ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2154» или «Ф2160». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2158 и М2160 предлагались на L Международной математической олимпиаде.

Задачи М2154–М2160, Ф2160–Ф2167

М2154. Каждая клетка доски размером 2009×2009 покрашена в один из двух цветов так, что у каждой клетки соседей (по стороне) своего цвета меньше, чем соседей другого цвета. Какое наибольшее значение может принимать разность между количеством клеток одного и другого цветов?

А.Шаповалов

М2155. Найдите 2009-значное число, отношение которого к сумме его цифр минимально.

И.Богданов

М2156. Вася и Петя нарисовали по выпуклому четырехугольнику. Каждый из них записал на листочке длины всех сторон своего четырехугольника и двух его диагоналей. В результате на их листочках оказались два одинаковых набора из 6 различных чисел. Обязательно ли четырехугольники Васи и Пети равны?

Н.Агаханов, И.Богданов

М2157. На доске выписано 20 делителей числа 70!. Докажите, что можно стереть некоторые из них так, чтобы произведение оставшихся являлось полным квадратом.

Фольклор

М2158. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть P и Q – внутренние точки отрезков CA и AB соответственно. Точки K, L и M – середины отрезков BP, CQ и PQ соответственно, а Γ – окружность, проходящая через точки K, L и M. Известно, что прямая PQ касается окружности Γ. Докажите, что $OP = OQ$.

С.Берлов

М2159*. Найдите все такие пары чисел (k, c), где k – натуральное, что для всех натуральных n, кроме, быть может, конечного их числа, число $n(n+1)\ldots(n+k-1)+$ $+c$ является точной степенью (большей 1 и, возможно, зависящей от n) натурального числа.

В.Сендеров

М2160*. Даны попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а также множество M, состоящее из $n-1$ числа, но не содержащее число $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Кузнечик должен сделать n прыжков вправо по числовой прямой, стартуя из точки с координатой 0. При этом длины его прыжков должны равняться числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взятым в некотором порядке. Докажите, что этот порядок можно выбрать таким образом, чтобы кузнечик ни разу не приземлился в точке, имеющей координату из множества M.

Д.Храмцов, К.Рейер

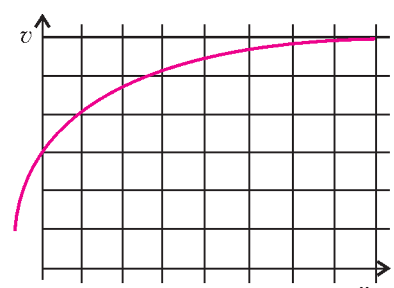


Рис. 1

Ф2160. На графике (рис.1) приведена зависимость скорости точки, которая движется по оси координат X, от ее координаты. Найдите ускорение точки в начале координатной оси и время прохождения первых пяти метров. Одна клетка по горизонтальной оси – это 1 м, по вертикальной оси – это 1 м/с.

З.Точкин

Ф2161. Статуэтка школьника имеет массу 20 г, голова статуэтки сделана из серебра (плотность 12 г/см^3), остальное – из дерева (плотность 0,8 г/см^3). Известно, что фигурка не содержит полостей и не тонет в воде. Один грамм дерева стоит 1 рубль, один грамм серебра стоит 100 рублей. Сколько может стоить эта фигурка? *Справка*: данная статуэтка художественной ценности не имеет, ее стоимость равна стоимости материалов.

А.Несложнов

Ф2162. В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде находится порция гелия, отделенная от окружающей среды массивным поршнем, который может двигаться без трения. Наружное давление очень быстро повышают в 3 раза. Во сколько раз уменьшится объем газа к тому моменту, когда поршень окончательно перестанет двигаться?

А.Повторов

Ф2163. В глубинах космоса, вдали от других тел и полей неподвижно висит непроводящее тонкое кольцо радиусом R и массой M, равномерно заряженное по длине зарядом Q. Заряженное таким же зарядом маленькое тело массой m движется вдоль оси кольца, причем на большом расстоянии от кольца скорость тела направлена к кольцу и равна v_0. Найдите максимальную скорость кольца.

А.Зильберман

Ф2164. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{v}$ частица массой m и зарядом q. Магнитное поле локализовано внутри области радиусом R_0, скорость $\vec{v}$ направлена перпендикулярно линиям магнитной индукции, прицельный параметр удара p (рис.2). Найдите угол рассеяния θ, т.е. угол, на который частица отклоняется от первоначального направления после прохождения магнитного поля.

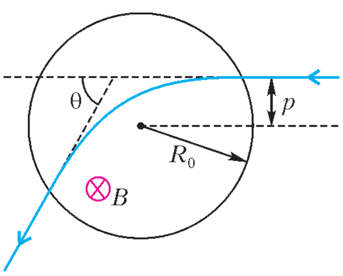


Рис. 2

Ю.Носов

Ф2165. Вольтметр и миллиамперметр соединили последовательно и подключили к батарейке. При этом показания приборов были 1,3 В и 0,5 мА. Теперь соединили последовательно два таких же вольтметра и тот же миллиамперметр и подключили к той же батарейке – один из вольтметров показал 0,7 В. Что показывают при этом остальные два прибора? А что покажут приборы, если количество вольтметров увеличить до трех? Напряжение батарейки постоянно.

А.Простов

Ф2166. DVD-диск вращается очень быстро. Оцените скорость движения точки поверхности диска мимо считывающего устройства, если за 100 секунд считывается 100 миллионов бит информации. Дорожки, на которых записана информация, расположены очень близко друг к другу – расстояние между соседними дорожками составляет примерно 1/1000 миллиметра.

Р.Цифров

Ф2167. В фокус маленькой собирающей линзы помещают мощный точечный источник света, при этом на линзу действует очень маленькая сила F. Какой станет эта сила, если источник отодвинуть вдвое дальше? А втрое дальше? Диаметр линзы в 10 раз меньше ее фокусного расстояния.

А.Линзов

Решения задач М2131–М2138, Ф2145–Ф2152

М2131. *Пусть a^b обозначает число a^b. В выражении 7^7^7^7^7^7^7 надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (всего будет 5 пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число?*

Ответ: можно.

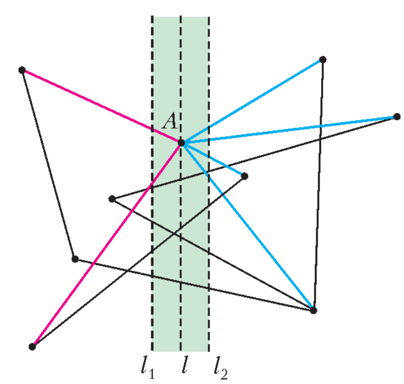
Заметим, что $\left(7\char`^\left(7\char`^7\right)\right)\char`^7=\left(7\char`^7\right)\char`^\left(7\char`^7\right)$ в силу тождества $\left(7^a\right)^b=\left(7^b\right)^a$. Теперь легко привести пример (конечно, он не единственный), удовлетворяющий условию:

$$\left(\left(7\char`^\left(7\char`^7\right)\right)\char`^7\right)\char`^\left(7\char`^\left(7\char`^7\right)\right)=\left(\left(7\char`^7\right)\char`^\left(7\char`^7\right)\right)\char`^\left(7\char`^\left(7\char`^7\right)\right).$$

А.Толпыго

М2132. *На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены отрезками. Известно, что любая прямая, не проходящая через данные точки, пересекает четное число отрезков. Докажите, что из каждой точки выходит четное число отрезков.*

Рассмотрим одну из данных точек – точку A. Пусть из нее выходит a отрезков. Возьмем прямую l, проходящую через A и не параллельную ни одной из прямых, соединяющих пары данных точек; будем считать, что l направлена вертикально. Небольшим сдвигом прямой l влево и вправо получим такие прямые l_1 и l_2 (параллельные l), что в полосе между ними нет ни одной данной точки, за исключением точки A (см. рисунок).



