Столкновение самолета с … птицей

В.ВЫШИНСКИЙ

Очень многие школьные задачи по физике начинаются словами типа «шарик массой m ударяется о твердую поверхность…» В нашем же случае роль шарика будет играть отнюдь не абсолютно упругая птица, а роль поверхности – увы, не совсем твердый корпус авиалайнера.

Тяжелый самолет совершал полет на режиме снижения с одним неработающим двигателем. По-видимому, в результате столкновения с птицей произошло разрушение радиопрозрачного обтекателя антенны. Разлетевшиеся осколки, по-видимому, попали в воздухозаборники двигателей, что, по-видимому, одновременно включило автоматику на перезапуск двигателей. Оказавшись без тяги, самолет не смог сохранить безопасную высоту и врезался в землю.

В летных происшествиях, и особенно в катастрофах, многое так и остается не выясненным до конца. По статистике, столкновение с птицей как причина летного происшествия стоит на третьем месте после отказов материальной части (самолета и двигателей) и человеческого фактора (ошибок экипажа).

Существуют специальные экспериментальные установки (пневматические пушки) для проверки самолета на прочность в случае столкновения с птицей. Их заряжают тушками птицы (скорость вылета тушки 100–300 м/с). Стандартным «снарядом» по международным нормам является птица массой 1,8 кг (обычно используют свежезабитых кур, хотя, как будет видно из дальнейшего, они весьма посредственно моделируют столкновение с хорошими летунами). Конструкция самолета должна выдерживать удар птицы, летящей со скоростью, равной скорости полета самолета на тех высотах, на которых встречаются птицы.

Известен курьезный случай, когда молодой экспериментатор, видимо из соображений экономии, зарядил установку мороженной курицей и …пробил остекление кабины пилота, прошедшее предварительные испытания. Когда разобрались, поняли, что дело не в остеклении, а в тушке птицы. Птица должна быть если не живой, то хотя бы не мороженной. Экспериментатору объявили выговор, остекление заменили, а мы попытаемся разобраться, в чем же дело.

В качестве модели будем рассматривать удар жидкой капли о жесткую преграду. С момента касания преграды в капле со скоростью v_1 распространяется волна сжатия (ударная волна). При достижении свободных границ от них распространяются волны разрежения (разгрузки), их скорость обозначим v_2. Схематично для тела цилиндрической формы происходящее изображено на рисунке 1. За фронтом ударной волны (в пространстве между ударной волной и преградой до фронтов волн разгрузки) формируется область высокого давления. Время действия высокого давления на преграду весьма ма́ло и определяется временем достижения волной разгрузки места касания (порядка времени прохождения волной расстояния от ближайшей свободной границы до области касания). Таким образом, имеются короткий пик и продолжительный установившийся участок повышенного давления (рис.2).

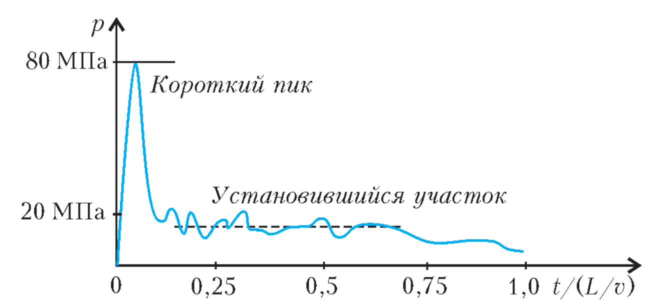

Рис.2. Давление при ударе цилиндрического тела, движущегося со скоростью 197 м/с, о тяжелую стальную плиту (деформацией плиты можно пренебречь) в зависимости от времени

Тело птицы состоит из мягких тканей (более 50% массы тела), скелета (менее 10%) и жидкости (около 40%), причем чем лучше летные качества птицы, тем меньше массовая доля скелета. Прочность костей существенно ниже величины давления при ударе. При больших скоростях столкновения тело, имеющее упруго-вязко-пластичные свойства, будет проявлять в первом приближении гидродинамические свойства (подобно удару капли или струи жидкости о преграду). Плотность мышечных тканей около 1,06 $г/см^3$, объемная плотность (из-за наличия полостей) ниже – около 0,87–0,9 $г/см^3$.

«Конструкция» птиц может быть очень легкой. Так, масса скелета фрегата при размахе крыльев 2 м всего лишь 100 г, что меньше суммарной массы его перьев! Более того, для того чтобы обеспечить правильную центровку, череп птиц имеет «прекрасно сконструированную» костистую полую структуру. Даже большой череп вороны весит менее 1% суммарного веса птицы. Тяжелые зубы отсутствуют, их роль выполняет зоб – расположенный вблизи центра масс мускульный мешок, в который на земле набираются камешки для измельчения пищи (в дальний перелет эти «зубы» не берутся).

Птицы нуждаются в быстром обмене веществ, скорость которого удваивается с повышением

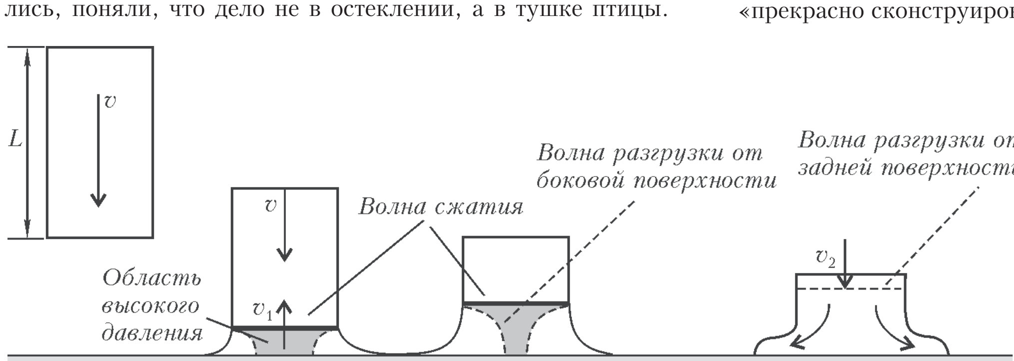

Рис.1. Столкновение цилиндрического тела с преградой (L – длина цилиндра)

температуры на 10 °С. Следствием быстрого обмена веществ является высокое потребление кислорода, что обеспечивается сложной конструкцией легких, соединенных с системой воздушных мешков, расположенных в различных частях тела, включая полые кости. Это помогает легким в нагнетании воздуха и используется в системе охлаждения. Так, летящий голубь использует четверть вдыхаемого воздуха для дыхания, а остальной – для охлаждения. Дыхательная система утки занимает 20% объема тела (для сравнения, у человека всего лишь 5%), из них 18% приходятся на воздушные мешки и только 2% на собственно легкие.

Пористость среды существенно снижает скорость ударной волны (см., например, статью А.Стасенко «Звук в пене» в «Кванте» №4 за 2004 г.). В теле птицы жидкая фаза разделена клеточной структурой (мембранами клеток) и большими воздушными полостями дыхательной системы и системы охлаждения, что увеличивает сжимаемость и уменьшает скорость ударной волны. Поэтому при скоростном ударе ($v > 100$ м/с) в основном имеет место сверхзвуковое взаимодействие биомассы птицы с мишенью.

Кинограммы скоростной съемки удара сферической капли о плоскую преграду показывают, что задняя часть капли сохраняет прежнюю форму, в то время как передняя деформируется и растекается по преграде. Фронт ударной волны, возникающей в капле при касании мишени, достигает задней части практически одновременно с достижением этой частью мишени, т.е. продолжительность удара определяется временем пролета капли своей длины, т.е. отношением L/V (L – длина тела птицы).

В первом приближении можно использовать одномерную модель движения для оценки максимального возникающего давления $p_{\max}$ за время действия Δt. Масса жидкости на единицу площади преграды, заторможенная при ударе, равна $\rho v_1 \Delta t$, где ρ – плотность жидкости, v_1 – скорость ударной волны (вот почему важно знать пористость и состояние среды «снаряда»). Импульс (количество движения) этой массы равен $\rho v_1 \Delta t v$, где v – скорость жидкости до удара о преграду. Импульс силы равен изменению импульса тела, поэтому

$$p_{\max}\Delta t = \rho v_1 \Delta t v .$$

Отсюда для оценки ударного давления, так называемого давления Гюгонио, получаем

$$p_{\max} = \rho v_1 v .$$

Время действия этого давления мало по сравнению с полным временем удара жидкого объема.

