журнал©
Квант

ЯНВАРЬ ФЕВРАЛЬ 2010 № 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН
Издатель – ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

Многогранный Делоне

Н.ДОЛБИЛИН

Вместо предисловия

Красивая горная вершина, примыкающая к Белухе, высочайшей вершине Алтая, названа пиком Делоне в честь Бориса Николаевича Делоне – выдающегося математика и удивительного человека

Борис Николаевич Делоне был крупным математиком, и математическое творчество является безусловно самой яркой гранью этого замечательного ученого. Но показать лишь эту грань многосторонне одаренной личности – все равно что из сложного полифонического произведения выделить его основную тему в отрыве от других тем. В этом смысле жизнь Б.Н.Делоне, а прожил он 90 лет, можно сравнить с цельным произведением искусства. Эта жизнь была чрезвычайно насыщена. Если бы мы попытались перечислить яркие моменты и факты из его биографии, то хронологически одним из первых шел бы 1897 год – семилетний мальчик читает в подлиннике «Фауста» Гете, знает наизусть отдельные главы поэмы, пишет маслом первые пейзажи. Где-то в конце списка был бы отмечен 1975 год – 6 июля Борис Николаевич на 86-м году жизни проводит ночь на Тянь-Шане при 25-градусном морозе на высоте 4200 метров на леднике под семитысячником Хан-Тенгри. Утром на вертолете он спуска-

15 марта 2010 года исполняется 120 лет со дня рождения Бориса Николаевича Делоне. К этой дате приурочена наша статья, которая является существенно переработанным и дополненным вариантом статьи «Пик Делоне», опубликованной в «Кванте», № 3 за 1986 год.

ется к озеру Иссык-Куль, откуда тут же перелетает во Фрунзе, ныне Бишкек, где стоит 40-градусная жара. Проведя несколько часов в очереди в аэропорту у касс, Борис Николаевич не без помощи академического удостоверения добывает билет на самолет и поздно вечером того же дня оказывается в подмосковном аэропорту, откуда ему предстоит добраться до дачи, расположенной в окрестностях подмосковного Абрамцева. Прибыв на ближайшую станцию последней электричкой глубокой ночью, Борис Николаевич с тяжелым рюкзаком идет к даче через лес, сбивается с пути. Проплутав в ночном лесу, он сбрасывает в укромном месте рюкзак и налегке к рассвету находит свой дом.

Эти биографические детали показывают, что, с одной стороны, разностороннее дарование у Б.Н.Делоне проявилось в очень раннем возрасте. С другой стороны, до преклонных лет он сохранил юношеский темперамент, а незаурядное физическое здоровье позволяло ему заниматься с полной отдачей не только научной работой, но и серьезным туризмом. Геометрия чисел, математическая кристаллография, дискретная геометрия – в этих областях Борисом Николаевичем были написаны работы, когда ему было уже за восемьдесят. Алтай и Кавказ, Карпаты и Тянь-Шань – такова география путешествий, совершенных им в преклонном возрасте.

Чудо-ребенок

Борис Николаевич Делоне родился 15 марта 1890 года в Санкт-Петербурге в семье известного профессора математики и механики, автора очень хороших университетских учебников Николая Борисовича Делоне. Род Делоне происходил из Франции. Прадед Б.Н. Делоне, Пьер Делоне (Pierre Delaunay), был доктором в наполеоновской армии, пленен во время войны 1812 года. После освобождения вернулся во Францию, но, влюбленный в прекрасную девушку из знатного российского рода, вернулся в Россию, женился и остался здесь навсегда...[1]

Борис был многосторонне одаренным ребенком и получил, как говорили тогда, прекрасное воспитание. Его занятия музыкой были весьма основательны: он играл многие пьесы Баха и Моцарта, все сонаты Бетховена, много сочинял сам. Учитель музыки видел в нем музыкальную одаренность и рекомендовал непременно поступать в консерваторию по классу композиции. Но не меньше оснований было и у преподавателя рисования, когда он настаивал на том, чтобы Борис поступал в художественную академию. Его занятия рисованием, живописью были пронизаны талантом и серьезным отношением, портреты близких, выполненные в карандаше, поражают сходством.

Пока учителя и родители размышляют о будущем Бориса, мальчик не теряет времени. Он путешествует в горы и пишет пейзажи, занимается музыкой и играет в футбол, воспроизводит в карандаше «Тайную вечерю» Леонардо да Винчи и лазает по деревьям (с младшей сестрой на плечах для нагрузки), наблюдает за звездным небом и ставит физические опыты. Свою комнату он превратил в физическую лабораторию, в которой немало устройств было сделано им самим. Много лет спустя Делоне часто с чувством гордости вспоминал о маленьких хитростях, которые позволили ему получить с помощью лейденской банки «в-о-о-о-т такую искру» (это «в-о-о-о-т» сопровождалось красноречивым жестом). Увлекаясь астрономией, он построил телескоп, зеркало для которого шлифовал сам. Рассказывая об этом, Борис Николаевич никогда не забывал добавлять: «шлифовать зеркало из бронзы было глупо – и трудоемко, и быстро тускнело».

Нельзя не упомянуть еще об одном увлечении Б.Н.Делоне в школьные годы. Его отец Николай Борисович был дружен со знаменитым ученым Николаем Егоровичем Жуковским, «отцом русской авиации». Под его влиянием Николай Борисович Делоне в 1907 году (он тогда работал профессором в Киевском политехническом институте) организовал в Киеве первый в России планерный кружок. Семнадцатилетний Борис стал одним из членов кружка и в течение следующих двух лет построил один за другим пять планеров, постоянно совершенствуя их. Последний, пятый, планер был наиболее удачным. Однажды кинематографисты, при-

Б.Н.Делоне собирается в лыжный поход (начало 1970-х годов)

[1] *То, что Б.Н.Делоне якобы был праправнуком коменданта Бастилии маркиза Делоне (Delaunay) – первой жертвы французской революции 1789 года, впоследствии не подтвердилось: согласно исследованиям, проведенным А.С.Шаровым, известным астрономом и зятем Б.Н.Делоне, предки Бориса Николаевича происходили из другого рода Делоне.*

Крайний слева – Б.Н.Делоне, крайняя справа – его жена М.Г.Делоне, в центре – известный математик академик Я.В.Успенский, его жена и сестра (1924 год)

