 = 0$? Однако для тригонометрической функции из условия данной задачи подобных трудностей не возникает.

Б.Трушин

M2143. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

Применим индукцию по N . Утверждение задачи очевидно при $N = 1$ и $N = 2$. Пусть Γ_1 – множество городов, из которых исходит одна дорога, а Γ – множество остальных городов. Начав движение по различным дорогам из некоторого города, согласно условию, мы не сможем попасть дважды в один и тот же город, поэтому когда-нибудь мы закончим движение в городе из множества Γ_1 . Это означает, что множество Γ_1 непусто. Ясно, что при $N \geq 3$ множество Γ непусто, и в нем меньше чем N городов.

Назовем *значимостью* мэра количество городов, соседних с городом, где он работает. По условию значимость каждого мэра после реформы не уменьшилась. В частности, мэр города, принадлежащего множеству Γ , после реформы стал мэром некоторого города из множества Γ , т.е. в результате реформы в городах множества Γ тоже произошла перестановка мэров. Ясно, что из любого города $A \in \Gamma$ можно доехать до любого другого города $B \in \Gamma$, не заезжая в города множества Γ_1 .

Поэтому множество городов Γ и реформа, рассмотренная только на городах из Γ , удовлетворяет условию задачи. Применив предположение индукции, получаем, что в множестве Γ либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами, что и требовалось.

Замечание. Переформулировка данной задачи на языке теории графов звучит так: «Докажите, что любой автоморфизм дерева имеет неподвижную вершину или неподвижное ребро».

В.Дольников

M2144. По кругу стоят 100 наперстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого их возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней наперстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

Ответ: за 33 хода.

После каждого нашего хода и перемещения монетки будем передвигать все наперстки (вместе с монеткой) по ходу часовой стрелки на одну позицию. Тогда будем считать, что после каждого хода монетка либо остается на месте, либо перемещается на две позиции по часовой стрелке, а наперстки остаются на своих местах.

Покрасим все наперстки поочередно в белый и черный цвета и пронумеруем наперстки каждого цвета по порядку против часовой стрелки числами от 0 до 49. Понятно, что цвет наперстка, под которым лежит монетка, не изменяется, а номер либо не изменяется, либо уменьшается на 1 по модулю 50.

Покажем, как найти монетку за 33 хода. Описывая алгоритм, предполагаем, что монетка не обнаружена на всех ходах вплоть до 33-го (в противном случае все уже сделано менее чем за 33 хода). Первым ходом поднимем черные наперстки с номерами 0, 1, 2, 3. Тогда после перемещения монетка не сможет оказаться под черными наперстками 0, 1, 2. Вторым ходом поднимем черные наперстки 3, 4, 5, 6. Тогда после перемещения монетка не сможет оказаться под черными наперстками 0, 1, ..., 5. Действуем так и далее: при $s = 1, 2, \dots, 16$ ходом номер s поднимем черные наперстки с номерами $3s - 3, 3s - 2, 3s - 1, 3s$. Тогда после перемещения монетка не сможет оказаться под черными наперстками 0, 1, ..., $3s - 1$. Семнадцатым ходом поднимем черные наперстки 48 и 49, а также белые наперстки 49 и 0. Теперь мы знаем, что под черными наперстками нет монетки, а также что после перемещения монетка не сможет оказаться под белым наперстком 49. При $s = 1, 2, \dots, 15$ ходом номер $17 + s$ поднимем белые наперстки $3s - 3, 3s - 2, 3s - 1, 3s$. Тогда после перемещения монетка не сможет оказаться под белыми наперстками 49, 0, 1, ..., $3s - 1$. Наконец, последним, 33-м ходом поднимаем белые наперстки 45, 46, 47, 48; под одним из них обязана быть монетка.

Докажем, что с гарантией обнаружить монету за 32 хода невозможно. Обозначим через B_k множество из четырех наперстков, поднимаемых на k -м ходе, а через A_k – множество наперстков, про которые перед выполнением k -го хода (после возможного перемещения монетки на $(k - 1)$ -м ходе) точно известно, что под ними нет монетки. Предполагаем, что, пока возможно, под наперстками из B_k нет монетки. Ясно, что $A_{k+1} \subset A_k \cup B_k$ при $k = 1, 2, \dots, n - 1$, откуда $|A_{k+1}| \leq |A_k| + 4$ (здесь и далее через $|X|$ обозначаем количество элементов в множестве X). Более того, если множество $A_k \cup B_k$ не совпадает с множеством всех наперстков или с множеством из 50 наперстков одного цвета, то найдется такая пара одноцветных наперстков

Обозначим импульсы монет $\vec{p}_0$, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. Тогда, согласно закону сохранения импульса,

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Это означает, что импульсы (векторы) образуют треугольник. Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{p_0^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m},$$

или

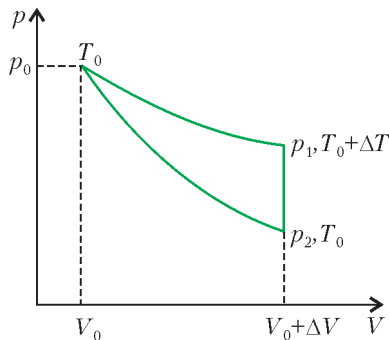
$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

Таким образом, треугольник получается прямоугольным.

А.Простов

Ф2155. Моль гелия находится в сосуде под поршнем при нормальных условиях. С газом проводят замкнутый процесс. В первой части процесса газ расширяется, при этом теплоемкость его остается постоянной и равной $C = 100$ Дж/К, затем газ охлаждают до начальной температуры при неизменном объеме и, наконец, изотермически сжимают до начального объема. В первой части процесса газ получил количество теплоты $Q = 1$ Дж. Найдите работу газа в этом процессе.

Переданная порция тепла очень мала, цикл на p - V -диаграмме (см. рисунок) очень похож на крошечный



треугольник. Мы будем вычислять площадь этой фигуры – работу в цикле, – пренебрегая кривизной сторон этого «треугольника».