Оценим скорость ударной волны при ударе о преграду, используя данные рисунка 2:

$$p_{\max} = 80 \text{ МПа} = 80 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 , \quad \rho = 900 \text{ кг/м}^3 ,$$

$$v = 197 \text{ м/с} , \text{ и } v_1 = \frac{p_{\max}}{\rho v} = 451 \text{ м/с} .$$

После прихода волны разгрузки устанавливается так называемое квазиструйное течение. На этой фазе давление (струи на неподвижную преграду) можно оценить из закона сохранения энергии. Работа силы давления pS за время Δt равна энергии торможения столба жидкости длиной $v\Delta t$ и площадью S:

$$pSv\Delta t = \frac{Sv\Delta t \rho v^2}{2} , \text{ откуда } p = \frac{\rho v^2}{2} .$$

Данное соотношение верно, строго говоря, только для центральной струйки, которая полностью гасит свою кинематическую энергию. Оценим это давление:

$$p = 900 \text{ кг/м}^3 \cdot \frac{(197 \text{ м/с})^2}{2} = 17{,}5 \text{ МПа}$$

(сравните с данными рисунка 2).

Для справки, скорость звука при 20 °С в воде 1482,7 м/с, в стали 5000–5200 м/с (одномерная волна в стержне) или 5680–6100 м/с (продольная волна). В частности, очевидно, что давление Гюгонио для стальной болванки при тех же скоростях столкновения будет раза в четыре выше. Скорость звука при 0 °С во льду 3280 м/с (одномерная волна в стержне) или 3980 м/с (продольная волна). Так что мороженая курица создала бы при тех же условиях приблизительно в 7,3 раза большее максимальное давление.

Следует помнить, что ударная волна (сильные возмущения) распространяется в среде с большей скоростью, чем звуковая волна (малые возмущения). Так, скорость ударной волны в воде при 20 °С равна 3354 м/с при перепаде давления в волне $\Delta p = 3140$ МПа $= 32000$ атм. На рисунке 3 приведен график зависимости скорости ударной волны в

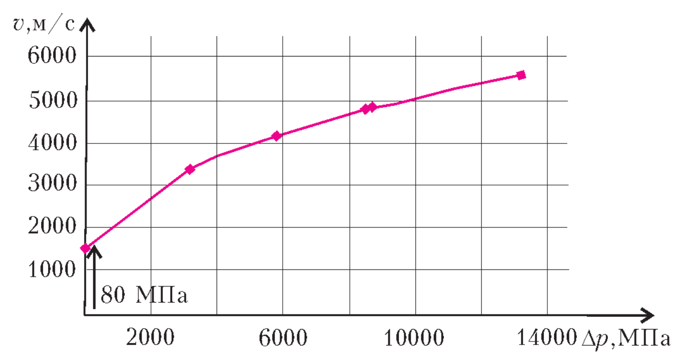

Рис.3. Скорость ударной волны в зависимости от перепада давления на ней (справочные данные)

воде от перепада давления (величины возмущения). Таким образом, случай, соответствующий рисунку 2, т.е. $\Delta p \sim p_{\max} = 80$ МПа, близок к малым возмущениям, и для оценок можно использовать скорость звука (но не в воде!). У нас из-за пористости среды получилось $v_1 = 451$ м/с, для воды было бы в 3,3 раза выше – около 1500 м/с.

Но, конечно, птица – не совсем круговой цилиндр, и одномерная модель является весьма грубой. Поэтому более строгая математическая модель удара птицы о преграду использует жидкий объем в форме эллипсоида вращения. Кроме того, податливость преграды уменьшает давление: $p = \rho(v - w)^2/2$, где w – скорость преграды (эту формулу предлагается получить самостоятельно). Можно рассмотреть еще случай косого удара. Здесь разумно взять нормальную к поверхности преграды составляющую скорости и для оценок использовать те же формулы.

Желаем успеха!

Игры

В этом калейдоскопе мы собрали несколько математических игр, многие их которых уже вошли в фольклор математических кружков.

Во всех наших играх всегда играют двое, ходы делают по очереди. Проигрывает (если про это ничего не сказано) тот, кто не может сделать ход.

Для краткости мы не будем в каждой задаче приводить один и тот же вопрос: кто из игроков — начинающий или его партнер — может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл другой? (Иногда этот вопрос кратко формулируют так — кто выигрывает при правильной игре?) Если в задаче ничего не спрашивается, то этот вопрос подразумевается.

Некоторые задачи мы разбираем, остальные оставляем для самостоятельного решения. Играйте!

Нечестные игры

Бывают игры, в которых результат не зависит от действий игроков — играть в них неинтересно.

1. *Коля и Вася по очереди ломают шоколадку 6×8. Начинает Коля, за ход любой из имеющихся кусков ломается по прямой (вдоль углубления) на два куска. Выигрывает тот, кто сделал последний разлом.*

Заметим, что после каждого разлома число кусков шоколадки увеличивается на 1. Сначала был один кусок, а в конце их будет 48. После ходов Коли всегда получается четное число кусков, а после ходов Васи — нечетное. Значит, выиграет Коля.

2. *Петя и Вася играют в игру: есть кучка из 777 спичек, за ход берут 7 или 77 спичек. Начинает Петя.*

Симметрия

Иногда игрок выигрывает с помощью «симметричной стратегии»: например, дублирует ход соперника.

3. *Малыш и Карлсон по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга. Начинает Карлсон.*

Пусть Карлсон первым ходом положит пятак в центр стола. Тогда на каждый ход Малыша он сможет положить пятак симметрично пятаку Малыша относительно центра стола (рис. 1), и пока ходы есть у Малыша, они будут и у Карлсона.

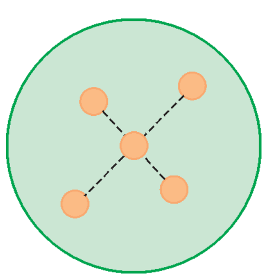

Рис. 1

4. *Есть две кучи камней: а) в каждой по 20; б) в одной — 30, в другой — 20. Двое по очереди берут любое число камней из любой кучи (но не из двух сразу). в) А если есть 3 кучи (или 4 кучи) по 20 камней?*

5. *У ромашки а) 12; б) 11 лепестков. В свой ход игрок обрывает 1 или 2 рядом растущих лепестка.*

6. *Двое играют на доске $m\times n$. В первом столбце стоят фишки первого игрока, а в последнем столбце — фишки второго. На своем ходу игрок может передвинуть свою фишку в строке, не отрывая ее от доски, в любую сторону на любую свободную клетку (перепрыгивать через другие фишки запрещено).*

Ответный ход

В задачах этого раздела можно указать стратегию игрока, который выигрывает. Чтобы ее найти, полезно бывает рассмотреть частные случаи или упростить задачу (например, решить задачу 9 сначала для случая, когда в коробке 12, 13, 14, ... конфет).

7. *В куче 2010 камней. Двое по очереди берут себе по а) 1 или 2; б) 1 или 3; в) 1 или m камней.*

В пункте а) второй игрок всегда может своим ходом дополнять число только что взятых соперником камней до 3. Тогда после хода второго число камней всегда будет делиться на 3, а после хода первого — нет. Так как 2010 делится на 3, последний ход сделает второй игрок.

8. *На крайней правой клетке доски 1×20 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают эту фишку (вправо или влево) на любое число клеток, которое еще не встречалось при выполнении предыдущих ходов.*

9. *В коробке 100 конфет. Двое по очереди берут себе из коробки 1, 10 или 11 конфет.*

10. *Дана полоска 1×2009. а) В двух; б) в трех; в) в n самых правых клетках стоит по фишке. Игрок своим ходом переставляет одну из фишек влево на любую незанятую клетку (можно перепрыгивать через другие фишки).*

Разберем пункт а) этой задачи. Разделим полоску, как показано на рисунке 2, на доминошки размером 1×2, начиная с самой левой клетки, и еще одна клетка будет в остатке (самая правая).

Рис. 2

Первый выиграет, если будет придерживаться такой стратегии: каждым ходом он должен переставлять правую фишку в ту же доминошку, где стоит другая фишка.

Анализ с конца

Назовем позиции, из которых игрок выигрывает одним ходом, *выигрышными*. Если игрок своим ходом обязательно попадает в такую позицию, то он находится в *проигрышной* позиции (после его хода соперник выиграет). Если же игрок своим ходом может попасть в проигрышную позицию, то он в выигрышной позиции (сможет выиграть). Последовательно находя выигрышные и проигрышные позиции, *начиная с конца*, можно узнать, кто выиграет, и найти стратегию.

11. *В левом нижнем углу шахматной доски 8×8 стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске на одну клетку либо вправо, либо вверх, либо по диагонали «вправо–вверх».*

Если король стоит в правом верхнем углу доски и ход наш, то мы проиграли. Отметим эту позицию буквой «П», как проигрышную. Пусть теперь король стоит на одной из трех клеток, соседних с только что отмеченной. Тогда мы можем смело ходить на проигрышную клетку. Ведь будет ход соперника и он проиграет! Поэтому отметим эти три клетки буквой «В», как выигрышные (рис. 3,*а*).