ехавшие снять материал о кружке, уговорили Бориса, несмотря на сильный ветер, показать полет. Порыв ветра опрокидывает планер, и авиатор падает примерно с 15-метровой высоты, к счастью, на глубоко вспаханное поле. С точки зрения современных представлений об авиации, достижения кружка кажутся наивными: полеты на несколько десятков метров, запуски летом при помощи лошади, жгута, велосипеда, а зимой – при помощи санок. Но, заметим, это было время зарождения авиации, и деятельность кружка носила пионерский характер. Работа кружка оказала влияние на развитие отечественного авиастроения. Одним из кружковцев был Игорь Сикорский, который впоследствии, получив необходимые средства, построил огромный по тем временам 4-моторный самолет, знаменитый в истории российского самолетостроения под названием «Илья Муромец». После октябрьской революции И.Сикорский эмигрировал в США, где со временем стал знаменитым конструктором вертолетов. Один из вертолетов Сикорского совершил трансатлантический перелет. Отметим также еще один любопытный эпизод, связанный с кружком. Крупнейший наш авиаконструктор Андрей Николаевич Туполев, рассказывая в своих мемуарах об огромном значении, которое имело для него знакомство с Жуковским, отмечал, что познакомил его, тогда еще студента, с Жуковским именно Б.Н.Делоне.

Прежде чем обсудить место, которое занимала математика в жизни Бориса Делоне в его детские годы, следует отметить еще одно увлечение, которое продолжалось всю жизнь. Это увлечение – альпинизм – впервые проявилось у Бориса Николаевича в возрасте 12–15 лет в Швейцарских Альпах, куда в начале 1900-х годов семья Делоне выезжала на летние каникулы. Позже Делоне рассказывал о своих восхождениях и походах в окрестностях вершин Монте-Роза и Маттерхорн над Церматом в Валлийских Альпах.

Математическое дарование Делоне проявилось весьма рано. В 12 лет он был знаком с основами математического анализа, чуть позднее приступил к изучению алгебры, теории чисел. Обстановка в семье способствовала развитию математического таланта. Отец, к примеру, в 1904 году взял сына на Международный конгресс математиков в Гейдельберг, где 14-летний Борис видел Гильберта и Минковского, присутствовал на их лекциях. Для будущей научной работы Бориса Николаевича оказалось важным, что в начале 1900-х годов его отец работал профессором Варшавского университета[2] одновременно с выдающимся математиком Георгием Феодосьевичем Вороным. Г.Ф.Вороной (1868–1908) был одним из самых блестящих представителей знаменитой Петербургской школы теории чисел. Николай Борисович подружился с выдающимся математиком, и Вороной стал частым гостем в доме Делоне. Борис Николаевич вспоминал, что когда беседы между отцом и Вороным затягивались допоздна, то он, мальчик, уже «находясь в кровати в своей комнате, прислушивался к их разговору через полуприкрытую дверь, ведущую в залу». Кстати, Г.Ф.Вороной тоже участвовал в работе конгресса в Гейдельберге, много общался с Минковским. Результатом общения двух создателей нового направления в математике – геометрии чисел – стала грандиозная программа, которую наметил себе на последующие годы Вороной. И хотя, к огромному сожалению, судьба отпустила ему только четыре года, Георгий Феодосьевич успел написать несколько фундаментальных работ по геометрии положительных квадратичных форм и теории параллелоэдров, в которых были решены принципиальные задачи из теории покрытий, упаковок и разбиений. Эти работы определили направление исследований на столетие вперед.

Киевский университет, семинар Граве

Хотя впоследствии работы Вороного оказали серьезное влияние на исследования Делоне, прямых научных контактов у Бориса-гимназиста с маститым ученым не было. Вороной умер неожиданно в возрасте 40 лет в том самом 1908 году, когда Борис Делоне поступил на физико-математический факультет Киевского университета.

На этот факультет примерно в одно время поступили учиться несколько исключительно талантливых и амбициозных молодых людей, среди них Отто Шмидт и Николай Чеботарев. Николай Григорьевич Чеботарев (1894–1947) стал выдающимся алгебраистом мирового уровня, член-корреспондентом АН СССР. Академик Отто Юльевич Шмидт (1891–1956) – многогранно талантливый человек невероятной энергии. В истории российской математики Шмидт известен не только как крупный алгебраист, автор хорошо известной книги «Абстрактная теория групп», но и как основатель знаменитой московской алгебраической школы. В 1934 году имя Героя Советского Союза Шмидта стало легендарным: он был начальником знаменитой полярной экспедиции на ледоколе «Челюскин», а после гибели ледокола организовал зимовку на льдине и в

[2] *В то время Польша была частью Российской Империи.*

течение нескольких месяцев полярной ночи, вплоть до благополучной эвакуации экспедиции, как руководитель сделал все, чтобы все люди остались живы.

Борис Делоне, Отто Шмидт, Николай Чеботарев, Александр Островский, Абрам Безикович составили ядро семинара, возглавляемого известным математиком профессором Дмитрием Граве. Этот семинар, существовавший в Киевском университете на рубеже 1910-х годов и вошедший в историю отечественной математики как воспитавший плеяду математиков экстракласса, предопределил направление исследований Делоне на многие годы. Студенческая работа Бориса Делоне «Связь между теорией идеалов и теорией Галуа» была удостоена Большой золотой медали университета, и Борис был оставлен «для подготовки к профессорскому званию», или, говоря по-нынешнему, в аспирантуру. Первая опубликованная работа Делоне «Об определении алгебраической области посредством конгруэнтности» была посвящена новому доказательству знаменитой теоремы Кронекера об абсолютно абелевых полях.

Диофантовы уравнения третьей степени

В это же время Б.Н.Делоне начал исследования по теории диофантовых уравнений третьей степени с двумя неизвестными. Цикл работ по теории кубических диофантовых уравнений оказался, по собственному признанию Бориса Николаевича, лучшим достижением во всей его математической карьере.

Диофантово уравнение – это уравнение вида

$$p(x_1,\ldots,x_n)=0\,, \qquad (1)$$

где $p(x_1,\ldots,x_n)$ – многочлен с целыми коэффициентами, для которого нужно найти *целые*, иногда рациональные, решения.