Пусть прямая l_1 пересекает x отрезков, выходящих из точки A. Тогда прямая l_2 пересекает $a-x$ отрезков, выходящих из точки A, поскольку каждый отрезок, выходящий из точки A, пересекается ровно с одной из прямых l_1, l_2. Каждый отрезок, соединяющий две данные точки, отличные от A, либо пересекает обе прямые l_1, l_2, либо не пересекает ни одну из них. Поэтому количества отрезков, пересекаемых прямыми l_1 и l_2, отличаются на $x-(a-x)=2x-a$. По условию задачи, это число должно быть четным. Значит, a – четное число, что и требовалось доказать.

И.Богданов, Г.Гальперин

М2133. *Замок обнесен круговой стеной с девятью башнями, на которых дежурят рыцари. По истечении каждого часа все они переходят на соседние башни, причем каждый рыцарь движется либо все время по часовой стрелке, либо против. За ночь каждый рыцарь успевает подежурить на каждой башне. Известно, что был час, когда на каждой башне дежурили хотя бы два рыцаря, и был час, когда ровно на 5 башнях дежурили ровно по одному рыцарю. Докажите, что был час, когда на одной из башен вообще не было рыцарей.*

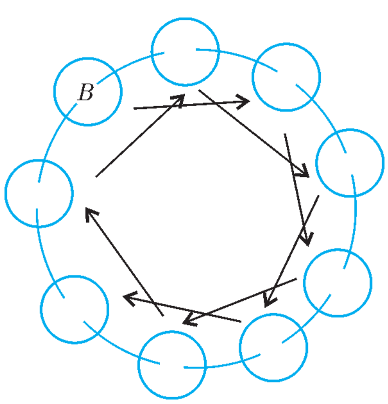
Разделим рыцарей на два отряда: в первый отряд включим всех рыцарей, двигающихся по часовой стрелке, а во второй – двигающихся против часовой стрелки. Можно считать, что рыцари второго отряда стоят на месте, а каждый рыцарь первого отряда через каждый час сдвигается на две башни по часовой стрелке.

Предположим, что на каждой башне дежурит хотя бы по одному рыцарю второго отряда. Тогда в момент, когда на некоторых пяти башнях дежурили по одному рыцарю (это рыцари второго отряда), рыцари первого отряда занимали не более четырех башен. Значит, и в любой другой момент рыцари первого отряда занимают не более четырех башен, следовательно, в любой момент хотя бы на одной из рассматриваемых пяти башен остается ровно один рыцарь второго отряда. Это противоречит условию.

Аналогично, предположив, что на каждой башне дежурит хотя бы по одному рыцарю первого отряда, приходим к противоречию (при этом удобнее считать рыцарей первого отряда неподвижными).

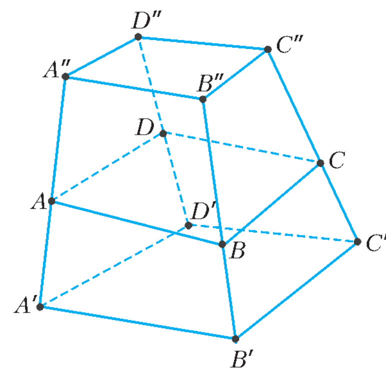
Итак, есть башня A (фиксированная), на которой нет рыцарей второго отряда; кроме того, в любой момент есть башня B, на которой нет рыцарей первого отряда, причем положение башни B сдвигается на две башни по часовой стрелке. По условию, положение башни B (вместе с рыцарями первого отряда) сдвинется не менее восьми раз и (поскольку 9 – нечетное число) пройдет все башни (см. рисунок). Следовательно, в какой-то момент положение башни B совпало с башней A. Это означает, что в следующий час на башне A не дежурит ни один рыцарь.

М.Мурашкин



М2134. *Три плоскости разрезают параллелепипед на восемь шестигранников, все грани которых – четырехугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.*

Рассмотрим два из восьми шестигранников $ABCDA'B'C'D'$ и $ABCDA''B''C''D''$, имеющих общую грань (см. рисунок). Пусть известно, что вокруг шестигранника $ABCDA'B'C'D'$ можно описать сферу. Докажем, что вокруг шестигранника $ABCDA''B''C''D''$ также можно описать сферу.



Четырехугольник $ABCD$ вписан в некоторую окружность ω, четырехугольники $ABB'A'$, $BCC'B'$ и т.д. также вписанные. По условию, плоскости $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$ параллельны, поэтому $A'B' \parallel A''B''$, $B'C' \parallel B''C''$, и т.д. Из параллельности $A'B' \parallel A''B''$ и вписанности четырехугольника $ABB'A'$ имеем

$$\angle AA''B'' + \angle ABB'' = (180^\circ - \angle AA'B') + (180^\circ - \angle ABB') =$$

$$= 360^\circ - (\angle AA'B' + \angle ABB') = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ,$$

поэтому четырехугольник $ABB''A''$ вписан в некоторую окружность ω_1. Аналогично доказываем, что четырехугольники $BCC''B''$, $CDD''C''$, $DAA''D''$ вписаны в некоторые окружности ω_2, ω_3, ω_4. Проведем сферу S через окружность ω и точку A''. Так как сфера S содержит точки A, B и A'', то ее сечение плоскостью ABA'' – это окружность ω_1. Таким образом, сфера S содержит окружность ω_1, а следовательно, содержит точку B''. Зная, что сфера S содержит точку B'', доказываем (аналогично предыдущему), что она содержит окружность ω_2 и, значит, точку C''. Наконец, зная, что сфера S содержит точку C'', доказываем, что она содержит точку D''. Итак, шестигранник $ABCDA''B''C''D''$ вписан в сферу S.

Точно так же, переходя от шестигранников, про которые уже известно, что они вписанные, к соседним по грани, докажем, что все шестигранники вписанные.

П.Кожевников

М2135. *Натуральное число называется хорошим, если из него можно получить полный квадрат, приписав к его десятичной записи слева некоторое число, оканчивающееся ровно на 2009 нулей. Для каких n* *существует n-значное хорошее число, которое не является полным квадратом?*

Ответ: для всех натуральных $n \ge 2$.

Квадрат числа может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9, однако не может оканчиваться на 05 (иначе делится на 5, но не делится на 25) и на 06 (иначе делится на 2, но не делится на 4), поэтому однозначных хороших чисел не существует.