Теперь можем отметить еще две клетки буквой «П» (рис. 3,*б*), так как с них можно сделать ход только на выигрышные клетки. Продолжая заполнять доску (рис. 3,*в*), дойдем до левой нижней клетки. Там будет буква «В» (проверьте). Значит, выигрывает первый.

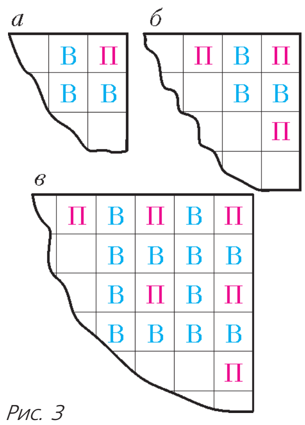

Рис. 3

12. *В коробке 300 спичек. Двое по очереди берут из коробка не более половины имеющихся в нем спичек.*

13. *Ферзь стоит в левом нижнем углу клетчатой доски 10×12. Двое по очереди передвигают его по доске на любое число клеток вправо, вверх или по диагонали «вправо–вверх».*

Геометрия

14. *В клетчатом квадрате 10×10 двое по очереди ставят фигурки. Первый ставит квадрат 2×2, второй – уголок из трех клеток (так, что фигурки занимают целое число клеток и не перекрываются).*

В этой задаче не помогут обычные приемы. Но решается она очень просто. Пусть после начального хода первого игрока второй поставит «уголок» рядом с одним из углов доски так, как показано на рисунке 4 (это, очевидно, всегда возможно). Прямо над поставленным «уголком» есть место из трех клеток как раз еще для одного «уголка», причем ни одну из этих клеток не может занять первый игрок. Пусть второй будет далее ходить по правилам куда угодно, не занимая только ни одной из тех трех клеток над первым своим «уголком», пока это возможно. Если вдруг он не может сделать такого хода, то на доске не осталось места и для хода первого игрока. Тогда второй ставит «уголок» над первым своим «уголком» и выигрывает.

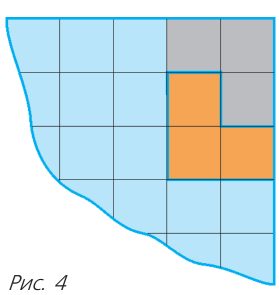
Рис. 4

15. *На бесконечной доске играют в крестики-нолики. Выиграет тот, кто поставит 5 своих знаков в ряд по вертикали или горизонтали. Докажите, что при правильной игре второй а) не выиграет; б) не проиграет.*

Решим пункт б). Разобьем доску на доминошки так, как показано на рисунке 5. Заметим, что любой ряд из пяти клеток на доске целиком содержит какую-то доминошку. Докажите, что второй не проиграет, если каждым своим ходом будет ставить нолик в ту доминошку, куда только что поставил крестик первый игрок.

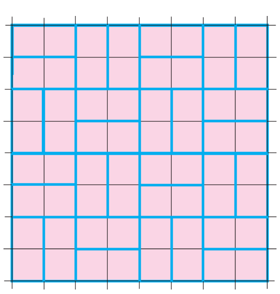
Рис. 5

16. *На клетчатой доске 2009×2009 в центре стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку на одну из соседних (по стороне) клеток, если эта клетка ранее ни разу не была занята фишкой.*

Передача хода

В задачах этого раздела можно узнать, кто выигрывает при правильной игре, не указывая стратегию. Подумайте, почему в этих играх у одного из игроков стратегия вообще существует (выигрышная или не проигрышная).

17. *(Двойные шахматы) Двое играют в шахматы, но делают по два хода сразу. Есть ли у второго выигрышная стратегия?*

Предположим, что второй игрок имеет выигрышную стратегию. Пусть первый игрок начнет с хода конем «туда-обратно». На доске ничего не изменится, но ход перейдет ко второму игроку, и игроки как бы поменяются местами. И получается, что уже другой игрок имеет выигрышную стратегию. Поэтому второй не сможет выиграть (если первый будет играть правильно).

18. *Прямоугольная шоколадка разделена бороздками на дольки. Игрок своим ходом выбирает любую еще не съеденную дольку и съедает ее вместе со всеми дольками, расположенными от выбранной не ниже и не левее. Съевший последнюю дольку проигрывает.*

19. *Написаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. За ход игрок вычеркивает какое-нибудь число и все его делители.*

20. *Фома и Ерема делят 25 монет в 1, 2, ..., 25 алтынов. За ход один выбирает монету, а другой говорит, кому ее отдать. Сначала выбирает Фома, далее – тот, у кого больше алтынов, при равенстве – тот, кто и в прошлый раз. Может ли Фома играть так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерема?*

Разное

21. *Белая ладья преследует черного слона на доске размером 3×100 (ходят по очереди по обычным правилам, начинают белые). Как играть ладье, чтобы взять слона?*

22. *Король за ход ставит по крестику в любые две свободные клетки бесконечного листа бумаги. Министр за ход ставит нолик в любую свободную клетку. Сможет ли король поставить 100 крестиков в ряд?*

23. *(Игра «Ним») Имеется три кучки камней: а) 7, 8 и 9; б) любые кучки. Двое по очереди берут любое количество камней из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень.*

24. *Сначала на доске написано число 2009!. Игрок в свой ход вычитает из написанного числа какое-нибудь натуральное число, которое делится не более чем на 20 разных простых чисел (так, чтобы разность была неотрицательна), записывает на доске эту разность, а старое число стирает. Выигрывает тот, кто получит 0.*

Исследовательская задача *(А.Перепечко). В куче N камней. Двое берут камни по очереди. На первом ходу первый игрок берет один камень. Каждым следующим ходом игрок берет либо столько же камней, сколько брал его соперник на предыдущем ходу, либо на один больше.*

Решение этой задачи нам неизвестно.

Материал подготовили
С.Дориченко, М.Прасолов

От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни

Д.ШВЕЦОВ

Элементарная геометрия буквально усыпана красивыми жемчужинами, которые доставляют огромное удовольствие тем, кто ими любуется. Тем поразительнее, что и сами по себе эти факты могут выступать в качестве вспомогательных утверждений для доказательства других теорем.

Прямая Уоллеса–Симсона

Начнем мы наш тур с *прямой Симсона.* [1]

Основания перпендикуляров, опущенных из точки S описанной окружности треугольника ABC на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой, которая называется прямой Симсона точки S относительно треугольника ABC (рис.1).

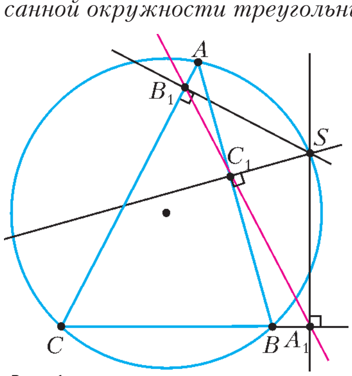

Рис. 1

Доказательство. Если мы покажем, что $\angle B_1C_1A = \angle BC_1A_1$, то наше утверждение будет доказано. В доказательстве во всей красе показывает себя метод «вспомогательной окружности». Что это значит?

Краткости ради введем обозначения: $\angle B_1C_1A = \alpha$ и $\angle BC_1A_1 = \beta$ (рис.2). Точки B_1, C_1, A и S лежат на одной окружности с диаметром AS (почему?). Следовательно,

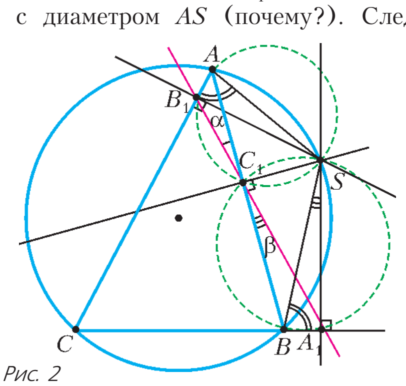

Рис. 2

[1] Открытие этой прямой долго приписывалось Роберту Симсону (1687–1768), но в действительности она была открыта лишь в 1797 году Вильямом Уоллесом (1768–1843).

$\angle B_1C_1A = \angle B_1SA = \alpha$ (так как оба этих угла «смотрят» на дугу B_1A). Тогда из треугольника B_1SA заметим, что $\angle B_1AS = 90° - \alpha$. Четырехугольник $CASB$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle CAS + \angle CBS = 180° \Rightarrow \angle SBC = 90° + \alpha \Rightarrow \angle SBA_1 = 90° - \alpha.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника SBA_1 находим, что $\angle BSA_1 = \alpha$. Осталось лишь заметить, что точки C_1, B, A_1 и S лежат на одной окружности с диаметром BS. Откуда следует равенство углов $\angle BSA_1 = \angle A_1C_1B$ (оба «смотрят» на дугу BA_1). Таким образом, получили, что $\alpha = \beta$.