Изменение температуры в первой части процесса равно

$$\Delta T = \frac{Q}{C} = 0,01 \text{ К}.$$

На этом участке

$$Q = A + \Delta U, \text{ или } Q = p_0 \Delta V + C_V \Delta T,$$

откуда

$$\Delta V = \frac{Q - C_V \Delta T}{p_0} \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Площадь треугольника – работа в цикле – равна

$$A = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \Delta V.$$

Изменение объема ΔV мы уже знаем, а разность

давлений $p_1 - p_2$ найдем из следующих соотношений:

$$p_2 = p_0 \frac{V_0}{V_0 + \Delta V} \approx p_0 \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0} \right);$$

$$p_0 V_0 = RT_0, \quad p_1 (V_0 + \Delta V) = R(T_0 + \Delta T),$$

$$\text{откуда } p_1 = p_0 \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0} + \frac{\Delta T}{T_0} \right);$$

$$p_1 - p_2 = p_0 \frac{\Delta T}{T_0} \approx 3,7 \text{ Па}.$$

Окончательно,

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot 3,7 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

А.Теплов

Ф2156. Производят расчет «атома водорода», в котором минимальное расстояние между протоном и электроном составляет $d = 1$ мкм, а максимальное в 3 раза больше. Какой будет максимальная скорость электрона в таком «атоме»?

При минимальном расстоянии между ядром (протоном) и электроном скорость электрона максимальна, а при максимальном расстоянии – минимальна, причем она меньше максимальной в 3 раза (можно сослаться на второй закон Кеплера – не зря ведь школьникам говорят про планетарную модель атома, а можно применить и закон сохранения момента импульса). Тогда из закона сохранения энергии получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{kq^2}{d} = \frac{m(v/3)^2}{2} - \frac{kq^2}{3d}.$$

Отсюда найдем максимальную скорость v электрона:

$$v = \sqrt{\frac{3kq^2}{2dm}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} \approx 20 \text{ км/с}.$$

Конечно, это относится только к описанному в условии «атому».

Р.Александров

Ф2157. Коаксиальный кабель состоит из центральной жилы диаметром $d = 1$ мм и проводящей оплетки диаметра $D = 5$ мм. Пространство между жилой и оплеткой заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$. Найдите емкость и индуктивность в расчете на 1 м для такого кабеля, а также величину волнового сопротивления – при подключении резистора такой величины к концу куска кабеля не происходит отражения электромагнитной волны, бегущей вдоль него.

Найдем емкость кабеля – точнее, куска длиной l очень длинного кабеля. Зарядим центральную проводящую жилу и оплетку равными по величине и противоположными по знаку зарядами $q = \rho l$ и $-q$, где ρ – линейная плотность заряда. Напряженность поля в диэлектрике на расстоянии x от оси равна

$$E(x) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0\epsilon x}.$$

Разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \int_{d/2}^{D/2} E(x) dx = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{D}{d}.$$

Емкость «на 1 м длины» составляет

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\rho l}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{D}{d}} = \frac{6,28 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 1}{1,61} \text{ Ф} \approx 1 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}.$$

Индуктивность «на 1 м длины» посчитаем немного иначе – найдем магнитную индукцию в зазоре, вычислим энергию магнитного поля и приравняем ее известному выражению $W = \frac{1}{2} LI^2$. Итак, пусть по проводящей жиле течет ток I , а по оплетке – такой же ток в противоположном направлении. Тогда магнитное поле снаружи будет нулевым, а в зазоре на расстоянии x от оси (как поле бесконечного прямого провода) равным

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

Возьмем тонкий цилиндрический слой – радиус его x , толщина Δx , длина l . Энергия магнитного поля в выделенном объеме равна

$$\Delta W = \frac{B^2}{2\mu_0} \Delta V = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right)^2 (2\pi x \Delta x l).$$

Запишем энергию во всем зазоре длиной l в виде интеграла:

$$W = \int_{d/2}^{D/2} \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{D}{d}.$$

Тогда индуктивность «на 1 м длины» будет равна

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1,61}{2\pi} \text{ Гн} \approx 3,2 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

Теперь можно представить кабель в виде бесконечной LC-цепи (см. рисунок), состоящей из одинаковых звеньев – кусков по 1 м, – причем L и C мы уже вычислили. Волновое сопротивление такой цепи равно

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 55 \text{ Ом}.$$

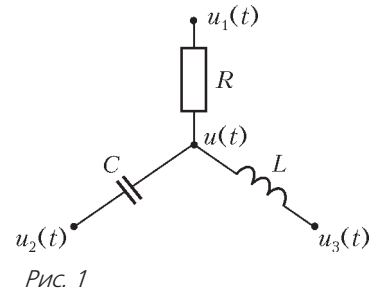
Получилось активное сопротивление – без реактивной составляющей. Кстати, если бы мы взяли куски другой длины (не слишком длинные!), то получили бы тот же ответ.

Описанный в задаче кабель почти такой же, как и обычный 50-омный кабель, используемый при передаче сигналов не слишком больших частот – единицы, десятки, даже сотни мегагерц.

А.Сложнов

Ф2158. Конденсатор емкостью $C = 10 \text{ мкФ}$, катушка индуктивностью $L = 1 \text{ Гн}$ и резистор сопротивлением $R = 300 \text{ Ом}$ соединены «звездой», а свободные выводы подключены к трем фазам сети напряжением $U = 220 \text{ В}$ и частотой $f = 50 \text{ Гц}$. Найдите напряжение в общей точке элементов по отношению к «нулевому» проводу.

Введем обозначения для напряжений точек схемы по отношению к «нулевому» проводу (рис.1): $u(t)$ – напря-



жение в общей точке, $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$ – напряжения фаз сети. Емкостное сопротивление равно

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = 318 \text{ Ом},$$

индуктивное сопротивление составляет

$$X_L = 2\pi f L = 314 \text{ Ом}.$$

Для упрощения вычислений будем считать $X_C \approx X_L \approx R$ (можно посчитать и точно – но данные в условии явно округлены, излишняя точность нежелательна, и наше приближение выглядит вполне разумным). Сумма токов, втекающих в узел – общую точку, – должна быть нулевой:

$$\frac{u_1(t) - u(t)}{R} + \frac{u_2(t) - u(t)}{X_C} + \frac{u_3(t) - u(t)}{X_L} = 0.$$

Считая $X_L = X_C = X$ и учитывая, что из-за противоположности сдвигов фаз между напряжением и током в катушке и конденсаторе $\frac{1}{X_L} = -\frac{1}{X_C}$, получим

$$u(t) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L} \right) = \frac{u_1(t)}{R} + \frac{u_2(t)}{X_C} + \frac{u_3(t)}{X_L},$$

или

$$u(t) = u_1(t) + \frac{R}{X} (u_2(t) - u_3(t)).$$

Нарисуем векторную диаграмму для эффективных значений напряжений трехфазной сети (рис.2). Вектор, изображающий разность напряжений $u_2 - u_3$, перпендикулярен вектору, изображающему напряжение u_1 , следовательно,

$$u_2 - u_3 = \sqrt{3} u_1.$$

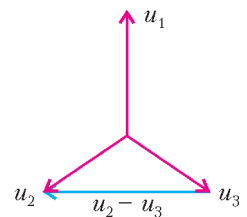


Рис. 2

С учетом сдвигов фаз на $\pi/2$ полу-

чим: слагаемое $\frac{R}{X} (u_2 - u_3)$ либо просто добавляется к u_1 , тогда $u = 220(\sqrt{3} + 1) \text{ В} \approx 600 \text{ В}$ и совпадает с u_1 по фазе, либо вычитается из u_1 , тогда $u = 220(1 - \sqrt{3}) \text{ В} \approx -160 \text{ В}$ и противофазно ему.