Назовем *k-хвостом* числа A число, образованное последними k цифрами числа A. Покажем, что при $n \ge 2$ существует полный квадрат, $(n+2009)$-хвост которого имеет вид $\underbrace{000\ldots00}_{2009\text{ нулей}}4\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1$, а $(n+2010)$-я справа цифра нечетна (и тем самым отлична от нуля). Отсюда будет сразу следовать, что n-значное число $4\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1$ – хорошее. Это завершит решение, так как $4\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1$ не является полным квадратом (поскольку дает остаток 2 при делении на 3).

Лемма. *Пусть $k \ge 2$ и A – квадрат числа a, оканчивающегося на 1, причем в $(k+1)$-м справа разряде числа A находится четная цифра t. Тогда найдется квадрат D числа d, оканчивающегося на 1, такой, что k-хвост числа D совпадает с k-хвостом числа A и, кроме того, у числа D в $(k+1)$-м справа разряде находится ноль, а в $(k+2)$-м справа разряде: а) четная цифра; б) нечетная цифра.*

Доказательство. Пусть $a = 10m + 1$. Положим $d = a + x \cdot 10^k$. Тогда

$$D = d^2 = A + 2ax \cdot 10^k + x^2 \cdot 10^{2k} = A + 2mx \cdot 10^{k+1} + 2x \cdot 10^k + x^2 \cdot 10^{2k}.$$

Три последних слагаемых не меняют k-хвост числа A, причем последнее слагаемое не меняет $(k+2)$-хвост числа, а слагаемое $2mx \cdot 10^{k+1}$ в $(k+2)$-хвосте может изменить лишь $(k+2)$-ю справа цифру, не меняя ее четности (если в числе A отсутствует $(k+2)$-я справа цифра, считаем ее четной).

Если взять $x \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ такое, что $2x + t$ делится на 10, то слагаемое $2x \cdot 10^k$ изменяет в числе A $(k+1)$-ю справа цифру с t на 0. При этом если $x \in \{1,2,3,4,5\}$, то $2x + t = 10$, и слагаемое $2x \cdot 10^k$ изменяет в числе A четность $(k+2)$-й справа цифры; если же $x \in \{6,7,8,9,0\}$, то $2x + t$ равно 20 или 0, и слагаемое $2x \cdot 10^k$ не меняет четности $(k+2)$-й справа цифры. Таким образом, выбором x можем одновременно сделать $(k+1)$-ю справа цифру нулевой и сделать $(k+2)$-ю справа цифру как четной, так и нечетной. Лемма доказана.

Возьмем полный квадрат $2\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1^2$, n-хвост которого равен $4\underbrace{00\ldots0}_{n-2\text{ нуля}}1$, а $(n+1)$-я цифра справа четная (0 или 4). Последовательно применяя утверждение а) леммы для $k = n$, $n+1$, $n+2$, …, $n+2007$, а затем утверждение б) леммы для $k = n+2008$, приходим к нужному примеру полного квадрата.

Н.Агаханов, В.Сендеров

М2136. *Пусть C_n^k обозначает количество способов выбрать k предметов из n различных предметов (способы, отличающиеся только порядком выбора предметов, считаются одинаковыми). Докажите, что если натуральные числа k и l меньше n, то числа C_n^k и C_n^l имеют общий множитель, больший 1.*

Можно считать, что k и l различны (иначе задача очевидна). Заметим, что $C_n^i = C_n^{n-i}$ (выбрать i предметов из n – то же самое, что не выбрать остальные $n - i$). Поэтому можно также считать, что и k, и l не превосходят $n/2$.

Решим такую комбинаторную задачу. *Сколькими способами можно заполнить два мешка, в первый из которых вмещается k предметов, а во второй l предметов, если для этого у нас есть n различных предметов, $n \ge k + l$?* (Уточним: порядок, в котором предметы свалены в данный мешок, не важен – важно только множество предметов, находящихся в данном мешке.) Ясно, что ответ в этой задаче: $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$ – заполняем сначала первый мешок k предметами (из данных n), и для каждого такого заполнения еще заполняем второй мешок l предметами (из оставшихся $n - k$). Но, аналогично, ответом в этой задаче будет также число $C_n^l \cdot C_{n-l}^k$. Так как ответ тут может быть только один, мы доказали тождество

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^l = C_n^l \cdot C_{n-l}^k. \qquad (*)$$

Из тождества следует, что C_n^l делит произведение $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$. Но если C_n^k и C_n^l взаимно просты, то тогда C_n^l делит второй сомножитель, т.е. C_{n-k}^l. Это невозможно, так как, очевидно, $C_n^l > C_{n-k}^l$. Значит, C_n^k и C_n^l не могут быть взаимно простыми, что и требовалось доказать.

Замечание. Само равенство $(*)$ можно доказать непосредственно, используя формулу $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)}$.

С.Дориченко

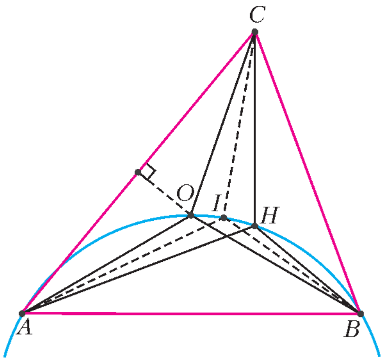
М2137. *Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, в котором точка H – точка пересечения высот, точки I и O – центры вписанной и описанной окружностей. Известно, что точки A, O, I, H лежат на одной окружности ω. Докажите, что окружность ω проходит через одну из вершин B и C.*

Заметим, что лучи AH и AO симметричны относительно биссектрисы AI угла BAC. Действительно,

$$\angle BAH = 90° - \angle ABC = 90° - \frac{\angle AOC}{2} = \angle CAO.$$

Поэтому AI – биссектриса угла HAO. Значит, дуги HI и OI окружности ω равны, следовательно, отрезки HI и OI равны.

Аналогично предыдущему, лучи BH и BO симметричны относительно биссектрисы BI угла ABC. В треугольниках BIO и BIH сторона BI общая, $OI = HI$ и $\angle IBH = \angle IBO$. Применив теорему синусов, получаем, что либо углы BHI и BOI равны, либо составляют в сумме $180°$. В первом случае треугольники BIO и BIH равны и симметричны относительно прямой BI,



значит, $HO \perp BI$. Во втором случае получаем, что точки B, H, I, O лежат на одной окружности, т.е. окружность ω проходит через вершину B (см. рисунок).

Проведя те же самые рассуждения для вершины C, получаем, что либо $HO \perp CI$, либо окружность ω проходит через вершину C. Поскольку прямая HO не может быть одновременно перпендикулярна биссектрисам BI и CI, то одна из вершин B и C лежит на ω, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно убедиться, что в треугольнике ABC (не обязательно остроугольном) эквивалентны следующие условия: $\angle ABC = 60°$; точки A, C, H, I и O лежат на одной окружности; *прямая Эйлера* HO перпендикулярна биссектрисе угла B. Условие же равенства отрезков HI и OI эквивалентно равенству $60°$ одного из углов треугольника ABC.