Нам удалось доказать теорему.

Упражнение 1. Две окружности пересекаются в точках M и N. Через точки M и N проводятся прямые, пересекающие окружности в точках A и B, C и D соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$.

Верно и обратное утверждение.

Если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки S на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, то точка S лежит на описанной окружности треугольника.

Упражнение 2. Докажите это.

Прямая Симсона обладает многими свойствами, некоторые из них сформулированы в виде задач в конце статьи.

Оказывается, существует *обобщение прямой Симсона*.

Проекции точки P описанной окружности четырехугольника ABCD на прямые Симсона этой точки относительно треугольников BCD, CDA, DAB и BAC лежат на одной прямой (прямая Симсона вписанного четырехугольника).

Доказательство. Обозначим через B_1, C_1 и D_1 проекции точки P на прямые AB, AC и AD (рис.3). Опять же замечаем, что точки A, B_1, P, C_1 и D_1 лежат на одной окружности с

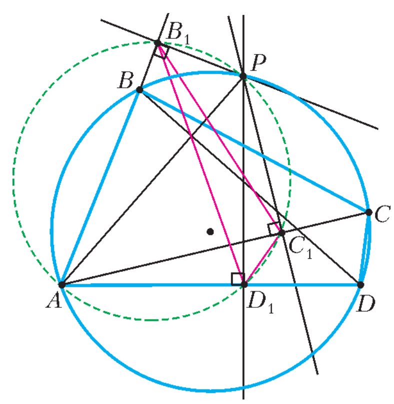

Рис. 3

диаметром AP. С другой стороны, вспомнив определение прямой Симсона для треугольника, получим, что прямые B_1C_1, C_1D_1 и D_1B_1 являются прямыми Симсона точки P относительно треугольников ABC, ACD и ADB соответственно. Теперь – последнее усилие.

Заметим, что проекции точки P на прямые Симсона этих треугольников лежат на одной прямой – прямой Симсона треугольника $B_1C_1D_1$. Точно так же можно показать, что на одной прямой лежит любая тройка рассматриваемых точек, следовательно, и все они лежат на одной прямой.

Любовь к обобщениям привела исследователей к следующему результату.

По индукции можно определить прямую Симсона вписанного n-угольника как прямую, содержащую проекции точки

P на прямые Симсона всех $(n-1)$-угольников, полученных выбрасыванием одной из вершин n-угольника.

Для примера разберем прямую Симсона для пятиугольника. Итак, пусть есть пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Сначала «выбрасываем» вершину A_1, тогда останется четырехугольник $A_2A_3A_4A_5$, а для него прямая Симсона уже определена. Аналогично возникают еще четыре прямые Симсона (по очереди выбрасываем вершины A_2, A_3, A_4, A_5). Так вот, проекции произвольной точки P описанной окружности на эти пять прямых лежат на одной прямой. Аналогичное утверждение верно и для произвольного n-угольника.

Упражнение 3. Докажите это утверждение для пятиугольника.

Прямая Штейнера

С прямой Симсона естественным образом связана другая прямая – *прямая Штейнера*.

Точку R описанной окружности треугольника ABC отразили симметрично относительно сторон треугольника. Полученные три точки будут лежать на одной прямой, которая называется прямой Штейнера точки R относительно треугольника ABC.

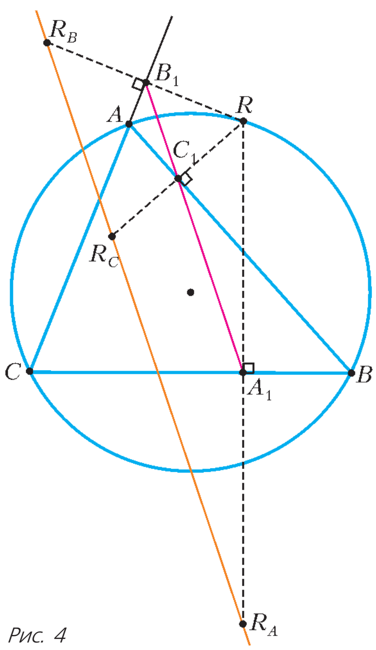

Рис. 4

Для начала поймем, почему же эти точки будут лежать на одной прямой (рис.4). Точки B_1, C_1, A_1 лежат на одной прямой, ибо это прямая Симсона. Точки же R_B, R_C, R_A находятся от точки R в два раза дальше, чем точки B_1, C_1, A_1, поэтому они тоже лежат на одной прямой, причем она параллельна прямой Симсона.

Чем же интересна прямая Штейнера?

Прямая Штейнера проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника.

Доказательство. Здесь уже совсем просто не получится, нужны некоторые «хитрости». Итак, пусть прямая Штейнера точки R относительно треугольника ABC пересекает высоту CC' в точке H (рис.5). Наша цель – показать, что точка H есть ортоцентр. Как это сделать, сразу не разглядеть. Но оказывается, что ортоцентр обладает следующим свойством-признаком.

Если ортоцентр треугольника отразить симметрично относительно сторон треугольника, то полученные точки лежат на описанной окружности треугольника.

Докажем это свойство. Нам достаточно показать, что $\angle ACB + \angle AQB = 180°$ (рис.6).[2] Но $\angle CB'H + \angle CA'H = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \angle B'CA' + \angle A'HB' = 180° \Rightarrow \angle B'CA' + \angle AHB = 180°$. А вот точку Q мы получали в результате

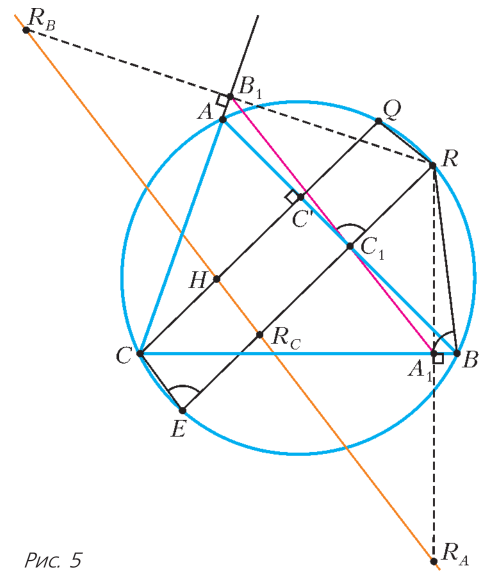

Рис. 5

симметричного отражения точки H, следовательно, $\angle AHB = \angle AQB$, а поэтому $\angle ACB + \angle AQB = 180°$.

Упражнение 4. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

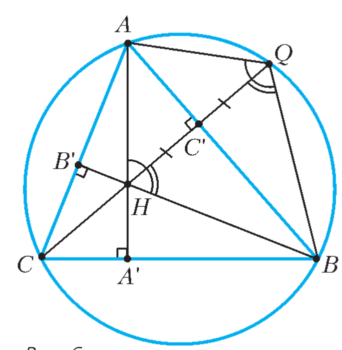

Рис. 6

Это свойство ортоцентра сыграет ключевую роль в нашем доказательстве.

Вспомним, что при доказательстве теоремы Симсона (самой первой теоремы) было показано, что четырехугольник RC_1A_1B вписанный, т.е. $\angle A_1BR + \angle A_1C_1R = 180°$, но $\angle A_1C_1R + \angle B_1C_1R = 180°$ (смежные углы) $\Rightarrow \angle B_1C_1R = \angle A_1BR$. Продлим RC_1 до пересечения с исходной окружностью в точке E. Теперь видим, что $\angle CER = \angle CBR$, ибо оба угла опираются на дугу CR. Поэтому $\angle CER = \angle B_1C_1R$, что, в свою очередь, говорит о параллельности прямых CE и B_1C_1. Однако прямые Штейнера и Симсона параллельны, т.е. $HR_C \parallel B_1C_1$.

Теперь посмотрим на четырехугольник $CERQ$ (рис. 7), где Q – точка пересечения продолжения высоты CC' с окружностью. Во-первых, этот четырехугольник является трапецией, ибо $CC' \perp C'C_1$, $ER \perp C'C_1$. Во-вторых, раз эта трапеция вписана в окружность, то трапеция равнобокая, т.е. $CE = QR$. Сейчас же видим, что четырехугольник HR_CEC является параллелограммом, так как $CH \parallel ER_C$, $CE \parallel HR_C$, следовательно, $CE = HR_C$, поэтому четырехугольник HR_CRQ – равнобокая трапеция. Вспомнив же, что C_1 – середина отрезка R_CR (так мы определяли точку R_C) и $C'C_1 \perp RR_C$, несложно понять, что $HC' = C'Q$. Наконец, используя «свойство-признак» для ортоцентра, получим что точка H является ортоцентром треугольника ABC.