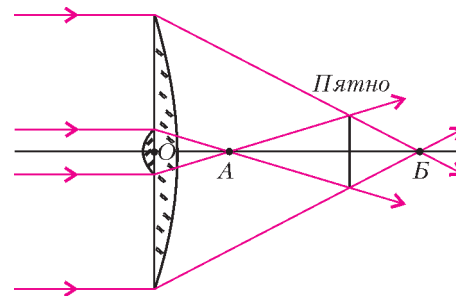
А.Зильберман

Ф2159. Экран освещен удаленным источником света. На пути светового пучка располагают линзу, склеенную из двух плосковыпуклых стеклянных линз. Диаметр первой линзы $D_1 = 5$ см, ее фокусное расстояние $F_1 = 20$ см, диаметр второй $D_2 = 1$ см, ее фокусное расстояние $F_2 = 10$ см. Линзы склеены плоскими поверхностями, плоскость склейки параллельна плоскости экрана, главные оптические оси линз совпадают. На каком расстоянии от экрана нужно расположить эту линзу, чтобы на экране получилось яркое пятно минимального диаметра? Во сколько раз освещенность в центре этого пятна больше освещенности экрана без линзы?

Будем считать линзы тонкими. Тогда (см. рисунок)

$$OB = F_1 = 20 \text{ см}, \quad OA = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} = \frac{20}{3} \text{ см}.$$

Простые геометрические расчеты дают расстояние от



линзы до экрана (пятна) равным 15 см, а диаметр пятна равным 1,25 см.

Из чертежа видно, что в центр пятна попадают лучи, прошедшие через обе линзы. Диаметр пятна в 1,25 раз больше диаметра малой линзы, тогда освещенность в центре пятна в $(1,25)^2$ раз меньше и составляет 0,64 от освещенности экрана без линзы.

З.Рафаилов

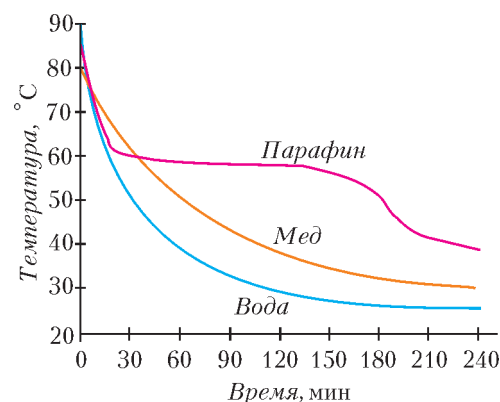
ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Пока горит свеча... или кристалл

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Обычно свечи делают из парафина – высокомолекулярного химического соединения, состоящего из атомов углерода и водорода и имеющего формулу $C_n H_{2n+2}$. Простейший парафин ($n = 1$) – это газообразный метан CH_4 . При увеличении n длина молекулы увеличивается, и парафины становятся сначала жидкостями, например октан $C_8 H_{18}$, а потом (начиная с $n = 20$) – и твердыми телами.

Из справочников можно узнать, что твердые парафины являются кристаллическими телами. Известно, что для кристаллов, в отличие от аморфных тел, характерна определенная температура плавления. Попробуйте поставить простой опыт, чтобы доказать кристаллическую природу парафина. Возьмите свечку, натрите ее на терке и заполните этой парафиновой крупой небольшой алюминиевый стакан. Поставьте стакан на конфорку плиты или на дно кастрюли с кипящей водой. Через несколько минут парафиновая крупа начнет плавиться и скоро превратится в жидкий парафин. Желательно, чтобы толщина слоя жидкого парафина в стакане составляла около 5 см, а диаметр стакана был как можно меньше, иначе охлаждение парафина может затянуться на многие часы. Для непрерывной регистрации температуры остывающего парафина вам понадобится термометр, градуированный в диапазоне от 0 до 100 °C. Так как длина такого термометра обычно около 30 см, держатель для него можно изготовить, например, из стопки книг такой же высоты, линейки и липкой ленты. Необходимо, чтобы кончик термометра находился на глубине не менее 3 см (не касаясь дна стакана), а его положение не изменялось со временем. Имейте в виду, что при застывании объем парафина уменьшается на 10–15%, при этом в центре стакана образуется довольно глубокая лунка. Опыт надо проводить в закрытом помещении и вдали от воздушных потоков. Расплавленный парафин в стакане следует осторожно поставить на стол, погрузить в него термометр и сразу же начать измерения с интервалом в 1 минуту. Со временем, когда скорость изменения температуры уменьшится, интервал можно увеличить до 2, 5 и 10 минут.



На рисунке показано, как изменяется температура 158 г парафина при его охлаждении. Видно, что температура парафина сначала резко падает, уменьшаясь от 85 до 60 °C за 15 минут, затем в течение двух часов остается практически постоянной, а потом опять начинает уменьшаться. Такая задержка в изменении температуры говорит о переходе жидкого парафина в кристаллическое состояние. Для сравнения на том же рисунке приведены графики остывания воды и меда, взятых в тех же объемах и при тех же условиях, что и парафин. Эти графики наглядно показывают, что мед и вода остывают постепенно, без временной задержки.

Попробуем, сравнивая графики остывания воды, меда и парафина, оценить удельную теплоту плавления парафина. Парафин затвердевает в диапазоне температур от 62 до 58 °C. В том же диапазоне температур вода остывает со скоростью $r_B = 10$ °C / мин. Если пренебречь испарением воды и теплоемкостью стакана, то количество теплоты, теряемое водой каждую минуту, составляет $q_B = m_B c_B r_B$, где m_B – масса воды в стакане (200 г), а c_B – удельная теплоемкость воды (4200 Дж/(кг · °C)). Это тепло через стенки стакана передается окружающей среде. Если не учитывать процесс конвекции внутри стакана, то количество теплоты, отбираемое у металлического стакана, будет зави-

(Продолжение см. на с. 60)

*Ибо наличное все непременно быть чем-нибудь должно,
Будь оно иль велико, или самых ничтожных размеров...*

Тит Лукреций Кар

Около двух миллионов молекул водорода, положенных в ряд, заняли бы миллиметр, и около 200 миллионов миллионов их весили бы один миллиграмм. Числа эти нужно рассматривать как весьма грубые приближения; они по мере усовершенствования науки будут исправлены более разнообразными и точными опытами...