П.Кожевников

М2138*. *В ячейку памяти компьютера записали число 6. Далее компьютер делает миллион шагов. На шаге номер n он увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и n. Докажите, что на любом шаге компьютер увеличивает число в ячейке либо на 1, либо на простое число.*

Выпишем в ряд несколько первых членов последовательности, указывая номер шага:

номер шага: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 …

число в ячейке: 6 7 8 9 10 $\underline{15}$ $\underline{18}$ 19 20 21 22 $\underline{33}$ $\underline{36}$ …

на сколько было увеличение: 1 1 1 1 5 3 1 1 1 1 11 3 …

Можно заметить, что для начальных шагов выполняется следующее: если на данном шаге число в ячейке увеличилось не на 1, то это число в ячейке в три раза больше номера шага (на рисунке эти числа подчеркнуты).

Пусть на шаге n число в ячейке стало равно $3n$. На шаге $n + 1$ число в ячейке увеличится на $\text{НОД}(n+1, 3n)$, и, так как n и $n + 1$ взаимно просты, увеличение будет на $\text{НОД}(n+1, 3)$, т.е. на 1 или на 3. В последнем случае снова получим, что число в ячейке в три раза больше номера шага, после чего следующее увеличение будет уже на 1.

Сделанные замечания позволяют высказать гипотезу. *Пусть на шаге n в ячейку запишется число 3n, и на следующем шаге число в ячейке увеличится на 1. Рассмотрим ближайший шаг n + k, на котором увеличение числа в ячейке будет не на 1. Тогда это увеличение будет на простое число, причем число в ячейке снова окажется в три раза больше номера шага.*

Ясно, что, доказав гипотезу, мы решим задачу.

Докажем гипотезу по индукции. Базу мы уже проверили выше для маленьких номеров шагов. Докажем переход. Пусть на шаге n в ячейке будет записано $3n$, после чего шаг $n + k$ будет первым, при котором число в ячейке увеличится не на 1:

номер шага: n $n + 1$ $n + 2$ … $n + k - 1$ $n + k$

число в ячейке: $3n$ $3n + 1$ $3n + 2$ … $3n + k - 1$?

Увеличение числа на шаге $n + k$ будет равно[1]

$$\text{НОД}(n+k, 3n+k-1) =$$
$$= \text{НОД}\big(n+k, 3(n+k)-(3n+k-1)\big) =$$
$$= \text{НОД}(n+k, 2k+1),$$

т.е. является делителем числа $2k + 1$.

Предположим, что число $2k + 1$ не простое и имеет простой делитель p, входящий в $\text{НОД}(n+k, 2k+1)$. Так как $2k + 1$ нечетно, этот делитель хотя бы в три раза меньше $2k + 1$, а значит, меньше k. Посмотрим тогда на шаг $n + k - p$. На этом шаге число в ячейке увеличится на

$$\text{НОД}(n+k-p, 3n+k-p-1) =$$
$$= \text{НОД}\big(n+k-p, 3(n+k-p)-(3n+k-p-1)\big) =$$
$$= \text{НОД}(n+k-p, 2k+1-2p).$$

Но и $n + k - p$, и $2k + 1 - 2p$ делятся на p, откуда получаем, что уже на шаге $n + k - p$ было увеличение не на 1. Противоречие с минимальностью шага $n + k$. Значит, $2k + 1$ простое, и, следовательно, увеличение на шаге $n + k$ происходит ровно на $2k + 1$, и число в ячейке становится равным $3n + k - 1 + 2k + 1 = 3(n + k)$ – в три раза больше номера шага. Гипотеза доказана по индукции, и тем самым задача решена.

С.Дориченко

Ф2145. *Суточный спутник Земли вращается по круговой орбите, лежащей в экваториальной плоскости. В результате кратковременного включения тормозного двигателя скорость спутника уменьшается по величине на 1 м/с, а направление скорости не меняется. Найдите изменение периода обращения спутника.*

Вначале обычным образом проведем расчет орбиты суточного спутника. Пусть радиус его орбиты $R = nR_0$, где R_0 – радиус Земли. Найдем n. Ускорение спутника на круговой орбите в n^2 раз меньше ускорения свободного падения на поверхности Земли:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{g}{n^2}.$$

Выразим теперь период обращения T:

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Тогда

$$n \approx 6{,}63, \text{ и } v \approx 3070 \text{ м/с}.$$

Теперь о новой орбите. В апогее скорость спутника равна $v - \Delta v$ и расстояние от центра Земли равно R, в перигее обозначим скорость v_1, а расстояние R_1. По

[1] *Мы несколько раз пользуемся свойством наибольшего общего делителя:* $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a-b)$.

второму закону Кеплера,

$$(v - \Delta v) R = v_1 R_1 .$$

Полные энергии в этих точках одинаковы, тогда

$$\frac{(v - \Delta v)^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{GM}{R_1} .$$

Исключим из последних двух уравнений скорость в перигее v_1 и выразим расстояние R_1, точнее – величину $R + R_1$, т.е. большую ось новой орбиты.

Нам нужно знать отношение больших осей (или полуосей) новой и старой орбит, тогда можно будет при помощи третьего закона Кеплера найти отношение периодов обращения:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{(R + R_1)^3}{(2R)^3} .$$

После соответствующих преобразований получим

$$\frac{R + R_1}{2R} \approx 1 - \frac{2\Delta v}{v} , \text{ и } T_1 \approx T\left(1 - \frac{3\Delta v}{v}\right) \approx 0{,}999\,T .$$

Итак, период обращения спутника уменьшится на 86,4 секунды.

А.Повторов

Ф2146. *По прямой бежит кролик, его скорость все время равна $v_0 = 5$ м/с. В точке, отстоящей на $L_0 = 100$ м от этой прямой, сидит лиса. Она замечает кролика и бросается в погоню, когда тот находится на минимальном расстоянии от упомянутой точки. Лиса бежит с такой же по величине скоростью, вектор скорости лисы направлен в любой момент в точку, где находится кролик. Найдите максимальное ускорение лисы в процессе погони. Лису и кролика считать материальными точками.*

Перейдем в систему отсчета, связанную с кроликом. В этой системе ускорение лисы такое же, как и в неподвижной системе отсчета. Проведем расчет для некоторой точки A (рис.1). Обозначим угол $AOБ$ буквой α, отрезок OA – буквой L. Сумма расстояний OA и $AБ$ остается неизменной: $OA + AБ = L_0$. Ускорение лисы определяется вращением вектора $\vec{v}_0$, направленного вдоль AO. Движение лисы происходит вдоль биссектрисы угла, образованного двумя векторами $\vec{v}_0$. Выберем малый интервал времени Δt и рассмотрим треугольник AOB (рис.2). Тогда, по теореме синусов,

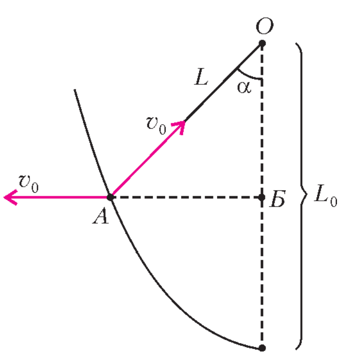


Рис. 1

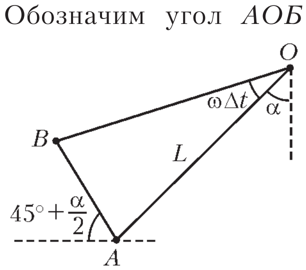


Рис. 2

$$\frac{AB}{\sin \omega\Delta t} = \frac{OB}{\sin(45° + \alpha/2)} ,$$

или

$$\frac{2v_0 \cos(45° + \alpha/2)\Delta t}{\omega\Delta t} = \frac{L}{\sin(45° + \alpha/2)} .$$