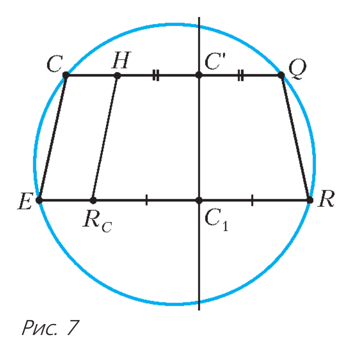

Рис. 7

[2] Здесь мы воспользуемся таким утверждением: *вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма величин его противоположных углов равна 180°.*

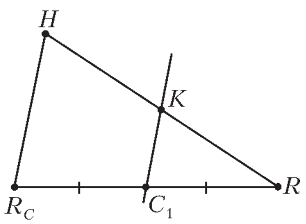

Рис. 8

Следствие 1. *Пусть точка R лежит на описанной окружности треугольника ABC, H – ортоцентр треугольника ABC. Прямая Симсона точки R делит отрезок RH пополам.*

Доказательство. В предыдущем доказательстве мы показали, что прямая Симсона точки R (C_1K на рисунке 8) параллельна прямой HR_C. Стало быть, глядя на треугольник R_CHR, по теореме о средней линии получим, что $HK = KR$.

Следствие 2. *Три прямые, симметричные прямой Штейнера точки R относительно сторон треугольника, пересекаются в точке R.*

Упражнение 5. Докажите этот факт.

Из второго следствия вытекает, что если через ортоцентр треугольника провести произвольную прямую, то прямые, симметричные ей относительно сторон треугольника, будут пересекаться в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника.

Точка Микеля

Пусть даны четыре прямые общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). При пересечении любых трех из них образуется треугольник.

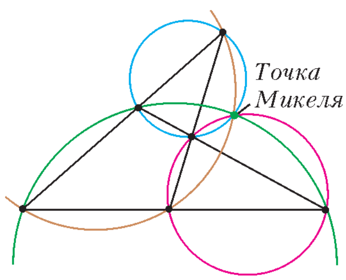

Рис. 9

Описанные окружности четырех получившихся треугольников имеют общую точку, которую называют точкой Микеля данных четырех прямых (рис.9).

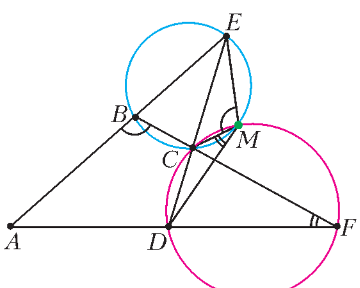

Рис. 10

Доказательство. Пусть описанные окружности треугольников BEC и CDF пересекаются в точке M (рис.10). Покажем, что эта же точка M лежит на описанной окружности треугольника AED, т.е. что четырехугольник $AEMD$ является вписанным. Для этого опять достаточно показать, что $\angle EAD + \angle EMD = 180°$. Из вписанности четырехугольника $BEMC$ заключаем, что $\angle EMC + \angle EBC = 180° \Rightarrow \angle ABC = \angle EMC$ (ведь $\angle EBC + \angle ABC = 180°$). Посмотрев же на вписанный четырехугольник $MCDF$, видим, что $\angle CMD = \angle CFD$ (опираются на дугу CD). Значит, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\angle EAD + \angle EMD = \angle BAF + \angle EMC + \angle CMD = \\ = \angle BAF + \angle ABF + \angle AFB = 180°,$$

так как это углы треугольника ABF. Аналогично можно показать, что и описанная окружность треугольника ABF проходит через точку M. Доказательство завершено.

Как и прямая Симсона, точка Микеля обладает интересными свойствами, некоторые из них представлены в конце статьи в качестве задач.

Родственную задачу для геометрии треугольника можно сформулировать следующим образом.

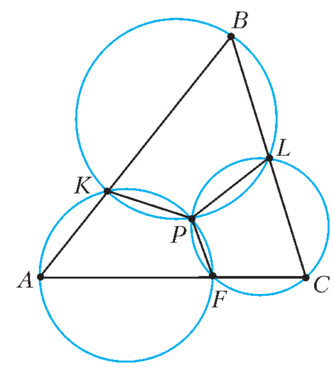

Рис. 11

Лемма. *Если на каждой стороне треугольника отметить по одной точке и через каждую вершину треугольника и отмеченные точки на смежных сторонах провести окружность, то три эти окружности пересекутся в одной точке (рис.11).*

Доказательство похоже на то, которое мы видели только что: нужно совершить «круиз по углам». Пусть описанные окружности треугольников AKF и BKL пересекаются в точке P. Как и выше, покажем, что окружность, описанная вокруг треугольника FCL, проходит через точку P, для чего достаточно показать равенство $\angle PFC + \angle PLC = 180°$. Из вписанности четырехугольников и свойств смежных углов получаем цепочку равенств: $\angle AKP + \angle AFP = 180° \Rightarrow \angle AKP = \angle PFC$. Аналогично, $\angle BKP + \angle BLP = 180° \Rightarrow \angle BKP = \angle PLC$, но $\angle AKP + \angle BKP = 180°$, а значит, и равные им углы также дают в сумме $180°$.

Теорема Дроз-Фарни

В 1899 году Арнольд Дроз-Фарни опубликовал без доказательства следующую теорему.

Теорема. *Пусть две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через ортоцентр треугольника, высекают на прямых, содержащих стороны треугольника, три отрезка. Середины этих трех отрезков лежат на одной прямой (рис.12).*

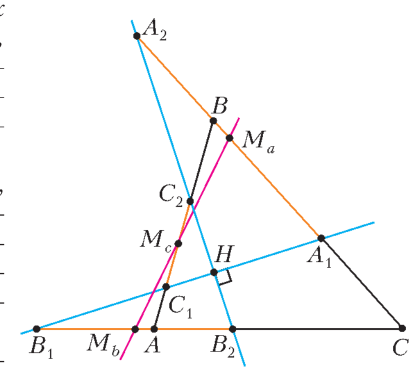

Рис. 12

Оказывается, факты, изложенные выше, причудливым образом переплетаются при доказательстве этой жемчужины геометрии.

Доказательство. Отразим ортоцентр H относительно сторон треугольника, полученные точки обозначим H_a, H_b и H_c (на рисунке 13 точка H_c не изображена).

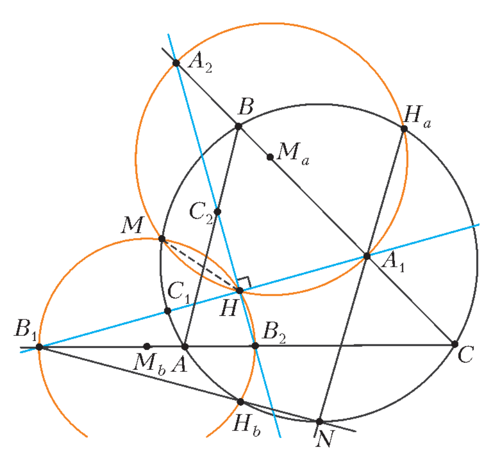

Рис. 13

Далее, построим на отрезках A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, как на диаметрах, окружности. Назовем их Ω_A, Ω_B, Ω_C. Отметим, что точка H попадает на все эти три окружности (почему так?). Точки же M_a, M_b и M_c являются центрами этих окружностей, так как они середины диаметров. К тому же точки H_a, H_b и H_c лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC («свойство-признак» для ортоцентра). Согласно следствию 2 из сюжета о прямой Штейнера получаем, что прямые B_1H_b и A_1H_a пересекаются на описанной окружности треугольника ABC, обозначим точку пересечения через N.

Осталось последнее усилие. Рассмотрим треугольник B_1NA_1 и точки H_b, H, H_a, которые лежат на его сторонах (или их продолжениях). Применив для него лемму из предыдущей части, получаем, что описанная окружность треугольника ABC и окружности Ω_A, Ω_B пересекаются в одной точке M. Аналогично получим, что и окружность Ω_C проходит через ту же самую точку M! Суммируя все, получим, что три окружности Ω_A, Ω_B, Ω_C пересекаются в двух общих точках M и H (рис.14). Но центр каждой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде MH. Тем самым, все три точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой.