Джеймс Клерк Максвелл

Эмульсия — это атмосфера в миниатюре, тяготеющая к земле. В масштабе такой атмосферы высота Альп представлялась бы несколькими микронами, а отдельные холмы стали бы равны молекулам.

Жан Батист Перрен

*Нано (от греч. *nápos* — карлик) — приставка для образования наименования дольных единиц, равных одной миллиардной доле исходных единиц.*

Большой энциклопедический словарь

А так ли хорошо знакомо вам нано...?

Вообще говоря, следовало бы ответить «конечно, да, и довольно давно» — ведь даже наш далекий предок, вымазавшись в саже, уже имел дело с содержащимися в ней наночастицами углерода. Сталкивались с подобными «крошками», причем наверняка более осознанно, и ученые, занимавшиеся тонкими порошками и коллоидными растворами. Но мало кто представлял, какие поразительные изменения в физических свойствах объектов могут происходить при их уменьшении до наноразмеров. Обнаружить эти перемены удалось совсем недавно с появлением наноприборов — особых, совершенно не похожих на привычные приборов, способных новые свойства измерять и исследовать.

Переход к таким масштабам повлек за собой открытие крайне нетрадиционного поведения частиц, проявляющего закономерности квантовой физики. А это, в свою очередь, породило новые отрасли знаний и технологий, построенные на принципиально иной, чем прежде, идеологии и на иных подходах, — наноэлектронику, наномедицину, нанофотонику, наноэнергетику... далее везде. Приставка с «карликовым» окрасом скрывает в себе целый кладезь огромных резервов, овладение которыми, как прогнозируют ученые, в весьма близком будущем преобразит весь окружающий нас мир и поможет человечеству справиться с множеством накопившихся цивилизацией проблем.

С этими перспективами вы можете ознакомиться и в публикациях нашего журнала — их внушительный список приводится, как обычно, в конце выпуска.

А пока, откликаясь на призыв Р.Фейнмана, написавшего ровно полвека назад статью «Внизу полным-полно места. Приглашение в новый мир физики», направимся на поиски нанообъектов, во множестве обитающих и вокруг нас, и, конечно же, в школьном курсе физики. Думается, их прямое или косвенное обнаружение поможет вам лучше подготовиться к постижению такой заманчивой нанонауки, таящей в себе мегавозможности.

Вопрос и задачи

1. Можно ли видеть невооруженным глазом одну десятиллионную долю грамма (т.е. 100 нанограмм) вещества?
2. Очень точное взвешивание можно произвести с погрешностью в 10 нанограмм. Сколько атомов содержится в крупинке железа массой 10 нанограмм?
3. Как оценить размеры молекул воды и спирта?
4. Если соединить 50 миллилитров воды и 50 миллилитров спирта, то объем раствора окажется меньше 100 миллилитров. Почему?
5. Оцените, во сколько раз среднее расстояние между молекулами водорода при нормальных условиях больше поперечника самой молекулы.
6. Почему при уменьшении плотности воздуха электрический разряд происходит при более низких напряжениях?
7. Чем объяснить, что вода, находящаяся в глиняном сосуде, имеет температуру ниже температуры окружающего воздуха? При каких условиях температура воды в этом сосуде будет такой же, как и окружающего воздуха?
8. В чайнике кипит вода, и мы видим выходящий из носика чайника водяной пар. Так ли это?
9. Сосуд разделен на две секции пористой перегородкой. В одной секции находится газ, состоящий из легких молекул, в другой — из тяжелых. Давления газов в начальный момент одинаковы. Через некоторое время давление в той секции сосуда, где находились тяжелые молекулы, увеличилось. Затем, через более длительный промежуток времени, давления в обеих секциях сосуда выровнялись. Как это объяснить?
10. Почему броуновские частицы должны быть относительно малыми?
11. Чтобы разорвать кусок проволоки, требуются значительные усилия. Однако если раскалить проволоку в пламени горелки, то разорвать ее намного легче. Почему?



12. Слепить фигурку из сухого песка нельзя, а из мокрого можно. Почему?

13. С помощью паяльника нельзя расплавить медные или стальные провода. Отчего же тогда удастся надежно соединить пайкой эти провода друг с другом?

14. Опытный стекольщик, после того как проведет алмазом по стеклу, смачивает царапину водой, а уже затем ломает лист. Для чего производится смачивание?

15. Известно, что в холодную погоду для растопки вместо дров используют обыкновенные красные кирпичи, вымоченные в бензине. На чем основан этот способ обогрева?

16. Если мыльную пленку расположить вертикально, то цветные полосы на ней будут со временем смещаться вниз, меняя свою ширину, а вскоре в верхней части пленки возникнет быстро увеличивающееся темное пятно, после чего пленка разорвется. Как это объяснить?

Микроопыт

Нагрейте в пламени спиртовки лезвие безопасной бритвы. Вы сможете увидеть на поверхности металла так называемые цвета побежалости – меняющуюся радужную окраску. В чем причина ее появления?

Любопытно, что...

...прочные сабли и клинки из дамасской стали научились делать еще в средние века. А вот тайна изготовления такой стали открылась совсем недавно, когда анализ ее структуры позволил обнаружить в ней углеродные нанотрубки – гигантские цилиндрические молекулы из атомов углерода, придающие материалам уникальные упругость и твердость.

...в отличие от природных алмазов, искусственно созданные наноалмазы обладают рядом особенных свойств. Так, у их наночастиц значительно выше поверхностная активность и реакционная способность (у них больше удельная поверхность). Поэтому наноалмазы ныне используют и в биологии, и в медицине в качестве адсорбентов токсичных соединений и носителей препаратов для лечебных целей.

...золото давно научились расплющивать в листки толщиной 100 нанометров, а химической обработкой доводить до толщины 10 нанометров. Однако до размеров самих атомов добраться таким образом было невозможно. И лишь с появлением электронного микроскопа с разрешением 0,12 нанометра удалось при увеличении в семь миллионов раз «увидеть» ряды атомов в кристалле золота, находящихся друг от друга на расстоянии 0,235 нанометра.