Так, известное уравнение $x^2+y^2=z^2$, в котором нужно найти все целые решения, есть пример уравнения 2-й степени с тремя неизвестными. Оно имеет бесконечно много целых решений, хорошо известных под названием *пифагоровы тройки*, потому что они соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми сторонами: (3,4,5), (5,12,13) и т.д.[3]

В одной из 23 знаменитых проблем, а именно в 10-й проблеме, Гильберт поставил вопрос: существует ли алгоритм, позволяющий определить по коэффициентам уравнения (1), существует или нет решение этого уравнения? Сейчас, после работы Ю.В.Матиясевича, решившего 10-ю проблему Гильберта (1970), точно известно, что такого алгоритма не существует. Надо сказать, что специалисты по диофантовым уравнениям, которые прекрасно знали, с каким трудом давался каждый шаг в этой области, всегда сомневались в существовании такого алгоритма.

Простейший вид диофантова уравнения – это линейное уравнение с двумя неизвестными:

$$ax+by=1,$$

где a и b – целые. Впервые это уравнение было исследовано индийским математиком Ариабхатой еще в V–VI веках.

Диофантовы уравнения 2-й степени оказались гораздо труднее. Они были полностью изучены великими математиками Леонардом Эйлером (полная теория квадратных уравнений Пелля $ax^2+y^2=1$, где a не равен квадрату целого числа), а также Ж.Лагранжем, К.Гауссом.

Что касается диофантовых уравнений степени 3 и выше, глубокий и неожиданный результат был получен норвежским математиком Акселем Туэ в 1908 году. Туэ доказал, что диофантово уравнение вида

$$f(x,y)=c\,,$$

где $f(x,y)$ – однородный многочлен степени 3 или выше, может иметь лишь конечное число целых решений. Здесь предполагается, что многочлен $f(x,y)$ не раскладывается в произведение многочленов степени 2 и ниже. В этом случае решение уравнения высокой степени можно свести к решению квадратного диофантового уравнения. А квадратные уравнения, например квадратное уравнение Пелля, имеют бесконечное число решений. Напомним, что многочлен называется *однородным* (или *формой*), если все входящие в него одночлены имеют одну и ту же степень.

Однако нужно заметить, что теорема Туэ не давала никаких средств для нахождения решений. Из нее нельзя было получить никакой верхней оценки для значений решений, что давало бы возможность найти целые решения хотя бы путем грубого перебора.

Журнала с работой Туэ в Киеве в то время никто не видел. Борис Николаевич решил исследовать давно стоявшую проблему решения неопределенных кубических уравнений. Как оказалось в дальнейшем, работы Делоне обозначили едва ли не первый после Эйлера и Лагранжа серьезный прогресс в направлении конкретного исследования диофантовых уравнений более высокого порядка, а именно, уравнений вида

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=1\,, \qquad (2)$$

где слева – форма 3-й степени с целыми коэффициентами и с отрицательным дискриминантом. «Отрицательность дискриминанта» означает, что кубическое уравнение $at^3+bt^2+ct+d=0$ имеет единственный вещественный корень. Сначала Б.Н.Делоне приступил к важному частному случаю кубических уравнений с отрицательным дискриминантом – кубическому аналогу уравнения Пелля:

$$x^3q+y^3=1\,, \qquad (3)$$

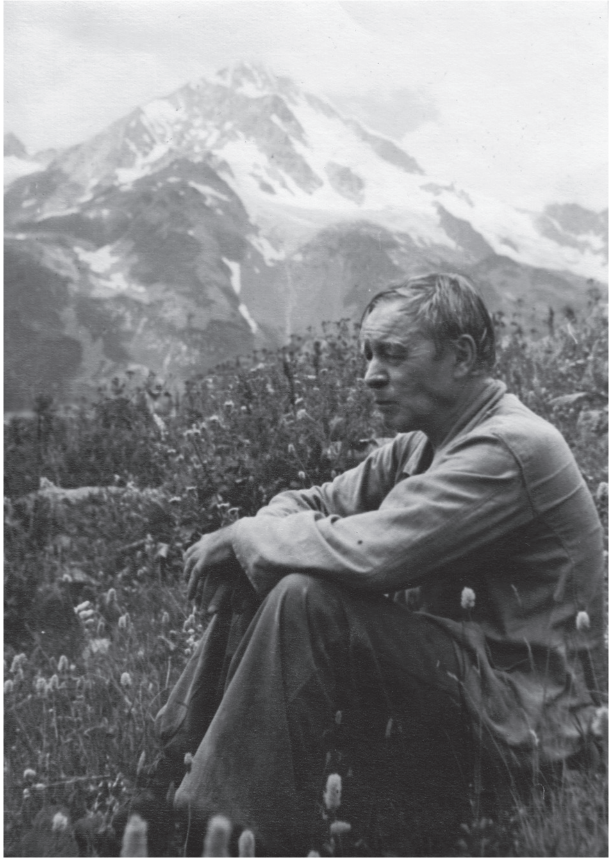
где q – целое, но не куб целого. (Если q является кубом целого, то форма была бы разложимой:

$$x^3q+y^3=\left(x\sqrt[3]{q}+y\right)\left(x^2\sqrt[3]{q^2}-x\sqrt[3]{q}y+y^2\right),$$

и проблема свелась бы к решению диофантовых уравнений степеней 1 и 2.)

Уравнение (3) в целых числах всегда имеет тривиальное решение (0; 1). Задача – найти остальные решения, если такие, конечно, имеются. Делоне ввел в

[3] *Подробнее см., например, «Квант» №1 за 1986 год, с.11.*



Кавказ, Домбай (1948 год)

рассмотрение *кольцо* σ *алгебраических чисел*

$$z\sqrt[3]{q^2}+x\sqrt[3]{q}+y. \qquad (4)$$

По существу – это множество чисел вида (4), где числа z, x, y целые. Легко проверить, что как сумму и разность, так и произведение двух чисел вида (4) можно представить в таком же виде. Другими словами, множество чисел вида (4) замкнуто относительно арифметических операций сложения и вычитания, а также и умножения. В алгебре такие множества называют *кольцом*. В числовом кольце наряду с каждым числом существует ему противоположное, но, вообще говоря, нет ему обратного. Нетрудно убедиться, что если пара целых чисел (x,y) есть решение уравнения (3), то вместе с числом $\varepsilon=x\sqrt[3]{q}+y$ кольцу σ принадлежит и обратное ему число ε^{-1}. Другими словами, число ε^{-1} также можно представить в виде (4). Числа из кольца σ, для которых обратные также принадлежат кольцу, называют *единицами*. Например, при $q=2$ число $\sqrt[3]{2}-1$ является единицей, так как обратное ему число представимо в виде $\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1$ и, следовательно, принадлежит σ.