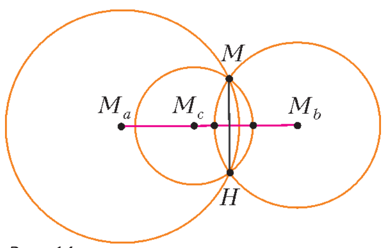

Рис. 14

Заключение

Элементарная геометрия *никогда* не стоит на месте. Не так давно румынский математик Космин Похоата и болгарский математик Николай Белухов разными путями доказали следующее обобщение теоремы Дроз-Фарни.

Дан треугольник ABC, точка P и проходящая через нее прямая d. Прямая, симметричная AP относительно d, пересекает BC в точке A'. Точки B', C' определены аналогично. Тогда A', B', C' лежат на одной прямой (рис.15).

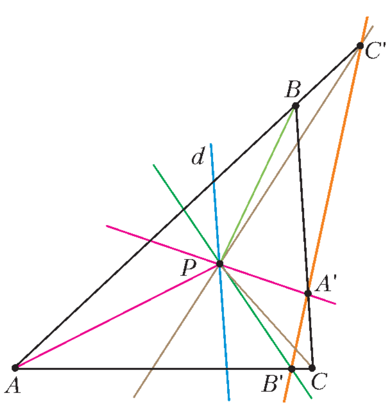

Рис. 15

Известные доказательства не совсем элементарны в том смысле, что используют *геометриию коник* и *проективные преобразования*. Поэтому здесь мы не будем приводить доказательства. Если в качестве P взять ортоцентр треугольника и в качестве d взять биссектрису между перпендикулярными прямыми, то получим обычную теорему Дроз-Фарни. Действительно, в прямоугольном треугольнике B_1HB_2 (см. рис.12) биссектриса угла B_1HB_2 также делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины H. Поэтому после симметрии относительно биссектрисы угла B_1HB_2 прямая BH перейдет в прямую HM_b. Аналогично для двух других пар прямых.

Другое обобщение теоремы Дроз-Фарни можно найти в задаче 12.

Задачи

Предлагаем вам для самостоятельного решения задачи о прямой Симсона и точке Микеля. Некоторые из них считаются классикой, другие менее известны.

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и из точки D опущены перпендикуляры DB_1 и DC_1 на прямые AC и AB; точка M лежит на прямой B_1C_1, причем $DM \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_1.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность; l_a – прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD, прямые l_b, l_c и l_d определяются аналогично. Докажите, что эти четыре прямые пересекаются в одной точке.

4. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P.

5. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности Эйлера.[3]

6. Докажите, что существуют ровно три точки на описанной окружности, для которых прямая Симсона касается окружности Эйлера, причем эти точки образуют равносторонний треугольник.

7. Докажите, что прямая Симсона точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна прямым, симметричным прямым PA, PB, PC относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC соответственно.

8 (А.Акопян, LXIX Московская математическая олимпиада). Дан треугольник ABC и точки P и Q, лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a. Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A_1. Точки B_1 и C_1 строятся аналогично. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

9. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля данных прямых.

10. Прямая пересекает стороны AB, BC и CA треугольника (или их продолжения) в точках C_1, B_1 и A_1; O, O_a, O_b и O_c – центры описанных окружностей треугольников ABC, AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C; H, H_a, H_b и H_c – ортоцентры этих треугольников. Докажите, что:

а) треугольники $O_aO_bO_c$ и ABC подобны;

б) серединные перпендикуляры к отрезкам OH, O_aH_a, O_bH_b и O_cH_c пересекаются в одной точке.

11. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих его стороны, лежит на отрезке, соединяющем точки пересечения продолжений сторон. (Сравните эту задачу с леммой из текста.)

12. В условиях теоремы Дроз–Фарни (см. рис.12) возьмем точки M_a, M_b, M_c на отрезках A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 так, чтобы

$$\frac{A_1M_a}{A_2M_a} = \frac{B_1M_b}{B_2M_b} = \frac{C_1M_c}{C_2M_c}.$$

Тогда точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой.

[3] В любом треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности, которая называется окружностью Эйлера или окружностью девяти точек.

Перезарядка конденсаторов

А.ЧЕРНОУЦАН

Задачи на перезарядку конденсаторов, в которых в результате замыкания ключа или изменения параметров элементов системы (например, емкости одного из конденсаторов) происходит перераспределение зарядов конденсаторов, можно условно разделить на две группы.

В задачах первой группы источник тока перед началом перезарядки отключают от системы, и он в перезарядке не участвует. Ключевым уравнением в таких задачах является закон сохранения заряда. Если в задаче требуется найти какую-то энергетическую характеристику (выделившееся количество теплоты, работу при раздвигании обкладок или при извлечении диэлектрика), то искомая величина выражается через энергию заряженных конденсаторов до и после перезарядки.

В задачах второй группы источник в процессе перезарядки все время подключен к системе. Разность потенциалов на зажимах источника в результате перезарядки не изменяется и остается равной ЭДС источника. Поскольку через источник в процессе перезарядки проходит заряд, в энергетических задачах надо учитывать работу сторонних сил источника по перемещению этого заряда.

Перед тем как приступить к разбору задач первой и второй групп, напомним основные свойства параллельного и последовательного соединения конденсаторов. В связи с тем что тема «Соединение конденсаторов» не входит в настоящее время в программу ЕГЭ, во многих школах ей не уделяют должного внимания (или вовсе опускают).

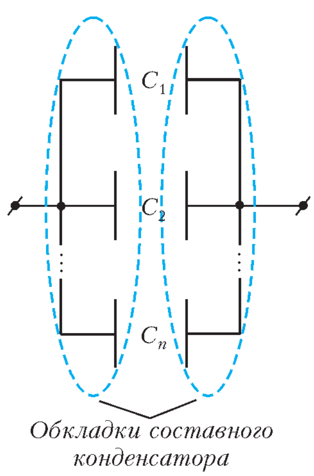

Рис. 1

При *параллельном соединении* нескольких конденсаторов берут по одной обкладке от каждого конденсатора и соединяют их проводами в единый проводник, а оставшиеся обкладки соединяют проводами в другой проводник (рис.1). Получившиеся два проводника и образуют обкладки нового, составного конденсатора. При зарядке такого конденсатора разность потенциалов между его обкладками равна разности потенциалов между обкладками каждого из образующих его конденсаторов:

$$U_{\text{сост}} = U_1 = U_2 = \ldots ,$$

а заряд составного конденсатора равен сумме зарядов всех конденсаторов:

$$q_{\text{сост}} = q_1 + q_2 + \ldots$$

Отсюда для емкости составного конденсатора получается

$$C_{\text{сост}} = C_1 + C_2 + \ldots .$$

При *последовательном соединении* одну из обкладок первого конденсатора оставляют свободной, а другую обкладку соединяют с одной из обкладок второго конденсатора, другую обкладку второго конденсатора соединяют с одной из обкладок третьего конденсатора и т.д. (рис.2). Обкладками нового, составного конденсатора являются оставшиеся свободными обкладки первого и последнего конденсаторов, на них и подают разность потенциалов при зарядке такого составного конденсатора. При этом заряды всех конденсаторов равны заряду составного конденсатора:

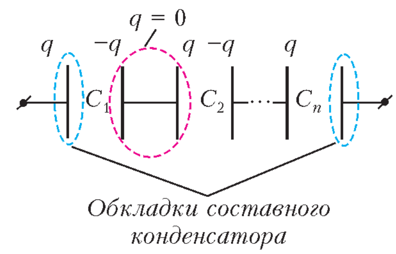

Рис. 2

$$q_{\text{сост}} = q_1 = q_2 = \ldots$$

Это утверждение следует из закона сохранения заряда и справедливо в том случае, если *до зарядки обкладки всех конденсаторов были незаряжены*; в противном случае это соотношение будет неверным. Напряжение на составном конденсаторе равно сумме напряжений на всех конденсаторах:

$$U_{\text{сост}} = U_1 + U_2 + \ldots$$

Таким образом, для емкости составного конденсатора выполняется соотношение

$$\frac{1}{C_{\text{сост}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$$

Все приведенные формулы верны для любых конденсаторов; в частности, любой из этих конденсаторов может быть в свою очередь составным.

Отметим также, что при решении задач нам понадобятся формулы для энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} ,$$

которые верны как для простых, так и для составных конденсаторов, и формула для работы источника:

$$A_{\text{ист}} = \pm q\mathcal{E} ,$$

где знак «+» соответствует прохождению заряда q в направлении сторонних сил источника (от отрицательной клеммы к положительной).

Перейдем теперь к решению конкретных задач.