...история приготовления коллоидных растворов золота, меняющих цвет от оранжевого до зеленого, или добавления в расплавленное стекло соединений золота, придающих ему яркий красный цвет («золотой рубин»), берет начало в далеком прошлом. О применении «растворимого золота» в медицине упоминал и знаменитый врач XVI века Парацельс. Однако лишь в 1857 году Фарадей доказал, что яркая окраска коллоидных растворов золота обусловлена мелкими взвешенными его частичками. Это и было нанозолото, совершенно не похожее по своим свойствам на золото обычное.

...возможно, самый острый объект, созданный природой, это жало осы – радиус закругления его острия не превышает 10 нанометров.

...в своем знаменитом опыте по определению размеров молекул лорд Рэлей поступил удивительно простым способом. Капая масло в таз с водой, Рэлей бросал туда пылцу камфоры. Зная, что на поверхности воды частички камфоры совершают беспорядочное движение, а на поверхности масла они спокойны, он подбирал массу масляной капли такой, что закрывал ею всю поверхность воды и добивался прекращения «плясок» пылцы. Это и было свидетельством того, что масло растеклось мономолекулярным слоем, толщина которого, а значит и размер молекул масла, не превышала 1,7 нанометра.

...суперинвар – сплав железа и никеля с добавкой хрома – обладает необычайно малым коэффициентом теплового расширения. Так, при повышении температуры на один градус метровый стержень из суперинвара удлинится лишь на 30 нанометров.

...электрическая емкость электролитических конденсаторов может быть очень большой за счет малого расстояния между их обкладками, определяемого химической пленкой толщиной в несколько нанометров.

...мембранные технологии, применяемые для получения полупроницаемых пленок, не так давно пополнились еще одним методом. Ускоренные тяжелые ядра облучают синтетические пленки и превращают их в «сита» с аккуратными отверстиями, размер которых можно регулировать в нанодиапазоне.

...так называемые живые молекулярные машины – жгутики бактерий или элементарные мышечные звенья, обеспечивающие целенаправленное движение клеток и перенос молекул через мембраны, – обладают характерными размерами в единицы или десятки нанометров. А диаметр двойной спирали молекулы ДНК составляет около двух нанометров, длина же ее вдоль контура – порядка 400 нанометров.

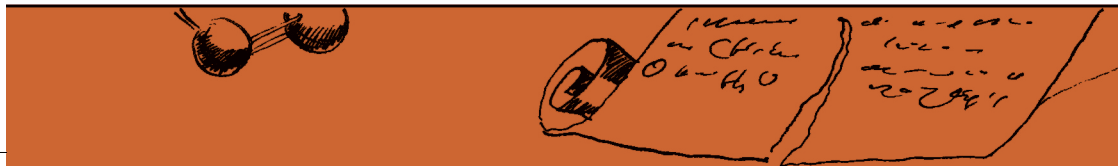
...приставка «нано» получила столь широкое распространение, что стала использоваться для описания объектов и макроскопических масштабов. Так, в соответствии с европейской классификацией малых спутников, аппараты массой от одного до десяти килограмм получили название «наноспутники».

Что читать в «Кванте» о нано...

(публикации последних лет)

1. «Нанотехнология на службе человека» – 2005, №4, с.11;
2. «Нанотехнологии: когда размер имеет значение» – 2008, №3, с.6;
3. «На пути к квантовому компьютеру» – 2009, №1, с.2;
4. «Рассказы о современной механике» – 2009, №3, с.2;
5. «Линейка длиной в один нанометр» – 2009, №4, с.2;
6. «Почему углеродные нанотрубки прочнее стали?» – 2009, №4, с.7;
7. «Космический нанолифт» – 2009, №5, с.11;
8. «Измеряем прочность тел от нано до мега» – 2009, №6, с.3;
9. «Как управлять светом с помощью магнитного поля» – 2010, №1, с.12.

Материал подготовил А.Леонovich



Задачи

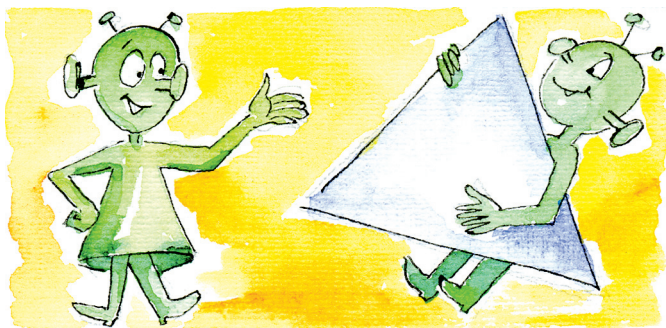
1. По результатам опроса общественного мнения, работой президента довольны 76% опрошенных, работой премьера — 83%, работой правительства в целом — только 59%. Назовем опрошенного безнадежным, если он доволен и работой президента, и работой премьера, но недоволен работой правительства в целом. Какая наименьшая доля безнадежных могла быть среди опрошенных?

М.Ахмеджанова



2. Дан равносторонний треугольник.
а) Можно ли разрезать его на равносторонние треугольники двух видов — большие и маленькие — так, чтобы тех и других треугольников было поровну?
б) А можно ли разрезать его на равносторонние треугольники трех видов — большие, средние и маленькие — так, чтобы треугольников каждого размера было поровну?

С.Дворянинов



3. Однажды Алиса нашла в Зазеркалье волшебную палочку, которая создает любой предмет по Алисиному желанию, но только в одном экземпляре. При этом, создав однажды какой-то предмет, волшебная палочка не сможет в дальнейшем создать такой же предмет вторично. Алисе нужно изготовить 10 одинаковых башмачков для своих путешествий по Зазеркалью. Как

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 — 8 классов.



ей сделать это с помощью найденной волшебной палочки?

Г.Гальперин

4. Имеется проволока в виде окружности. Как ее изогнуть, чтобы при проекции на одну плоскость она давала квадрат, а при проекции на другую плоскость — равносторонний треугольник?

А.Жуков



5. Врач сообщил Змею Горынычу, что если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то помрет через 10 лет, а если — по 17, то — через 5 лет. Сколько лет проживет Змей Горыныч, если бросит курить? (Считаем, что все годы одинаковой длины, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время.)

А.Ковальджи



Иллюстрации Д.Гришуковой

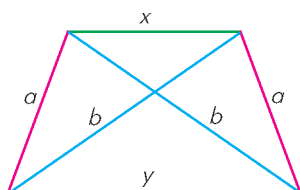
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

- 16.** Дана равнобокая трапеция с боковыми сторонами длины a и диагоналями длины b . Найдите произведение длин ее оснований.