Отсюда находим угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_0 \cos\alpha}{L} = \frac{v_0 \cos\alpha}{L_0/(1 + \sin\alpha)}$$

и ускорение:

$$a = \omega v_0 = \frac{v_0^2 \cos\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)}{L_0} .$$

Исследуем полученное выражение для ускорения на максимум:

$$\left(\cos\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)\right)'_\alpha = 0 ,$$

$$2\sin^2 \alpha_{\max} + \sin\alpha_{\max} - 1 = 0 ,$$

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{-1 \pm 3}{4} , \ \sin\alpha_{\max} = 0{,}5 , \ \alpha_{\max} = 30° .$$

Окончательно,

$$a_{\max} = \frac{v_0^2}{L_0} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{v_0^2}{L_0} \approx 0{,}3 \text{ м/с}^2 .$$

А.Старов

Ф2147. *У Пети и Васи в кухне на даче имеется небольшой автоматический подогреватель воды. Он представляет собой пятилитровую емкость с хорошей теплоизоляцией и электрическим двухкиловаттным нагревателем. Емкость всегда соединена с водопроводной трубой, по которой в нее может поступать холодная вода, а внизу есть краник, через который можно отбирать горячую воду. Нагреватель снабжен реле с регулятором, позволяющим установить желаемую температуру воды. Подогреватель используется в основном для мытья посуды, а поскольку ночью посуду никто не моет, его на ночь отключают.*

И тут у братьев зашел спор. Петя считал, что они поступают экономно, отключая электропитание прибора на ночь. Вася же полагал, что разницы никакой нет – ведь за ночь вода сильно остывает, и утром нагреватель включается на более длительное время, а если оставлять электропитание, то за ночь нагреватель будет включаться много раз, зато на небольшое время, поддерживая заданную температуру воды. Чтобы решить спор, братья проделали эксперимент. Они установили регулятор температуры на 46 °C. Оказалось, что за 9 ночных часов вода остыла до 30 °C. Температура воздуха ночью в кухне была 16 °C. Достаточно ли этих данных, чтобы оценить, сколько придется платить в месяц, если отключать или не отключать питание подогревателя воды на ночь? Стоимость киловатт-часа принять равной 3 рублям.

Пусть на ночь подогреватель не отключается от сети. Тогда после охлаждения воды от заданной температуры $t_{\max}$ на величину Δt (она определяется чувствительностью датчика и реле) включается нагреватель, который за время $\Delta\tau$ доводит температуру до $t_{\max}$, после чего он отключается, и вода снова начинает остывать. Получается пилообразная зависимость температуры от времени. Причем из-за небольшой величины Δt «пила» состоит из прямых отрезков.

Скорость остывания воды w пропорциональна разности между температурой горячей воды t_{max} и температурой окружающего воздуха $t_{возд}$:

$$w = k\left(t_{max} - t_{возд}\right) = \frac{\Delta t}{\Delta\tau},$$

где константа k определяется условиями теплоотвода. Отсюда находим время до следующего включения нагревателя:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{w} = \frac{\Delta t}{k\left(t_{max} - t_{возд}\right)}.$$

Число включений за ночь, т.е. за время τ, равно

$$n = \frac{\tau}{\Delta\tau} = \frac{k\tau\left(t_{max} - t_{возд}\right)}{\Delta t}.$$

Расход энергии, полученной от нагревателя за время τ, равен $W_1 = mc\Delta tn$, где m – масса воды, c – ее удельная теплоемкость. Подставляя число включений n, получаем

$$W_1 = \frac{mc\Delta tk\tau\left(t_{max} - t_{возд}\right)}{\Delta t} = mck\tau\left(t_{max} - t_{возд}\right)$$

– расход энергии не зависит от длительности периодов охлаждения (при условии, что они невелики, так что температура снижается линейно).

Пусть теперь нагреватель на ночь выключается. Температура снижается экспоненциально от t_{max} до некоторой t_{min}. Это описывается уравнением

$$t_{min} - t_{возд} = \left(t_{max} - t_{возд}\right)\cdot \exp(-k\tau). \qquad (*)$$

Утром включенный нагреватель греет частично остывшую воду от t_{min} до t_{max}, при этом затрачивается энергия

$$W_2 = mc\left(t_{max} - t_{min}\right).$$

Используем теперь результаты эксперимента. Имеем: $\tau = 9$ ч, $t_{max} = 46$ °C, $t_{возд} = 16$ °C, $t_{min} = 30$ °C. Подставляем эти данные в уравнение $(*)$ и получаем

$$30 - 16 = (46 - 16)\cdot \exp(-9k),$$

откуда находим

$$\exp(-9k) = 14 : 30 = 0{,}47, \quad -9k = \ln 0{,}47 = -0{,}76,$$

$$\text{и } k = 0{,}084 \text{ ч}^{-1}.$$

Тогда расход энергии без выключения нагревателя равен

$$W_1 = mck\tau\left(t_{max} - t_{возд}\right) = 22{,}7mc.$$

Расход энергии с выключением нагревателя составляет

$$W_2 = mc\left(t_{max} - t_{min}\right) = 16mc.$$

Вывод: при выключении нагревателя на ночь расход энергии уменьшается в 22,7 : 16 = 1,4 раза.

Пусть $m = 5$ кг, $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К). Тогда утром по второму способу расход энергии на нагрев воды будет $5 \text{ кг} \cdot 4{,}2 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)} \cdot 16 \text{ К} \approx 340 \text{ кДж} \approx 0{,}1 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$. За месяц такой «ночной» расход составит 3 кВт · ч, за что придется заплатить 9 рублей. А по первому способу – в 1,4 раза больше, т.е. 12,6 рублей.

Как видим, разница небольшая, почти в пределах ошибки измерений. Во всяком случае, сэкономленных за лето денег (в случае выключения нагревателя на ночь) не хватит даже на мороженое.

И.Леенсон

Ф2148. *Давление насыщенных паров воды при +20 °C составляет 1000 Па, а при температуре +20,5 °C оно возрастает до 1020 Па. Определите по этим данным молярную теплоту испарения воды при +20 °C.*

Для того чтобы найти связь между давлениями насыщенного пара при разных температурах и молярной теплотой парообразования r, нужно рассмотреть процесс, в котором происходит испарение воды. Удобно произвести расчет для тепловой машины с водяным паром в качестве рабочего тела. Единственный пример тепловой машины, для которой известна формула КПД, это машина, работающая по циклу Карно.