Задачи с отключенным источником

Задача 1. *Два одинаковых воздушных конденсатора соединены параллельно, заряжены и отсоединены от источника. У одного из них в 3 раза увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?*

Решение. Поскольку составной конденсатор отключен от источника, заряд на нем сохраняется. При увеличении расстояния между пластинами одного из конденсаторов в 3 раза его емкость уменьшается в 3 раза. Получаем уравнение

$$(C + C)U = \left(\frac{C}{3} + C\right)U', \text{ или } U' = 1{,}5U,$$

где U' – конечное напряжение. Найдем теперь отношение напряженностей для первого конденсатора:

$$\frac{E_1}{E_1'} = \frac{U/d}{1{,}5U/(3d)} = 2.$$

Задача 2. *Два конденсатора, емкость одного из которых в 4 раза больше, чем емкость другого, соединили последовательно и подключили к источнику напряжения U = 75 В. Затем заряженные конденсаторы отключили от источника и друг от друга и соединили параллельно одноименно заряженными обкладками. Каким будет после этого напряжение на конденсаторах?*

Решение. Заряд на каждом из последовательно соединенных конденсаторов равен заряду первоначального составного конденсатора:

$$q = \frac{C \cdot 4C}{C + 4C} U = 0{,}8CU .$$

После того как конденсаторы соединили параллельно, заряд на новом составном конденсаторе стал равен $2q$, а напряжение теперь равно

$$U' = \frac{2q}{C + 4C} = 0{,}32U = 24 \text{ В}.$$

Задача 3. *Конденсатор емкостью $C_1 = 10$ мкФ, заряженный до напряжения $U_1 = 200$ В, соединяют параллельно с незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 15$ мкФ. Какое количество теплоты выделится при этом?*

Решение. Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + Q ,$$

где $W_{\text{нач}} = \frac{C_1U_1^2}{2} + 0$ – начальная электростатическая энергия, $W_{\text{кон}} = \frac{(C_1 + C_2)U'^2}{2}$ – конечная электростатическая энергия, Q – выделившееся количество теплоты. Конечное напряжение U' найдем из закона сохранения заряда

$$C_1U_1 + 0 = (C_1 + C_2)U' .$$

Окончательно получим

$$Q = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\frac{U_1^2}{2} = 120 \text{ мДж}.$$

Задача 4. *Плоский воздушный конденсатор емкостью C = 6 мкФ заряжен до напряжения U = 200 В и отключен от источника. Пластины конденсаторы медленно раздвигают, увеличивая расстояние между ними в 4 раза. Какую работу при этом совершают?*

Решение. В этом случае тепло не выделяется, а работа внешних сил равна изменению электрической энергии конденсатора:

$$A = W' - W ,$$

где $W = \frac{CU^2}{2}$, а $W' = \frac{C'U'^2}{2}$. Чтобы найти U', воспользуемся законом сохранения заряда

$$CU = C'U' .$$

Таким образом,

$$A = \left(\frac{C}{C'} - 1\right)\frac{CU^2}{2} . \qquad (1)$$

Отметим, что полученный ответ годится в любом случае, когда перезарядка происходит за счет *медленного* изменения емкости системы, отключенной от источника. Поскольку в данной задаче $C' = C/4$, то

$$A = 1{,}5CU^2 = 360 \text{ мДж}.$$

Замечание. В данной задаче механическую работу можно вычислить прямым расчетом. Действительно, сила притяжения пластин равна

$$F = qE_1 = \frac{qE}{2},$$

где E_1 – напряженность поля одной пластины. Так как заряд конденсатора и напряженность поля остаются постоянными, то и сила притяжения пластин не меняется при их раздвигании. В таком случае работа внешних сил равна

$$A = F(d' - d) = \frac{qE}{2}(d' - d) = \frac{qU'}{2} - \frac{qU}{2} .$$

Задача 5. *Стеклянная пластина целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого в отсутствие пластины C = 2 мкФ. Конденсатор зарядили от источника напряжения U = 1000 В, после чего отключили от источника. Найдите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластину из конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла ε = 2.*

Решение. Работа внешних сил равна изменению энергии системы, в данном случае – изменению электростатической энергии конденсатора:

$$A = W' - W ,$$

где $W = \frac{(\varepsilon C)U^2}{2}$ – начальная энергия, $W = \frac{CU'^2}{2}$ – конечная энергия. Конечное напряжение найдем из закона сохранения заряда

$$(\varepsilon C)U = CU' .$$

Окончательно получим

$$A = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)CU^2}{2} = 2 \text{ Дж}.$$

Отметим, что этот ответ является частным случаем общего ответа (1), полученного в задаче 4.

Замечание. В этой задаче, в отличие от предыдущей, не удается вычислить механическую работу «в лоб», исходя из определения. Более того, сам механизм возникновения силы, которая втягивает пластину внутрь конденсатора, весьма нетривиален: в отсутствие искривления поля у краев конденсатора, т.е. краевого эффекта, сила была бы равна нулю, поскольку напряженность поля всюду перпендикулярна поверхности диэлектрической пластины. Замечательным свойством энергетического расчета является то, что он автоматически учитывает краевой эффект, хотя при выводе формулы для энергии конденсатора краевым эффектом пренебрегают.

Задача 6. *Два одинаковых по размерам плоских конденсатора соединены параллельно, заряжены до напряжения U = = 200 В и отключены от источника напряжения. Один из конденсаторов пуст, а другой содержит стеклянную пластину, целиком заполняющую зазор между его обкладками. Какую работу надо совершить, чтобы медленно извлечь пластину из конденсатора, если емкость пустого конденсатора $C_1 = 6$ мкФ? Диэлектрическая проницаемость стекла ε = 1,5.*

Решение. Сама по себе эта задача не представляет собой ничего принципиально нового по сравнению с двумя предыдущими. К ней применима общая схема, рассмотренная в задаче 4, где

$$C = C_1 + \varepsilon C_1,\ C' = 2C_1,$$

откуда

$$A = W' - W = \frac{\left(\varepsilon^2 - 1\right)C_1U^2}{4} = 75 \text{ мДж}.$$

Мы же на примере этой задаче обсудим, зачем в условиях задач оговаривается, что совершать работу (вынимать пластину, раздвигать обкладки и т.п.) надо *медленно*. А что будет, если мы выдернем пластину быстро? Во-первых, кроме изменения электрической энергии, увеличится еще и кинетическая энергия пластины. Однако если договориться, что нужно найти работу от начального положения до момента, когда мы остановим пластину, то изменение кинетической энергии будет равно нулю. Во-вторых, если (как в данной задаче) изменение емкости сопровождается перераспределением зарядов между конденсаторами, то более быстрое перераспределение зарядов сопровождается протеканием большего тока и выделением большего джоулева тепла в соединительных проводах. (При неограниченном увеличении времени перезарядки t количество теплоты $Q = (q/t)^2 Rt = q^2R/t$ стремится к нулю.) Вычислить выделившееся количество теплоты сложно, и иногда его просто задают в условии. Закон сохранения энергии в этом случае принимает вид

$$A' = \left(W' + Q\right) - W.$$

Выделившееся тепло можно вычислить в противоположном предельном случае – когда пластину извлекают столь быстро, что заряды на обкладках конденсаторов не успевают измениться (для этого в цепь перезарядки должно быть включено очень большое сопротивление). В этом случае задача как бы разбивается на две. Сначала извлекается пластина и совершается работа при неизменном заряде конденсатора (задача 5):

$$A' = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)C_1U^2}{2} = 90 \text{ мДж},$$

а затем перераспределяются заряды (аналогично задаче 2) и выделяется тепло. Впрочем, в данной задаче можно сразу догадаться, что $Q = 15$ мДж (подумайте, почему).

Задачи с подключенным источником

Задача 7. *Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из них втрое увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?*

Решение. Поскольку система подключена к источнику, напряжение на ней не меняется и остается равным напряжению источника U. Выразим через U начальное и конечное напряжения на первом конденсаторе:

$$U_1 = \frac{U}{2},\quad U_1' = \frac{q'}{C_1'} = \frac{1}{C_1'}\frac{C_1'CU}{C_1' + C} = \frac{CU}{(C/3) + C} = 0{,}75U.$$

Отношение напряженностей выражается через отношение напряжений:

$$E_1 = \frac{U/2}{d} = \frac{U}{2d},\quad E_1' = \frac{0{,}75U}{3d} = \frac{U}{4d},\quad \frac{E_1}{E_1'} = 2.$$

Задача 8. *Незаряженный конденсатор емкостью C = 4 мкФ присоединили к зажимам источника тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 200 В. Сколько тепла выделилось в процессе зарядки конденсатора?*

Решение. Закон сохранения энергии надо записывать с учетом работы сторонних сил источника и изменения как электрической, так и внутренней энергии (т.е. количества теплоты, выделившегося при зарядке):

$$A_{\text{ист}} = \left(W' + Q\right) - W. \qquad (2)$$

В данной задаче

$$W = 0,\quad W' = \frac{C\mathcal{E}^2}{2},\quad A_{\text{ист}} = \Delta q\mathcal{E} = (C\mathcal{E} - 0)\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2.$$

Здесь Δq – заряд, прошедший через источник в положительном направлении, равный изменению заряда обкладки, присоединенной к положительному полюсу источника. Получаем

$$C\mathcal{E}^2 = \left(\frac{C\mathcal{E}^2}{2} - 0\right) + Q,$$

откуда

$$Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = 80 \text{ мДж}.$$

Видно, что КПД такой зарядки составляет 50%.