П.Кожевников



$$x \cdot y = ?$$

- 17.** Бильярдный шар выпустили из вершины A квадратного стола $ABCD$. Он отражается от бортов по закону «угол падения равен углу отражения». Известно, что никакие два удара подряд не пришлись на противоположные борта, причем первый удар был от борта BC . После 2010 ударов от бортов шар наконец попал в вершину стола. В какую?

Г.Гальперин

- 18.** В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости со стороной клетки 1 записано по числу. Если центры трех клеток образуют треугольник со сторонами 3, 4, 5, то числа, записанные в этих клетках, дают в сумме ноль. Обязательно ли тогда во всех клетках записаны нули?

А.Эвнин

- 19.** Пусть $a < b < c$ – наименьшие возможные составные числа, идущие в порядке возрастания, каждое из которых не делится ни на одно из целых чисел от 2 до 100 включительно. Докажите, что произведение abc – точный куб натурального числа.

Г.Гальперин

- 20.** В некоторой конторе 25 кабинетов, занумерованных числами от 1 до 25. У коменданта 25 ключей с номерами от 1 до 25. Каждый ключ открывает кабинет с таким же номером. Но некоторые ключи могут открывать не только один кабинет, и из того, что ключ N открывает кабинет M , не следует, что ключ M открывает кабинет N .

Контору продали, двери покрасили (номера не видны). Новый комендант со старой связкой ключей стал открывать кабинеты. Открыв кабинет, он оставляет ключ в двери и идет дальше, к уже открытым кабинетам не возвращается. Может случиться, что некоторые кабинеты ему не удастся открыть. Сколько таких кабинетов будет в самом плохом случае? (Укажите возможное число и докажите, что больше быть не может.)

Н.Константинов

Иррациональность корней из 2, 3, 5 и 6

А. СПИВАК

Число $\sqrt{2}$ – КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ 2 – ЭТО, ПО определению, сторона квадрата площади 2. Другими словами, $\sqrt{2}$ – это такое положительное число, которое при умножении на себя дает 2.

Легенда приписывает одному из пифагорейцев доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$. (Рациональное число a/b – это частное от деления целого числа a на натуральное число b . Доказать иррациональность

$\sqrt{2}$ – значит привести к противоречию равенство $2 = a^2/b^2$, где a и b – натуральные числа.) Вот это доказательство.

Если $2b^2 = a^2$, то число a^2 четное. Поскольку квадрат любого нечетного числа нечетен, то и само число a обязательно четное, т.е. $a = 2c$, где c – натуральное число. Значит,

$$2b^2 = (2c)^2 = 4c^2,$$

откуда $b^2 = 2c^2$. Теперь четным числом должно быть число b , т.е. $b = 2d$, где d – натуральное число. Лыко да мочало, начинай сначала:

$$(2d)^2 = 2c^2,$$

т.е. $2d^2 = c^2$, и так будет всегда: числа делятся и делятся пополам. Очевидно, деля все время пополам, невозможно вечно оставаться во множестве натуральных чисел. Значит, число $\sqrt{2}$ воистину иррационально.

Примененный нами метод доказательства называют методом бесконечного спуска. (Можно было оформить то же по сути доказательство чуть иначе, сразу рассмотрев не любую дробь a/b , квадрат которой равен 2, а дробь *несократимую*.)

Говорят, что пифагорейцы скрывали это открытие от простолюдинов, поскольку оно противоречило их религиозному убеждению, что все на свете можно выразить при помощи целых чисел и их отношений – рациональных чисел.

Так оно было на самом деле или нет, подтвердить или опровергнуть не могу. Гораздо интереснее, что не так давно, в 2006 году, Дж. Конвей опубликовал придуманное в 1950-х годах Стенли Тенненбаумом удивительное

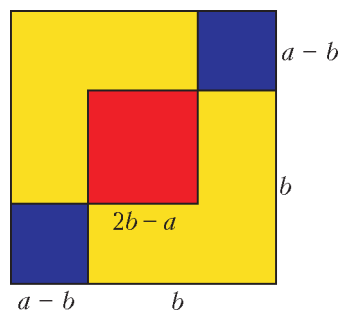


Рис. 1

геометрическое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$. Если $a^2 = 2b^2$, впишем в два противоположных угла квадрата $a \times a$ по квадрату $b \times b$ (рис.1). Поскольку сумма площадей этих двух квадратов равна площади большого квадрата, то перекрываются они в точности по той же площади (красной на рисунке), какую они не покрывают: сумма площадей двух синих квадратов равна площади красного квадрата!

Таким образом, из квадрата, площадь которого равна удвоенной площади другого квадрата, мы получили квадрат – по-прежнему с целыми сторонами, заметьте! – меньшего размера, площадь которого тоже равна удвоенной площади некоторого квадрата с целыми сторонами. Так можно уменьшать и уменьшать размеры, пока не приходим к квадрату, сторона которого меньше 1. Поскольку натуральное число не может быть меньше 1, желанное противоречие получено: иррациональность числа $\sqrt{2}$ доказана геометрически!

Конечно, можно было алгебраически от равенства $a^2 = 2b^2$ перейти к равенству $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$ (рас-

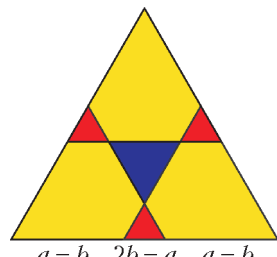


Рис. 2

кройте скобки – убедитесь!) и так совершить шаг спуска (ведь $2b - a < a$, поскольку $a > b$). Однако согласитесь: доказательство без формул симпатичнее.

Аналогично можно доказать и иррациональность числа $\sqrt{3}$ (рис.2): предположив, что $a^2 = 3b^2$, и расположив в

трех углах равностороннего треугольника со стороной a равносторонние треугольники, длины сторон которых равны b , мы получим три красных треугольника, сумма площадей которых равна площади синего треугольника (поскольку площадь пропорциональна квадрату стороны). Алгебраически это доказательство выглядит так: если $a^2 = 3b^2$, то $(3b - 2a)^2 = 3(2b - a)^2$.

Чертеж для доказательства иррациональности числа $\sqrt{5}$ аналогичен, но гораздо сложнее. Расположив во всех пяти углах правильного пятиугольника со стороной a правильные пятиугольники со сторонами длины b , где $a^2 = 5b^2$ (рис.3), мы получаем непокрытый (синий) центральный пятиугольник, пять непокрытых синих треугольников и пять дважды покрытых красных четырехугольников. Отразив каждый из синих треугольников относительно вершины, как показано на рисунке 4, мы получаем пять красных пятиугольников, сумма площадей которых равна площади синего пятиугольника.