Итак, любое решение уравнения (3) соответствует единице из σ, более того, эта единица должна быть *двучленной* в том смысле, что один из трех членов в числе вида (4), а именно $z\sqrt[3]{q^2}$, равен 0. Из одной теоремы Дирихле следует, что в σ существует так называемая основная единица ε_0, а все остальные единицы есть степени основной. Более того, было известно, что если двучленная единица $\varepsilon\in\sigma$ такая, что $0<\varepsilon<1$, то степень m в равенстве $\varepsilon=\varepsilon_0^m$ положительна.

В дальнейшем Делоне доказал, что если основная единица ε_0 двучленная, то никакая положительная степень m единицы ε_0, за исключением $m=1$, не равна двучленной единице. Затем был исследован случай $\varepsilon=\varepsilon_0^m$, когда ε_0 – трехчленная основная единица. При помощи остроумнейших соображений Борис Николаевич доказал, что единица вида ε_0^m может быть двучленной лишь тогда, когда сама основная единица ε_0 двучленна.

Тем самым, Б.Н.Делоне получил окончательный результат: кубический аналог уравнений Пелля (3), помимо тривиального решения (0; 1), имеет еще не более одного нетривиального решения. Для того чтобы получить это решение, нужно найти основную единицу. Если эта единица двучленна: $x\sqrt[3]{q}+y$, то (x,y) есть единственное нетривиальное решение уравнения (3). Если это не так, то нетривиальных решений нет вовсе.

Здесь нужно сказать, что приблизительно двадцатью годами ранее Вороной построил алгоритм вычисления основной единицы в кольце σ. Например, для уравнения $4x^3+y^3=1$ кольцо имеет трехчленную основную единицу, и данное уравнение имеет лишь тривиальное решение (0; 1). А для уравнения $37x^3+y^3=1$ основная единица двучленна: $\varepsilon_0=-3\sqrt{37}+10$. Поэтому кроме тривиального решения имеется в точности еще одно: (–3; 10).

После столь крупного успеха Б.Н.Делоне приступил к общему уравнению (2), напомним, с отрицательным дискриминантом. И в общем случае он свел проблему к исследованию двучленных единиц вида $x+y\rho$ в кольце σ алгебраических чисел $x+y\rho+z\rho^2$, где ρ – единственный вещественный корень уравнения $at^3+bt^2+ct+d=0$. Посредством созданного им «алгоритма повышения» Борис Николаевич доказал следующую фундаментальную теорему:

В общем случае уравнение (2) имеет не более 3 целых решений; в двух конкретных случаях уравнение имеет в точности 4 решения; одно конкретное уравнение имеет ровно 5 решений. Никакое уравнение вида (2) не имеет более 5 целых решений.

Так, уравнение $x^3-xy^2+y^3=1$ имеет пять решений: (1; 1), (1; 0), (0; 1), (–1; 1), (4; –3). А тот факт, что других нет, следует из упомянутой теоремы Делоне.

Правда, у «алгоритма повышения» был серьезный недостаток, который Делоне не смог устранить. Трудность состояла в том, что тогда не было известно верхней оценки для значений решений данного уравнения, выраженной через коэффициенты уравнения. Метод, предложенный Борисом Николаевичем, не содержал указания относительно момента, наступление которого гарантировало бы нахождение всех решений данного уравнения.

Несмотря на то, что в каждом рассмотренном уравнении этот «алгоритм» срабатывал, уверенность в том, что получены все решения, возникала лишь тогда, когда у уравнения уже найдены 3 решения. Верхняя же оценка для решений уравнения через коэффициенты формы при условии, что степень не меньше 3, была получена лишь в 1960-е годы А.Бейкером. За свою работу Бейкер был удостоен Филдсовской медали.

После классических результатов Эйлера, Лагранжа, Гаусса по диофантовым уравнениям второй степени работы Делоне представляли серьезный прорыв в теории кубических уравнений и оставались непревзойденными вплоть до 1960 годов (А.Бейкер). Как писал член-корреспондент АН СССР Д.К.Фаддеев, «по конкретности анализа, простоте и ясности цикл работ Б.Н.Делоне, посвященных неопределенным уравнениям, является исключительным в математике XX века с ее часто громоздким аппаратом и абстрактными построениями. По своему стилю этот цикл близок к лучшим образцам классических работ Гаусса и Чебышева».

Жизнь в Киеве, переезд в Санкт-Петербург (Ленинград)

Успех явился результатом, как говорил Делоне, нескольких тысяч часов интенсивной работы. Борис Николаевич любил добавлять, что решение трудной математической проблемы отличается от решения олимпиадной задачи тем, что «олимпиадная задача требует 5 часов, а проблема – 5 тысяч часов». Следует отметить, что ему удалось добиться крупного успеха в теории диофантовых уравнений, несмотря на чрезвычайно тяжелые политические и жизненные условия, существовавшие в Киеве в то время.

В годы первой мировой войны Киев был оккупирован немецкими войсками, и вместе со многими другими университетскими профессорами семья Делоне в 1915–1916 годах выезжала в Саратов. Туда же приехал из Киева и Николай Чеботарев, который был на четыре года младше. Именно в Саратове его общение с Б.Н.Делоне оказалось для Чеботарева определяющим.