Задача 9. *Конденсатор емкостью C = 8 мкФ, заряженный до напряжения U = 100 В, присоединили для подзарядки к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ = 200 В. Какое количество теплоты выделилось при подзарядке?*

Решение. Новое напряжение на конденсаторе равно $U' = \mathcal{E}$, заряд на конденсаторе изменился на $\Delta q = CU' - CU$, работа сторонних сил источника равна $A_{\text{ист}} = \mathcal{E}\Delta q = C\mathcal{E}^2 - C\mathcal{E}U$. Запишем закон сохранения энергии:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + Q,$$

где изменение электрической энергии конденсатора равно

$$\Delta W = \frac{CU'^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{CU^2}{2}.$$

Получаем

$$Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - C\mathcal{E}U + \frac{CU^2}{2} = \frac{C(\mathcal{E} - U)^2}{2} = 40 \text{ мДж}.$$

Задача 10. *Конденсаторы емкостями C_1 = 3 мкФ и C_2 = 1 мкФ соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 200 В. Сколько тепла выделится при пробое конденсатора меньшей емкости?*

Решение. Начальная электрическая энергия системы равна

$$W = C_{\text{сост}}\frac{\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\frac{\mathcal{E}^2}{2},$$

а конечная энергия –

$$W' = C_1\frac{\mathcal{E}^2}{2}.$$

Работа источника составляет

$$A_{\text{ист}} = \Delta q\mathcal{E} = \left(C_1\mathcal{E} - C_{\text{сост}}\mathcal{E}\right)\mathcal{E}.$$

Подставляя в закон сохранения энергии (2), находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C_{\text{сост}}\mathcal{E}^2}{2} = 45 \text{ мДж}.$$

Задача 11. *Конденсатор емкостью C = 3 мкФ присоединен к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 100 В. Пластины* *конденсатора медленно раздвигают, втрое увеличивая расстояние между ними. Какую при этом совершают работу?*

Решение. Кроме механической работы, произведенной над обкладками при их раздвигании, в законе сохранения энергии необходимо учитывать работу источника тока:

$$\Delta W = A_{\text{мех}} + A_{\text{ист}},$$

где $\Delta W = \frac{C'\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$ – изменение электрической энергии конденсатора. При раздвигании пластин емкость конденсатора становится в три раза меньше: $C' = C/3$, значит, заряд конденсатора также уменьшается втрое: $q = C\mathcal{E}$, $q' = C'\mathcal{E} = (C/3)\mathcal{E}$. Источник при этом совершает отрицательную работу

$$A_{\text{ист}} = \mathcal{E}(q' - q) = C'\mathcal{E}^2 - C\mathcal{E}^2.$$

Для механической работы получаем ответ:

$$A_{\text{мех}} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C'\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{3} = 10 \text{ мДж}.$$

Замечание. В отличие от предыдущих трех задач, где при быстрой самопроизвольной перезарядке уменьшение энергии равно выделившемуся количеству теплоты, в этом и аналогичном примерах тепло при *медленном* раздвигании не выделяется, а изменение энергии равно работе (источника и внешних сил). Однако если изменение емкости проводить быстро, то за счет тока перезарядки в системе выделяется тепло, и закон сохранения энергии приобретает вид (сравните с задачей 6)

$$A_{\text{ист}} + A_{\text{мех}} = (W' + Q) - W. \qquad (3)$$

Если раздвигание пластин происходит так быстро, что заряд на конденсаторе не успевает измениться, то механическая работа совершается только на первом этапе, при неизменном заряде, а перезарядка до нужного напряжения происходит после остановки пластин. На первом этапе задача аналогична задаче 4:

$$A = \left(\frac{C}{C'} - 1\right)\frac{C\mathcal{E}^2}{2} = C\mathcal{E}^2 = 30 \text{ мДж},$$

а на втором – задаче 9:

$$Q = \frac{(C/3)(\mathcal{E} - 3\mathcal{E})^2}{2} = 20 \text{ Дж}.$$

Этот ответ можно сразу получить из формулы (3).

Задача 12. *Схема состоит из источника с ЭДС $\mathcal{E}$ = 100 В, двух одинаковых конденсаторов емкостью C = 10 мкФ каждый и ключа (рис.3). Вначале один из*

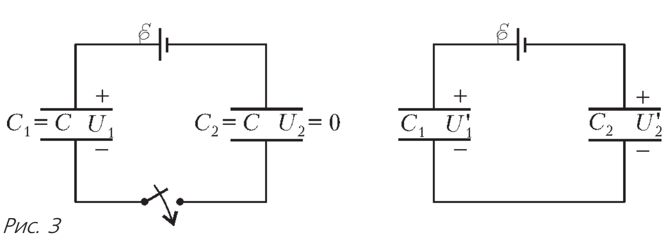

Рис. 3

конденсаторов был заряжен до напряжения U_1 = 200 В, а второй не заряжен. Сколько тепла выделится при замыкании ключа?

Решение. На первый взгляд, система выглядит как два последовательно соединенных конденсатора, подсоединенных к источнику. Однако это не так: поскольку один из конденсаторов до замыкания схемы был заряжен, то после замыкания заряды на конденсаторах *не равны* друг другу. Для вычисления конечных напряжений надо записать два уравнения – закон сохранения заряда:

$$C_1U_1' + C_2U_2' = C_1U_1$$

и условие, что разность потенциалов между полюсами источника равна его ЭДС:

$$U_1' - U_2' = \mathcal{E}$$

(правила знаков указаны на рисунке 3). Решая эти уравнения, находим

$$U_1' = \frac{C_1U_1 + C_2\mathcal{E}}{C_1 + C_2} = \frac{U_1 + \mathcal{E}}{2},$$

$$U_2' = \frac{C_1U_1 - C_1\mathcal{E}}{C_1 + C_2} = \frac{U_1 - \mathcal{E}}{2}.$$

Прошедший через источник заряд равен

$$\Delta q = -C_2U_2' = \frac{C_1C_2(\mathcal{E} - U_1)}{C_1 + C_2} = \frac{C}{2}(\mathcal{E} - U_1),$$

а работа источника равна

$$A_{\text{ист}} = \Delta q\mathcal{E}.$$

После подстановки в закон сохранения энергии

$$A_{\text{ист}} = \left(\frac{C_1U_1'^2}{2} + \frac{C_2U_2'^2}{2} + Q\right) - \frac{C_1U_1^2}{2}$$

получаем

$$Q = \frac{C(\mathcal{E} - U_1)^2}{4} = 25 \text{ мДж}.$$

Упражнения

1. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены параллельно, заряжены и отсоединены от источника. У одного из них втрое уменьшают расстояние между пластинами, а у другого – втрое увеличивают. Во сколько раз уменьшится напряженность поля во втором конденсаторе?

2. Обкладки конденсатора емкостью C_1 = 30 мкФ, заряженного до напряжения U_1 = 200 В, соединяют с противоположно заряженными обкладками конденсатора емкостью C_2 = 10 мкФ, заряженного до напряжения U_2 = 400 В. Какое количество теплоты выделится при этом?

3. Конденсатор емкостью C_1 = 1,2 мкФ заряжен до напряжения U_1 = 135 В. Его соединяют параллельно с конденсатором емкостью C_2 = 0,8 мкФ, напряжение на котором U_2 = 110 В. Какой заряд пройдет по соединительным проводам?

4. Конденсатор емкостью C = 8 мкФ, заряженный до напряжения U = 100 В, подсоединили для подзарядки к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 200 В, но перепутали обкладки: положительную подключили к отрицательному зажиму, а отрицательную – к положительному. Сколько тепла выделилось при перезарядке?

5. Система из двух параллельно соединенных конденсаторов с емкостями C_1 = 5 мкФ и C_2 = 15 мкФ и присоединенного к ним последовательно конденсатора емкостью C_3 = 30 мкФ подключена к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ = 100 В. Сколько тепла выделится при пробое конденсатора емкостью C_1?

6. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостью C = 12 мкФ каждый соединены последовательно и присоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ = 200 В. Какую надо совершить работу, чтобы у одного из них вдвое увеличить расстояние между обкладками?