Стоп! А почему красные пятиугольники правильные? Наверное, нам сейчас нужно вычислить длины сторон и проверить, что действительно все стороны одной длины? (Про углы не говорю, с ними все очевидно: подумайте сами, почему!)

Видимо, совсем без вычислений не обойтись.

Задача. Убедитесь, что красные пятиугольники на рисунке 4 равносторонние.

(Решение задачи приведено в конце статьи.)

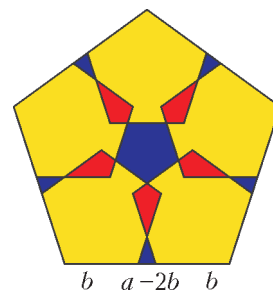


Рис. 3

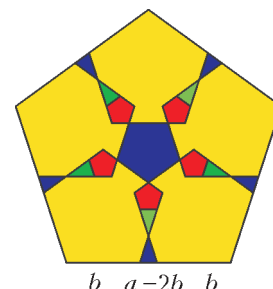


Рис. 4

Алгебраически это доказательство записывается так: если $a^2 = 5b^2$, то $(5b - 2a)^2 = 5(a - 2b)^2$ (проверьте!).

Наконец, докажем иррациональность числа $\sqrt{6}$. Расположив шесть желтых треугольников со сторонами длины b , где $a^2 = 6b^2$, как показано на рисунке 5, видим, что центральный зеленый треугольник покрыт не дважды, как красные треугольники, а трижды. Но зеленый треугольник равен красному (подумайте, почему). Следовательно, сумма площадей трех синих треугольников равна удвоенной площади красного треугольника. Удваивая, видим, что ушестеренная площадь синего треугольника в 16 раз больше площади красного треугольника. Поскольку из 16 равносторонних треугольников можно собрать один равносторонний треугольник, то нам удалось сделать шаг бесконечного спуска.

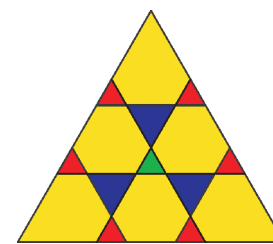


Рис. 5

Как и в предыдущих трех случаях, укажу алгебраическую запись этого доказательства: если $a^2 = 6b^2$, то $(2(3b - a))^2 = 6(a - 2b)^2$ (проверьте!).

Вот так Тенненбаум смог, через многие столетия после пифагорейцев, по-новому доказать иррациональность чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}$. Хотелось бы, конечно, доказать при помощи такого рода рисунков и иррациональность числа $\sqrt{7}$, и вообще иррациональность квадратного корня из любого натурального числа, не являющегося квадратом. К сожалению, это сделать не удалось и вряд ли кому-то удастся. Но даже четыре рассмотренных случая весьма симпатичны, не правда ли?

Решение задачи

Докажем, что три соседние стороны в равноугольном красном пятиугольнике (см. рис.4) равны – отсюда нетрудно получить, что он тогда и равносторонний.

Поскольку желтые пятиугольники правильные, все их углы равны 108° . Поэтому синие треугольники – равнобедренные с углами при основании, равными 72° , и углом 36° при вершине.

На рисунке 6 изображен один из синих треугольников отдельно. Замечательное свойство этого треугольника состоит в том, что биссектриса AD делит его на два равнобедренных: ADB и DAC (проверьте!), откуда $AC = AD = BD$. По свойству биссектрисы $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$, и, если обозначить AC за

x и CD за y , имеем пропорцию $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$. Она сводится к квадратному уравнению относительно x/y . Решив уравнение, находим x/y – оно оказывается равным $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, и оно же равно отношению боковой стороны синего треугольника к основанию (из нашей пропорции).

Вернемся к красным пятиугольникам. У любого из них сторона, примыкающая к зеленому треугольнику, совпадает с основанием синего треугольника, т.е. равна $a - 2b$. Длина соседней стороны красного пятиугольника равна тогда $b - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}(a - 2b)$. Вспомнив, что $a = \sqrt{5}b$, преобразуем наше длинное выражение и получаем в итоге $b(\sqrt{5} - 2)$, т.е. снова $a - 2b$. Значит, в красном пятиугольнике одна из сторон равна двум соседним, что и требовалось.

Это доказательство иррациональности числа $\sqrt{5}$ уже гораздо сложнее обычного. Но зато какой красивый геометрический факт – красные пятиугольники на рисунке 4 правильные, если числа a и b связаны соотношением $a = \sqrt{5}b$ (хотя бы одно из них будет иррациональным).

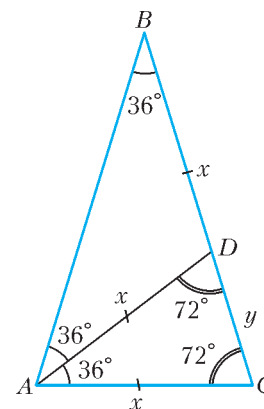


Рис. 6

Подвиг юного Бертольда

А. КОТОВА

ГРЬОР БОЛЬШОЙ ХВОСТ ДРЕМАЛ ПОСЛЕ СЫТНОГО обеда, когда от ворот раздался шум и лязг.

– Что там, Курундис? – спросил дракон у своего придворного черного мага.

– Драконоборцы, сэр, – отвечал маг, качая головой.

– Опять, – проворчал Грыор и раздраженно дернул хвостом. – Чего им на этот раз надо?

– Как всегда, – пожал плечами маг. – Сокровища и принцессу.

– Ну что за люди, – возмутился дракон. – Где я им принцессу возьму? У самого ни одной нет. А сокровища не отдам! В темницу их, Курундис!

– Уже, – меланхолично сообщил Курундис. – Пока мы с вами говорим, сэр, их уже препроводили. Временно загнали в большой подземный зал. Ровным счетом двадцать штук, сэр. Будете воспитывать лично?

– Не хочу, – Грыор помотал здоровенной башкой и зевнул. – Надоели. Придумай для них что-нибудь заковыристое, пусть напугаются хорошенько.

– Будет сделано, – поклонился черный маг.

Грыор кивнул, опустил голову на лапы и задремал снова.

Драконоборцы сидели на сыром каменном полу в большом подземном зале и ожидали своей участи.

– Сожрет, – грустно вздохнул юный Бертольд из Рокслея, бывший школяр, сбежавший от латыни и арифметики навстречу приключениям. – А я так хотел совершить первый в жизни подвиг...