Когда Делоне вернулись в Киев, наступила революция и кровопролитная гражданская война. Киев оказался в центре этих жестоких событий. Одна власть сменяла другую непрерывно. Немецкие войска были выбиты из Киева Красной Армией. Красные, в свою очередь, уступали город белым, белые вытеснялись опять красными, красные – жовтоблакитными, те – зелеными, белополяками и т.д. Политическая карусель в Киеве, сопровождавшаяся террором, продолжалась несколько лет. Делоне часто рассказывал не без юмора об одном эпизоде из его жизни в те годы. Его младший брат Александр – в семье его называли Алик – был офицером в деникинской армии. Однажды, когда белые скоропалительно сдали город красным, Алик, переодевшись в гражданское платье, вынужден был бежать из Киева. Форма белого офицера осталась в доме отца, где жил также и Борис. Ночью в квартиру пришел для проверки краснофлотский патруль. Во время обыска командир патруля подошел к двухстворчатому гардеробу, где за левой дверью висел мундир Алика, и резко отворил… правую. Неожиданно с верхней полки упала на пол огромная кукла и начала плакать. Привезенная из Парижа плачущая кукла, а в то время это казалось настоящим чудом, настолько поразила матросов, что они забыли открыть другую дверь шкафа… А ведь время было жестоким и беспощадным, расстрел, что называется, на месте был делом обычным.

В тот период Борис Николаевич работал учителем математики в гимназии и доцентом в Киевском политехническом институте. В 1920 году он написал большую работу по кубическим диофантовым уравнениям и прекрасно оформленную рукопись отослал в качестве докторской диссертации в Санкт-Петербургский, тогда Петроградский университет. Комиссия под руководством А.А.Маркова[4] высоко оценила диссертацию, и в 1922 году Б.Н.Делоне был приглашен в Петроградский университет в качестве профессора. Это было действительно очень почетно, так как университет был «домом» знаменитой Санкт-Петербургской школы теории чисел, семена которой были посеяны еще Эйлером и которая расцвела во второй половине XIX века под руководством П.Л.Чебышева. Во времена Чебышева ядро этой школы составляли А.А.Марков, А.Н.Коркин, Е.И.Золотарев, А.А.Ляпунов.

В то время, в соответствии с традициями знаменитой теоретико-числовой школы, ее выдающийся представитель Георгий Вороной «одел» свою исключительно геометрическую по идее работу о параллелоэдрах в «аналитические одежды». В противоположность этой традиции, Делоне, обладая несомненным геометрическим даром, в течение многих лет занимался геометризацией нескольких важных алгебраических работ, включая алгоритм Вороного для вычисления основной единицы в кольце, соответствующей кубической форме отрицательного дискриминанта. В этой и других работах он интерпретировал кольцо кубических иррациональностей как целочисленную решетку с естественным правилом умножения.

Здесь мы завершаем обзор исследований алгебраических вопросов геометрическими методами, чтобы рассказать об одной простой, но важной теории, которую Борис Николаевич начал еще в начале 1920-х годов, – о так называемом методе пустого шара и связанном с ним разбиении пространства на специальные многогранники. Где-то в 1980-е годы, уже после смерти Б.Н.Делоне, эти разбиения получили название «триангуляции Делоне».

(Окончание следует)

[4] *Академик Андрей Андреевич Марков (1856–1922) – выдающийся русский математик, внес крупный вклад в теорию чисел и особенно в теорию вероятностей («марковские цепи и процессы»).*

Что такое ЯМР-томография?

А.ВАРЛАМОВ, А.РИГАМОНТИ

Сегодня уже стало привычным направлять пациента не на рентгенографию, не на электрокардиограмму, а на ЯМР-томографию. Для того чтобы разобраться, что стоит за этими словами, следует начать издалека, а именно с понимания того, что такое магнетизм атомного ядра. Но еще до этого нам надо ввести важные понятия, которые отсутствуют в основном курсе школьной физики.

Магнитный момент

Магнитные свойства маленького плоского контура с током, помещенного в магнитное поле, определяются магнитным моментом этого тока, равным

$$\vec{\mu} = IS\vec{n},$$

где I – ток, S – площадь контура, $\vec{n}$ – вектор нормали к контуру, построенный по правилу буравчика (рис.1).

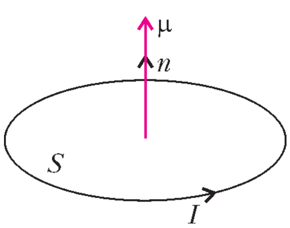


Рис.1. Магнитный момент контура с током

В частности, энергия контура в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ равна

$$W = -\left(\vec{\mu}\vec{B}\right) = -\mu_z B$$

(ось z направлена вдоль $\vec{B}$). Для поворота контура с изменением проекции вектора $\vec{\mu}$ от μ_z до $-\mu_z$ надо совершить работу $A = 2\mu_z B$.

Атомный электрон, движущийся по орбите вокруг атомного ядра, можно считать эквивалентным круговому току и приписать ему магнитный момент. Наличие такого «орбитального» магнитного момента у электрона проявляется в изменении его энергии при помещении атома в магнитное поле (формула для W).

При тщательном анализе экспериментальных данных оказалось, что свойства атома во внешнем магнитном поле определяются не только движением электрона вокруг ядра, но и наличием у электрона скрытого «внутреннего вращения», которое назвали спином. Спин есть у всех элементарных частиц (у некоторых спин равен нулю). Интенсивность «вращения» описывается спиновым числом s, которое может быть только целым или полуцелым. Для электрона, протона, нейтрона $s = \frac{1}{2}$. «Внутреннее вращение», аналогично орбитальному, приводит к появлению у частицы спинового магнитного момента. Проекция спинового магнитного момента на ось z (направление магнитного поля) принимает значения

$$\mu_z = \gamma m_s \hbar,$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка, m_s принимает $(2 + 1)$ значений $-s, -s+1, \ldots, s-1, s$, а γ называют гиромагнитным фактором. Сам вектор $\vec{\mu}$ имеет модуль больше, чем его максимальная проекция: $\mu = \gamma\sqrt{s(s+1)}\,\hbar$, т.е. $\vec{\mu}$ во всех стационарных состояниях расположен под углом к оси z и быстро вращается вокруг этой оси: $\mu_z = \text{const}$, μ_x и μ_y быстро меняются (рис.2). Для электрона, протона, нейтрона m_s принимает всего два значения: $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Для электрона $\gamma = -\frac{e}{m_e}$, для протона $\gamma = 2{,}79\frac{e}{m_p}$. Спиновый магнитный момент есть даже у нейтрона, несмотря на то что он в целом электронейтрален. (Это свидетельствует о том, что нейтрон должен иметь внутреннюю структуру. Как и протон, он состоит из заряженных кварков.) Для нейтрона $\gamma = -1{,}91\frac{e}{m_p}$.