Пусть температура нагревателя такой машины $T_н = (273 + 20{,}5)$ К $= 293{,}5$ К, а температура холодильника $T_х = 293$ К. Тогда термодинамический КПД машины равен

$$\eta = \frac{T_н - T_х}{T_н} = \frac{\Delta T}{T_н} = \frac{0{,}5}{293{,}5} = \frac{1}{587}.$$

Передадим рабочему телу от нагревателя количество теплоты, необходимое для испарения одного моля (т.е. 18 г) воды:

$$Q_н = r.$$

При этой температуре моль водяного пара занимает объем

$$V_м = \frac{RT}{p}.$$

Если пренебречь объемом, который занимал 1 моль в жидком состоянии, то работа по расширению равна

$$A_1 = p_1V_м,$$

а работа в цикле составляет

$$A = (p_1 - p_2)V_м = \frac{\Delta pRT}{p}.$$

Тогда получим

$$\frac{A}{Q_н} = \eta, \text{ или } \frac{\Delta pRT}{pr} = \frac{\Delta T}{T}.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{\Delta pRT^2}{p\Delta T} = \frac{20\cdot 8{,}3\cdot 293{,}5^2}{1000\cdot 0{,}5} \text{ Дж/моль} \approx 29 \text{ кДж/моль}.$$

Нужно сказать, что найденное значение молярной теплоты испарения существенно ниже табличного (около 41 кДж/моль). Дело в том, что давления насыщенного пара в условии задачи были взяты «с потолка». Правильные величины $p_1 = 2{,}9$ кПа и $\Delta p = 75$ Па дают неплохое совпадение с табличным значением молярной теплоты испарения воды.

З.Рафаилов

Ф2149. *Конденсаторы емкостями C = 100 мкФ и 2C и резистор сопротивлением R_1 = 10 Ом соединены* *последовательно, а параллельно конденсатору емкостью C подключен резистор сопротивлением R_2 = = 100 кОм. К выводам цепочки подключают батарейку напряжением U = 10 В. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R_1? А в резисторе сопротивлением R_2?*

При подключении батарейки конденсаторы начинают заряжаться большим током – его величина определяется последовательно включенным резистором сопротивлением R_1. Этот ток быстро убывает, так что через очень маленький интервал времени конденсаторы оказываются заряженными. В течение этого интервала ток через резистор сопротивлением R_1 пренебрежимо мал, и тепловыми потерями в нем можно пренебречь. В начальный момент разность потенциалов между выводами первого резистора равна напряжению батарейки, затем она быстро спадет практически до нуля, в результате чего через этот резистор протечет заряд $q_1 = UC_{\text{общ}} = 2CU/3$. Тогда количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением R_1, составит

$$Q_1 = \frac{q_1 U}{2} = \frac{CU^2}{3} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

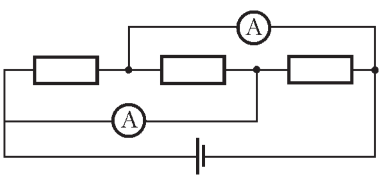
После того как ток в цепи батарейки станет малым, наступает второй интересный нам интервал времени – конденсатор емкостью $2C$ понемногу разряжается, а конденсатор емкостью C медленно заряжается до напряжения U. При этом разность потенциалов между выводами резистора сопротивлением R_2 уменьшится от $2U/3$ до нуля, и через резистор протечет полный заряд $q_2 = U \cdot 2C$ (полный заряд соединенных друг с другом двух обкладок конденсаторов вначале нулевой, а через большое время он равен по величине $2C \cdot U$). Количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением R_2, составит

$$Q_2 = \frac{q_2 \cdot 2U/3}{2} = \frac{2CU^2}{3} = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

При решении мы учли, что $R_1 \ll R_2$. И еще. Для того чтобы среднее значение разности потенциалов при вычислении выделившегося количества теплоты можно было брать равным полусумме начального и конечного значений, нужно быть уверенным, что эта разность потенциалов от величины протекшего заряда зависит линейно. Это для данного случая легко доказать. Но можно делать расчет и иначе, пользуясь балансом энергий – только нужно аккуратно учитывать работу батарейки.

А.Зильберман

Ф2150. *В схеме на рисунке резисторы (слева направо) имеют сопротивления 500 Ом, 200 Ом и 200 Ом, напряжение батарейки 6 В. Амперметры одинаковые: каждый имеет сопротивление 1 Ом, «класс точности» 1%, ток полного отклонения 50 мА. Найдите показания амперметров.*



Если считать сопротивления амперметров нулевыми, то три резистора в цепи окажутся соединенными параллельно и подключенными к батарейке. При этом ток через «верхний» прибор составит 42 мА, а через «нижний» 60 мА. Аккуратный расчет дает значения 41,4 мА и 59,2 мА (заменив амперметры резисторами сопротивлением по 1 Ом, получим обычную схему «мостика»).

Итак, один амперметр покажет примерно 41,5 мА, а второй немного «зашкалит». При упомянутой точности приборов разница точного и приближенного расчетов оказывается существенной (по крайней мере – для одного из приборов).

А.Простов

Ф2151. *Три катушки, индуктивности которых 1 Гн, 2 Гн и 4 Гн, соединены «звездой». Общая точка заземлена куском провода, параллельно этому проводу включен конденсатор емкостью 10 мкФ. В некоторый момент свободные концы катушек подключают к батарейкам, создающим в точках подключения одинаковые потенциалы +6 В. Через время 0,1 с после подключения заземляющий провод перерезают. Найдите максимальный заряд конденсатора. Элементы цепи считать идеальными.*

На первом этапе ЭДС индукции каждой катушки составляет ровно 6 вольт (кстати, тут достаточно одной батарейки, катушки будут подключены параллельно к выводам этой батарейки). При этих условиях токи катушек линейно возрастают со временем, и через время τ ток катушки индуктивностью L составит

$$I = \frac{U_0 \tau}{L}.$$

Для первой, второй и третьей катушки этот ток будет, соответственно, 0,6 А, 0,3 А и 0,15 А.

После перерезания заземляющего проводника токи катушек начинают уменьшаться, но при наших условиях (равенство ЭДС индукций параллельно соединенных катушек) они одновременно упадут до нуля – а это есть условие максимальности заряда конденсатора.

Обозначим этот заряд Q, тогда работа батарейки при «проталкивании» по цепи заряда Q равна $U_0 Q$, а энергия конденсатора равна сумме энергий катушек перед разрезанием проводника и работы батарейки. Получим уравнение

$$\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_3 I_3^2}{2} + U_0 Q = \frac{Q^2}{2C}.$$

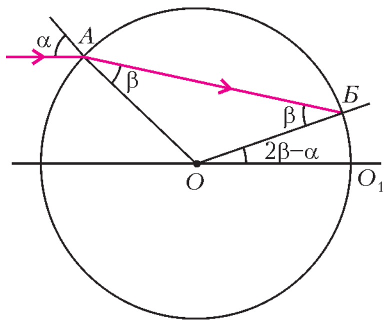
Решая это квадратное уравнение относительно Q, для максимального заряда конденсатора получаем

$$Q \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{Кл}.$$

Р.Александров

Ф2152. *Широкий параллельный пучок лучей падает на прозрачный однородный шар из материала с коэффициентом преломления n = 1,414. Найдите размер светлого пятна на противоположной стороне шара.*

Лучи, идущие близко к «главному» диаметру шара OO_1 (малые углы падения), выходят с другой стороны тоже близко к нему; значит, не они определяют максимальный диаметр пятна. При заданном значении коэф-



фициента преломления близкие к краю шара лучи попадают почти точно в точку на том же диаметре (угол падения 90°, угол преломления 45°). Ясно, что максимальное значение диаметра пятна получается от лучей, падающих где-то посредине; обозначим соответствующий угол падения луча α_0.