– Отчаяние – грех, – наставительно сказал усатый дядька Элвард, опытный воин. – Всегда надо надеяться до последнего, юноша. Может, тебе еще будет дан шанс совершить свой подвиг.

Заскрипела, отворяясь, тяжелая дубовая дверь, вошли стражники с факелами, а вслед за ними – тощий бородатый старец в черной мантии, сразу ясно – колдун.

– Ну что, горе-воины? – спросил старик неприязненно. – Попались? Пеняйте теперь на себя. Будем вас мучить.

Драконоборцы угрюмо молчали.

– Значит, так, – сообщил старик. – С завтрашнего дня и приступим. Господин мой дракон милостив и не съест вас сразу. Более того, он даже, возможно, вас отпустит.

Драконоборцы зашевелились, по большому залу пронесся шорох и лязг кольчуг.

– Завтра утром всех вас разведут по отдельным камеркам, и больше вы друг друга не увидите, –

продолжал колдун. – И будете вы сидеть там и думать о своем поведении. Каждый вечер одного из вас будут отводить в Черную-черную комнату, где нет ничего, кроме волшебной лампы, и господин мой дракон будет обращаться к избранному лично. Сейчас лампа погашена. Хотите – внимайте ему во тьме, хотите – зажигайте лампу. Или гасите, если она будет гореть, это ваше дело. Лампа зажигается и гаснет просто – достаточно хлопнуть в ладоши. И будет так продолжаться долго, долго...

– Вечно? – спросил шепотом юный Бертольд.

– Может быть, и вечно, – сердито бросил старик. – Не перебивайте, молодой человек. Уж что я вам точно обещаю – все вы непременно побываете в Черной-черной комнате, никого не пропустим. И будьте уверены, что каждого из вас будут вызывать туда снова и снова. Но, как я уже сказал, господин мой дракон милостив...

Он обвел взглядом понурившихся воинов.

– Я, черный маг Курундис, клянусь вам всей моей магией и именем господина моего дракона Грыора, что в тот же миг, как кто-либо из вас скажет мне, что все вы уже побывали в Черной-черной комнате, вы будете отпущены на волю – разумеется, без оружия и пешком, – если сказанное будет верно. Но бойтесь ошибиться! Ибо в случае ошибки все вы будете съедены, и, уверяю вас, господин мой дракон сделает это с большим удовольствием. Все ли вы поняли, господа драконоборцы?

– Поняли, как не понять... – проворчал дядька Элвард.

Маг кивнул и вышел, вслед за ним стражники. Захлопнулась дверь, загремели замки.

– Сожрет... Сначала правоучениями замучает, а потом все равно сожрет... – раздалось в зале.

Юный Бертольд поднял голову.

– Дядь Элвард, правду ли говорят, что драконы не лгут? – спросил он.

Усатый воин кивнул.

– Тогда выход обязательно есть, – сказал юноша. – Нужно только хорошенько подумать. Ведь дракон обещал.

– Устами младенца глаголет истина, – веско произнес здоровенный Том из Стоунбриджа. – Давайте, братья, поразмыслим.

– Мечом-то проще, – проворчал кто-то.

И в зале повисла глубокая тишина. С непривычки думалось медленно и тяжело.

– Ну, что ты изобрел для наших пленников? – спросил Грыор за завтраком.

Курундис объяснил.

– Эй, маг, я же сказал, что не хочу воспитывать их лично!

– Сэр, вам не нужно трудиться, я сохранил запись вашей прошлогодней речи. Помните, вы наставляли того барона, как бишь его звали... Магический кристалл воспроизведет каждое слово без изъяна.

– А, тогда ладно... И все же ты неправ, маг. Зачем было клятвенно обещать, что я их непременно съем сам, да еще и с удовольствием? Вдруг придется? Знаешь ведь, терпеть не могу человечины...

– О, сэр, не волнуйтесь. Я верю, что настоящая опасность способна научить думать даже драконоборцев.

– Посмотрим, посмотрим, – хмыкнул Грыор. – Хуже всего, если они так и не рискнут дать тебе ответ. Сколько их? Двадцать? Двадцать камер заняты, неизвестно на сколько лет, а могут же еще явиться... ээээ... соискатели.

– Сэр, готов поспорить, – они справятся!

– На что спорим? – оживился дракон. – На щелбаны? Двадцать щелбанов, по числу пленников – идет? Если через пять лет они все еще будут здесь, – я выиграл! – Идет, – согласился маг.

Ударили по рукам.

Время шло. Иногда Грыор вспоминал о своих узниках, спрашивал, как у них дела.

– По-прежнему, – отвечал Курундис. – Ведем воспитательную работу. Некоторые уже выслушали вашу речь по четыре раза, сэр.

– И как? – интересовался Грыор.

– О, кто как, сэр. Некоторые бранятся. Некоторые рыдают. Один поклялся, если спасется, уйти в монастырь.

– Ну-ну, – хмыкал Грыор. – Будем надеяться, ему это удастся.

Однажды утром маг вбежал в тронный зал драконьего замка, слегка подпрыгивая.

– Я же говорил! – воскликнул он. – Сегодня этот мальчишка, который из Рокслея, заявил мне, что все уже побывали в Черной-черной комнате.

– И это действительно так? – спросил дракон.

– Да, сэр! – отвечал маг. – Так отпустим или вы еще скажете им пару слов?

– Пусть катятся на все четыре стороны, – фыркнул Грыор. – Наконец-то я от них избавлюсь.

– Да, сэр, – кивнул маг. – Пойду распоряжусь. А вы пока готовьте лоб.

– Что? – недоуменно повел хвостом дракон.

– Двадцать щелбанов, сэр, – поклонился маг. – Только не делайте вид, будто вы забыли. Драконы никогда ничего не забывают.

– Тьфу, – проворчал дракон. – Действительно. Ничего не поделаешь, проиграл – так проиграл...

...Драконоборцы вышли на свет, спотыкаясь с непривычки.

– Воистину, это был великий подвиг, о Бертольд из Рокслея, – сказал Элвард, усы которого за время заключения стали длиннее втрое. – Не сомневаюсь, ты заслужил рыцарские шпоры, а в будущем станешь великим воином, и все драконы склонятся перед тобой...

– Ну уж нет, – покачал головой Бертольд, – драконами я теперь сыт по горло. Поеду лучше в университет, учить латынь и арифметику. Ручаюсь, ни один профессор не может быть таким занудой, как Грыор Большой Хвост...

А вы поняли, сэры, как юному Бертольду удалось совершить сей подвиг?