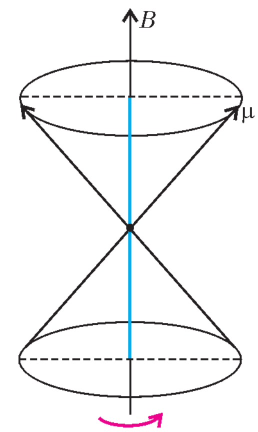


Рис.2. Только одна проекция вектора магнитного момента постоянна, две другие быстро меняются

Видно, что магнитный момент протона и нейтрона на три порядка ($\sim 10^3$) меньше, чем магнитный момент электрона (их масса примерно в 2000 раз больше). Примерно такой же по порядку величины магнитный момент должен быть у всех остальных атомных ядер, состоящих из протонов и нейтронов. Магнитные моменты всех ядер измерены с большой точностью. Именно наличие у ядер этих маленьких (в сравнении с атомными) магнитных моментов, значения которых различны для разных ядер, и лежит в основе явления ЯМР – ядерного магнитного резонанса, а также ЯМР-томографии. Мы в основном будем говорить о ядрах водорода – протонах, которые имеют наиболее широкое распространение в природе. Изотопом водорода является дейтерий, чье ядро также обладает магнитным моментом.

Что такое ядерный магнитный резонанс

Рассмотрим ядро атома водорода (протон) во внешнем магнитном поле $\vec{B}$. Протон может находиться только в двух стационарных квантовых состояниях: в одном из них проекция магнитного момента на направление магнитного поля положительна и равна

$$\mu_z = \frac{2{,}79e\hbar}{2m_p},$$

а в другом – такая же по модулю, но отрицательная. В первом состоянии энергия ядра в магнитном поле равна $-\mu_z B$, во втором $+\mu_z B$. Изначально все ядра находятся в первом состоянии, а для перехода во вторoе состояние ядру надо сообщить энергию

$$\Delta E = 2\mu_z B .$$

Нетрудно понять, что заставить ядро изменить направление своего магнитного момента можно, подействовав на него электромагнитным излучением с частотой ω, соответствующей переходу между этими состояниями:

$$\hbar\omega = 2\mu_z B .$$

Подставляя сюда магнитный момент протона, получим

$$2\pi\hbar\nu = 2\frac{2{,}79e\hbar}{2m_p}B ,$$

откуда для $B = 1$ Тл находим частоту волны: $\nu \approx 4\cdot 10^7$ Гц и соответствующую длину волны: $\lambda = \frac{c}{\nu} \approx 7$ м – типичные частота и длина волны радиовещательного диапазона. Фотоны именно этой длины волны поглощаются ядрами с переворотом магнитных моментов по отношению к направлению поля. При этом их энергия в поле повышается как раз на величину, соответствующую энергии такого кванта.

Отметим, что в экспериментах по ЯМР, т.е. для типичных частот среднего радио-вещательного диапазона, электромагнитные волны используются вовсе не в том виде, к которому мы привыкли при обсуждении распространения света или поглощения и излучения света атомами. В простейшем случае мы имеем дело с катушкой, по которой протекает созданный генератором переменный ток радиочастоты. Образец, содержащий исследуемые ядра, которые мы хотим подвергнуть воздействию электромагнитного поля, помещается на оси катушки. Ось катушки, в свою очередь, направлена перпендикулярно статическому магнитному полю B_0 (последнее создается с помощью электромагнита или сверхпроводящего соленоида). При протекании по катушке переменного тока на ее оси индуцируется переменное магнитное поле B_1, амплитуда которого выбирается гораздо меньшей величины B_0 (обычно в 10000 раз). Это поле осциллирует с той же частотой, что и ток, т.е. с радиочастотой генератора.

Если частота генератора близка к вычисленной частоте, то происходит интенсивное поглощение ядрами водорода квантов света с переходом ядер в состояние с отрицательной проекцией μ_z (поворот ядер). Если же частота генератора отличается от вычисленной, то поглощения квантов не происходит. Именно в связи с резкой (резонансной) зависимостью от частоты переменного магнитного поля интенсивности процесса передачи энергии от этого поля ядрам атомов, сопровождаемое поворотом их магнитных моментов, явление получило название ядерного магнитного резонанса (ЯМР).

Как же можно заметить такие перевороты ядерных моментов по отношению к статическому магнитному полю? Будучи вооруженными современной техникой ЯМР, это оказывается совсем нетрудно: выключив создающий поле B_1 генератор радиочастоты, следует одновременно включить приемник, использующий ту же катушку в качестве антенны. При этом он будет регистрировать радиоволны, излучаемые ядрами по мере их возвращения к первоначальной ориентации вдоль поля B_0. Этот сигнал индуцируется в той же катушке, посредством которой ранее возбуждались магнитные моменты. Его временнáя зависимость обрабатывается компьютером и представляется в виде соответствующего спектрального распределения.

Из этого описания вы можете представить, что ЯМР-спектрометр весьма существенно отличается от привычных спектрометров, проводящих измерения в диапазоне видимого света.

До сих пор мы рассматривали упрощенную картину: поведение в магнитном поле изолированного ядра. В то же время понятно, что в твердых телах или жидкостях ядра совсем изолированными не являются. Они могут взаимодействовать между собой, а также и со всеми другими возбуждениями, распределение по энергиям которых определяется температурой и статистическими свойствами системы. Взаимодействия возбуждений различной природы, их происхождение и динамика являются предметом изучения современной физики конденсированного состояния.

Как был открыт ЯМР

Первые сигналы, соответствующие ядерному магнитному резонансу, были получены более шестидесяти лет назад группами Феликса Блоха в Оксфорде и Эдварда Парселла в Гарварде. В те времена экспериментальные трудности были огромны. Все оборудование изготавливалось самими учеными прямо в лабораториях. Вид аппаратов того времени несопоставим с сегодняшними (использующими мощные сверхпроводящие соленоиды) приборами ЯМР, которые можно увидеть в больницах или поликлиниках. Достаточно сказать, что магнит в экспериментах Парселла был создан с использованием утиля, найденного на задворках Бостонской трамвайной компании. При этом он был калиброван настолько плохо, что магнитное поле в действительности имело величину большую, чем требовалось для переворота ядерных моментов при облучении радиоволнами с частотой $\nu = 30$ МГц (частота радиогенератора).