Пусть A – точка входа луча в шар, $Б$ – точка выхода луча из шара (см. рисунок). Тогда угол $БОО_1$ равен $2\beta - \alpha$, где $\sin\beta = (\sin\alpha)/n$, и максимальный радиус пятна определяется максимальным значением выражения $R\sin(2\beta - \alpha)$, где R – радиус шара. Таким образом, нужно исследовать на максимум выражение $R\sin\left(2\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n} - \alpha\right)$. Можно приравнять к нулю производную этого выражения по α, а можно упростить процедуру за счет монотонности синуса в интересующем нас диапазоне углов и брать производную от аргумента $2\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n} - \alpha$. Уравнение получается довольно простым, вот его решение:

$$\alpha_0 = 54{,}7°.$$

При этом радиус светлого пятна на противоположной стороне шара равен

$$r = 0{,}272R.$$

Ответ можно получить довольно быстро подбором при помощи калькулятора (даже непрограммируемого – лишь бы он умел вычислять тригонометрические функции). У автора такой подбор занял чуть меньше трех минут.

А.Шаров

ИНФОРМАЦИЯ

Декларация оргкомитета конкурса «Свободный полет»

Объявляя настоящий конкурс, основной целью которого является выявление и поощрение самостоятельно и результативно мыслящих молодых исследователей, считаем необходимым представить его участникам наш подход к пониманию роли, которую должны играть такие люди в современном научно-технологическом мире.

Сегодня, как правило, серьезные научно-технические разработки ведутся большими коллективами людей. Обнаружение новых фактов требует огромных затрат, которые должны быть обоснованы не только расчетами, но и мнением научного сообщества. В конкуренции идей главным фактором становится «вес» (звания и число) людей, стоящих за той или иной идеей. Наука формально (фактически это было всегда) становится частью экономики и политики, впитывая в себя и то, что характерно для последних: инерцию, бюрократию, рекламу и т.п. Что в этих обстоятельствах по силам одиночкам? Как быть людям, которые ничего не принимают на веру, сомневаются в истинности привычных для всех концепций, полны «безумными идеями» и желают их реализовать? Перед ними, как правило, встает «стена» из консерватизма, бюрократии и недобросовестной конкуренции. Особенно в случаях, когда реализация их продвинутых идей может оставить без дела целые научные школы. Между тем, именно такие люди и могут дать импульс научно-техническому прогрессу. Ведь прогресс представляет собой не эволюционный процесс, а череду пусть и небольших, но революций, инициируемых людьми, готовыми без промедления отказаться от привычных взглядов и понятий. Таких людей достаточно много (по некоторым оценкам, десятки тысяч). Некоторым из них может в жизни повезти – в силу сложившихся обстоятельств они попадают в «команды», которые дают им возможность реализоваться. Большинство, не будучи услышанными, «перегорают», многие «изобретают велосипеды». А рост информационного пространства, увеличивающееся дробление науки на отрасли и направления и т.п. далеко не всегда способствуют реализации потенциала этих людей. К тому же, самостоятельное мышление – это не услада для его обладателя, который зачастую полон неуверенности и сомнений, мечется между противоположностями и отягощен необходимостью каждый раз делать самостоятельный выбор.

В качестве примера остановимся на дилемме «конечное – бесконечное». Очевидно, здесь речь идет о противоположностях, причем первое понятие сходу кажется понятным, а второе – скорее чем-то неуловимым, абстрактным. Но если вдуматься, то «конечное» – это столь же ускользающее понятие, что и «бесконечное». Каждое взятое в одиночку, они имеют мало смысла. Лишь в сочетании эти понятия обогащают содержание друг друга. Согласитесь, что не бывает бесконечного, которое не содержало бы в себе конечных составляющих, и точно так же нет смысла выделять конечное само по себе, если оно не подразумевает бесконечное. Сходная логика обнаруживается и при выделении других парных сочетаний противоположных понятий: «дискретное – непрерывное» («частица – поле»), «материя – пространство», «движение – покой» и т.п. Как говорят философы, понятие (утверждение) содержательно (богато возможностями в плане использования) настолько, насколько содержательно ему противоположное.

Вот почему объективная мысль мечется в противоположностях. Конечно, это тяжело – думать про одно и все время помнить про другое. Хочется определиться и перейти к, казалось бы, нормальному однонаправленному мышлению. И в большинстве конкретных ситуаций, чтобы мышление было результативным, так и нужно делать. Необходимо тогда обуздать воображение, отбросить сомнения и, остановившись на определенных взаимно непротиворечивых положениях, подвергнуть свои идеи

Информация об этом конкурсе, проводимом благотворительным фондом «Новая мысль», опубликована в журнале «Квант» № 5.

логическому анализу, результаты размышлений сверить с фактами или с аналогами из других концепций.

Самостоятельное мышление – это не только понимание сути и основ теории и сферы ее применимости, умение выводить в ее рамках следствия для частных случаев и т.п. Необходимо еще понимать, что всякая теория имеет альтернативы, допускать эти альтернативы, быть готовым в любой момент отказаться от привычных концепций, если новые факты укладываются в их рамки «со скрипом» (тем более, когда выходят за эти рамки).

Разумеется, существуют понятия, в основательности которых трудно усомниться. Например, окружающая нас реальность со всеми происходящими в ней процессами сплошь и рядом демонстрирует незыблемость и всеобщность следующих трех свойств: экономичность, симметричность и относительность (два последних в какой-то мере являются частными случаями первого). Возможно, этот список не является исчерпывающим и нуждается в дополнении (в будущем, скорее всего, так и случится). Но как бы то ни было, можно перечислить ряд положений, которые нельзя включать в этот список всеобщих понятий несмотря на то, что они считаются фундаментальными.

Например, нельзя принять на веру, что электрон на земле и электрон на расстояниях в миллиарды световых лет от нее имеют в точности одну и ту же массу покоя. Трудно считать незыблемыми физическими константами такие безразмерные величины, как, например, постоянная тонкой атомной структуры, отношения масс элементарных частиц и т.п. Еще Эйнштейн сомневался в их, так сказать, случайном характере. Или это суть математические константы (т.е. выводятся в рамках какой-то неизвестной нам теории), или они не являются константами (т.е. меняются во времени и (или) в пространстве). Трехмерность окружающего нас пространства также является одним из постулатов современной теории, но пока нет оснований считать его незыблемым. Завершим эти примеры таким утверждением: *возможность чего-либо невозможно опровергнуть!* Иными словами, нельзя на практике доказать, что нечто невозможно. Это один из атрибутов бесконечности, демонстрирующий ограниченность логики.