Парселл со своими молодыми сотрудниками тщетно искали подтверждения того, что явление ядерного магнитного резонанса имело место в его экспериментах. После многих дней бесплодных попыток разочарованный и грустный Парселл решает, что ожидаемое им явление ЯМР не наблюдаемо, и дает указание выключить питающий электромагнит ток. Пока магнитное поле уменьшалось, разочарованные экспериментаторы продолжали глядеть на экран осциллографа, где все это время надеялись увидеть желанные сигналы. В некоторый момент магнитное поле достигло необходимой для резонанса величины, и на экране неожиданно появился соответствующий ЯМР сигнал. Если бы не счастливый случай, возможно прошли бы еще многие годы, прежде чем существование этого замечательного явления было бы подтверждено экспериментально.

С этого момента техника ЯМР стала бурно развиваться. Она получила широкое применение в научных исследованиях в областях физики конденсированного состояния, химии, биологии, метрологии и медицины. Наиболее известным применением стало получение с помощью ЯМР изображения внутренних органов.

Как осуществляется визуализация внутренних органов посредством ЯМР

До сих пор мы неявно предполагали, что, в пренебрежении влиянием слабых электронных токов в катушках, магнитное поле, в которое помещаются ядра, однородно, т.е. имеет одну и ту же величину во всех точках. В 1973 году Пол Латербур предложил проводить ЯМР-исследования, помещая образец в магнитное поле, меняющееся от точки к точке. Понятно, что в этом случае и резонансная частота для исследуемых ядер изменяется от точки к точке, что позволяет судить об их пространственном расположении. А поскольку интенсивность сигнала от определенной области пространства пропорциональна числу атомов водорода в этой области, мы получаем информацию о распределении плотности вещества по пространству. Собственно, в этом и заключается принцип техники ЯМР-исследования. Как видите, принцип прост, хотя для получения реальных изображений внутренних органов на практике следовало получить в распоряжение мощные компьютеры для управления радиочастотными импульсами и еще долго совершенствовать методологию создания необходимых профилей магнитного поля и обработки сигналов ЯМР, получаемых с катушек.

Представим себе, что вдоль оси x расположены маленькие заполненные водой сферы (рис.3). Если магнитное поле не зависит от x, то возникает одиночный сигнал (см. рис.3,*а*). Далее предположим, что посредством дополнительных катушек (по отношению к той, которая создает основное, направленное по оси z, магнитное поле) мы создаем дополнительное, меняющееся вдоль оси x, магнитное поле B_0, причем его величина возрастает слева направо. При этом понятно, что для сфер с различными координатами сигнал ЯМР теперь будет соответствовать различным частотам и измеряемый спектр будет содержать в себе пять характерных пиков (см. рис.3,*б*). Высота этих пиков будет пропорциональна количеству сфер (т.е. массе воды), имеющих соответствующую координату, и, таким образом, в рассматриваемом случае интенсивности пиков будут относиться как 3:1:3:1:1. Зная величину градиента магнитного поля (т.е. скорость его изменения вдоль оси x), можно представить измеряемый частотный спектр в виде зависимости плотности атомов водорода от координаты x. При этом можно будет сказать, что там где пики выше, число атомов водорода больше: в нашем примере числа атомов водорода, соответствующих положениям сфер, действительно соотносятся как 3:1:3:1:1.

Расположим теперь в постоянном магнитном поле B_0 некоторую более сложную конфигурацию маленьких заполненных водой сфер и наложим дополнительное магнитное поле, изменяющееся вдоль всех трех осей координат. Измеряя радиочастотные спектры ЯМР и зная величины градиентов магнитного поля вдоль координат, можно создать трехмерную карту распределения сфер (а следовательно, и плотности водорода) в исследуемой конфигурации. Сделать это гораздо сложнее, чем в рассмотренном выше одномерном случае, однако интуитивно понятно, в чем этот процесс заключается.

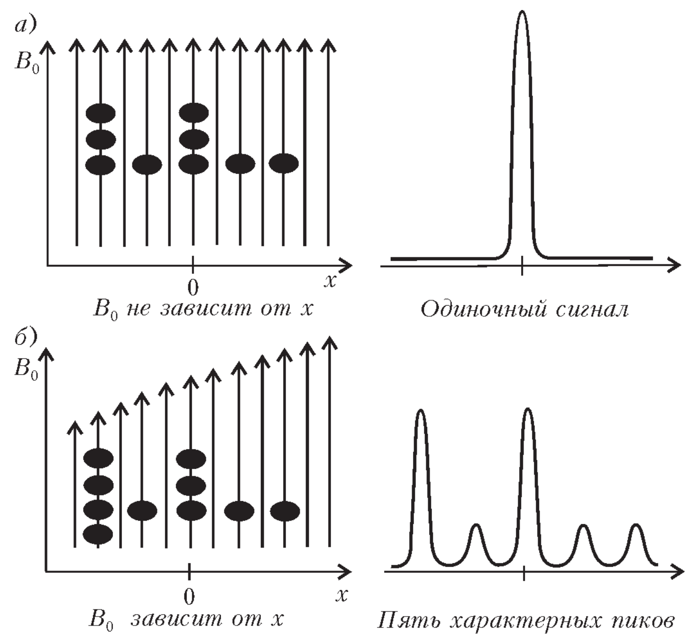


Рис.3. В случае однородного магнитного поля имеется единственный ЯМР-сигнал (а). В случае же меняющегося в пространстве поля сигналы, соответствующие ядрам, расположенным в разных точках, имеют несколько отличающиеся частоты, и спектр позволяет определить их координаты (б)

Техника восстановления образов, сходная с той, которую мы описали, и осуществляется при ЯМР-томографии. Закончив накопление данных, компьютер посредством весьма быстрых алгоритмов начинает «обработку» сигналов и устанавливает связь между интенсивностью измеренных сигналов при определенной частоте и плотностью резонирующих атомов в данной точке тела. В конце этой процедуры компьютер визуализирует на своем экране двумерное (или даже трехмерное) «изображение» определенного органа или части тела пациента.

Поразительные «образы»

Чтобы полностью оценить результаты ЯМР-исследования внутренних органов человека (например, различных сечений головного мозга, которые физик-медик сегодня может получить не дотрагиваясь до черепа!), следует прежде всего понимать, что речь идет о компьютерном воссоздании именно «образов», а не о реальных тенях, возникающих на фоточувствительной пленке при поглощении рентгеновских лучей в процессе получения рентгеновского снимка.

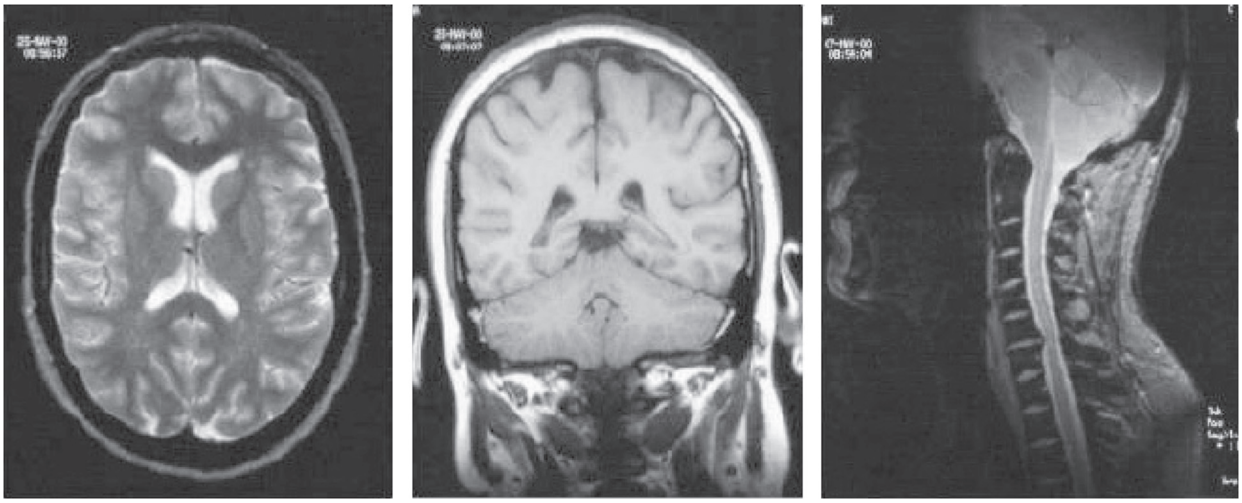


Рис.4. Изображения черепа и позвоночного столба, которые с прекрасной анатомической точностью в зависимости от контраста показывают белую или серую ткань мозга, позвоночник и спино-мозговую жидкость

Человеческий глаз является чувствительным датчиком электромагнитного излучения в видимом диапазоне. К счастью или несчастью, излучения, происходящие от внутренних органов, до наших глаз не доходят – мы видим человеческие тела только извне. В то же время, как мы только что обсуждали, в определенных условиях ядра атомов внутренних органов человеческого тела могут излучать электромагнитные волны в диапазоне радиочастот (т.е. частот, гораздо меньших, чем для видимого света), причем частота слегка меняется в зависимости от точки излучения. Глазом его не увидеть, поэтому такое излучение регистрируется с помощью сложной аппаратуры, а затем собирается в единое изображение с помощью специальной компьютерной обработки. И тем не менее, речь идет о совершенно реальном видении внутренней части предмета или человеческого тела.

К такому поразительному успеху человечество пришло благодаря ряду фундаментальных достижений научной мысли: это и квантовая механика с ее теорией магнитного момента, и теория взаимодействия излучения с веществом, и цифровая электроника, и математические алгоритмы преобразования сигналов, и компьютерная техника.

Преимущества ЯМР-томографии по сравнению с другими диагностическими методами многочисленны и значительны. Оператор может легко выбирать, какие сечения тела пациента просканировать, а также может подвергать исследованию одновременно несколько сечений выбранного органа. В частности, выбирая соответствующим образом градиенты магнитного поля, можно получить вертикальные сечения изображения внутренностей нашего черепа. Это может быть центральное сечение или сечения, смещенные вправо или влево. (Такие исследования практически невозможны в рамках рентгеновской радиографии.) Оператор может «сужать» поле наблюдения, визуализируя сигналы ЯМР, происходящие только от одного выбранного органа или только от одной из его частей, увеличивая таким образом разрешение изображения. Важным преимуществом ЯМР-томографии является также и возможность прямого измерения локальной вязкости и направления течения крови, лимфы и других жидкостей внутри человеческого тела. Подбирая необходимое соотношение между соответствующими параметрами, например длительностью и частотой импульсов, для каждой патологии оператор может достигать оптимальных характеристик получаемого изображения, скажем повышать его контрастность (рис.4).

Суммируя, можно сказать, что для каждой точки изображения (пикселя), соответствующей крошечному объему исследуемого объекта, оказывается возможным извлечь различную полезную информацию, в некоторых случаях включая и распределение концентрации тех или иных химических элементов в организме. Для повышения чувствительности измерений, т.е. увеличения отношения интенсивности сигнала к шуму, следует накапливать и суммировать большое число сигналов. В этом случае удается получить качественное изображение, адекватно передающее реальность. Именно поэтому времена проведения ЯМР-томографии оказываются довольно большими – пациент должен относительно неподвижно пребывать в камере несколько десятков минут.

В 1977 году английский физик Питер Мэнсфилд придумал такую комбинацию градиентов магнитного поля, которая, не давая особенно хорошего качества изображения, тем не менее позволяет получать его чрезвычайно быстро: для соответствующего построения хватает единственного сигнала (на практике это занимает приблизительно 50 миллисекунд). С помощью такой техники – ее называют планарным эхом – сегодня можно следить за пульсациями сердца в реальном времени: в таком фильме на экране чередуются его сокращения и расширения.

Можно ли было представить себе на заре создания квантовой механики, что через сто лет развитие науки приведет к возможности таких чудес?

Нельзя не отметить, что в 2003 году Пол Лотербур и Питер Мэнсфилд были удостоены Нобелевской премии в области медицины «за изобретение метода магнитно-резонансной томографии».