Объявляя наш конкурс, мы преднамеренно не конкретизируем задания для его участников. Содержательность ответа, как известно, зависит от качества вопроса. Как говорят, хороший вопрос – это половина ответа. Поэтому оцениваться будет и постановка проблемы тоже. Более того, решение может быть не самым удачным или даже неправильным, но это компенсируется качеством и актуальностью постановки вопроса. Помните, что вопросы-сигналы, поступающие из окружающего мира (факты, явления и т.п.), – это первооснова, сырье, которое еще предстоит в процессе изучения переработать, превратить в задачу. А затем уже надо анализировать четко поставленную задачу, определять круг описываемых явлений, область изменения и точность задания параметров, для которых решение будет корректно, и т.д.

Мы специально не ограничиваем участников конкурса в выборе и формулировании вопросов. Пусть это будет что угодно, лишь бы оно имело определенный смысл. В современной науке и развивающихся технологиях есть множество проблем. В частности, это известные расходимости в квантовой теории, корректное определение тензора энергии-импульса в общей теории относительности, парадоксы в теории множеств, саморазвивающиеся компьютерные программы (включение в них случайных выборов, учет опыта ошибок и т.п.). Да и в обыденной жизни найдется многое, что можно попытаться формализовать на языке математики (например, обнаружив определенное подобие, попробовать применить законы газовой динамики для … анализа движения машин на автостраде).

Можно поставить задачу из серии «что было бы, если бы …» Или придумать новый вид взаимодействия. Или выяснить, какова была бы реальность, если бы, например, постоянная Планка оказалась заметно больше (или меньше) той, которая нам известна. Не так уж гипотетична задача, в которой какие-либо мировые константы можно было бы считать нестационарными. Например, красное смещение можно объяснить не только разбеганием галактик, но и тем, что со временем меняются масса электрона или постоянная Планка.

Итак, мы не ждем от вас открытий. Нас особенно не интересует и ваша эрудиция, поэтому не бойтесь прослыть невежественными. Скорее всего, то, что мы от вас ждем (а вы нам пришлете), не принял бы ни один серьезный научный журнал. Наверное, серьезные ученые скорее всего отправляют подобное «творчество» в корзину, так же как следователь отбрасывает не оправдавшие себя версии. Но кто знает, может когда-нибудь среди такой «отработки» найдется то, что раньше упустили. Например, кто-то, роясь в этой общей корзине, наткнется на необычные идеи, которые послужат толчком для новых открытий. Но даже если все будет не так, мы надеемся достичь своей главной цели: помочь реализовать себя людям, способным к самостоятельному нестандартному мышлению и поиску. Так рождаются инновации.

Сомневайтесь! Опровергайте! Предлагайте!

Условия проведения конкурса

Каждый участник представляет на рассмотрение жюри свой проект, содержащий сформулированную задачу и ее решение. (В отдельных случаях жюри готово рассматривать задачи с незавершенными решениями.)

Общий объем отчета по проекту должен быть не более 10 машинописных страниц, при этом все громоздкие вычисления должны быть вынесены в приложения, которые являются составной частью отчета.

Распечатанный вариант отчета (1 экз.) нужно прислать по почте в редакцию журнала «Квант» по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, д. 64-А, а электронный отчет отдельным файлом нужно послать на электронный адрес редакции: admin@kvant.info.

Титульный лист отчета должен содержать следующую информацию о конкурсанте:

фамилия, имя, отчество;

почтовый адрес, электронный адрес, телефон;

данные об образовании, о наличии научной степени (если таковая имеется).

Срок приема заявок на участие в конкурсе – *до 15 апреля 2010 года.* Итоги конкурса будут подведены в конце мая 2010 года.

Работы, с согласия их авторов и заслуживающие общего внимания по мнению жюри, будут размещаться на специальном сайте фонда «Новая мысль» с указанием тех работ, которые отмечены премиями.

Журнал «Квант», независимо от результатов участия работы в конкурсе, может (по согласованию с автором) опубликовать некоторые работы, подходящие по формату и идеологии журнала.

Задачи

1. Мистер Твистер получил в наследство несколько фабрик. За его жизнь 7 фабрик разорилось, а остальные он разделил поровну между своими семью сыновьями. Младший сын за свою жизнь пустил на ветер 6 фабрик, а остальные разделил между своими семью сыновьями. Его младший сын продал с молотка 5 фабрик, но остальные по семейной традиции разделил между своими семью сыновьями. При жизни его младшего сына разорились 4 фабрики, но когда дело дошло до наследства, делить было нечего – у прогоревшего дельца оставалась всего одна фабрика. Сколько фабрик было изначально у мистера Твистера?

А.Хачатурян

2. Планета имеет форму шара. Можно ли провести на ней 2009 меридианов и 2010 параллелей так, чтобы они разделили планету на участки равной площади?

Г.Гальперин

3. Два насоса вместе заполняют бассейн за два часа, а раздельно они заполняют его за целое, но разное число часов. За сколько часов каждый насос заполняет бассейн?

Н.Конищев

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

4. Петя вышел из точки *А* плоской равнины и прошел 1 м на юг, 2 м – на запад, 3 м – на север, 4 м – на восток, 5 м – на юг, 6 м – на запад, 7 м – на север, 8 м – на восток и т.д. Пройдя суммарно 5 км, Петя устал и сел отдохнуть. На каком расстоянии от точки *А* это случилось?

С.Дориченко, Т.Голенищева-Кутузова

5. Имеется 9 одинаковых с виду монет. Из них одна фальшивая, которая легче настоящей. Одна из монет прилипла к одной из чаш чашечных весов без гирь. Отдирать ее некогда. Как за два взвешивания найти фальшивую монету? (Она может быть и прилипшей.)

А.Шаповалов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info ***(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.***

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Расставьте между числами в левой части равенства

$$7^5\ 7^4\ 7^3\ 7^2\ 7\ \ 1 = 2009$$

знаки арифметических действий и скобки так, чтобы равенство стало верным.

М.Мурашкин

12. Назовем натуральное число *возрастающим*, если в нем каждая следующая цифра больше предыдущей (например, число 23689). Докажите, что если возрастающее число умножить на 9, то сумма цифр полученного числа всегда равна в точности девяти.

Фольклор (предложил Л.Штейнгарц)

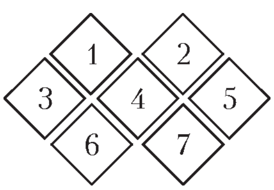


Рис. 1

13. Из пронумерованных квадратных фишек 1×1 сложена фигура, содержащая два квадрата 2×2, причем фишка с номером 4 – общая (рис.1). Фишки каждого квадрата 2×2 можно поворачивать вокруг его центра на угол, кратный 90°. Можно ли при помощи таких поворотов получить расположения, показанные на рисунках 2 и 3?

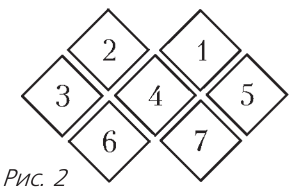


Рис. 2

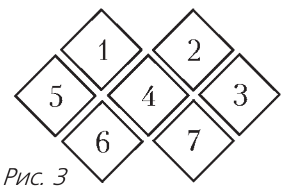


Рис. 3

Н.Авилов

14. Докажите неравенство $a+b+c \geq \sqrt{3}$, если известно, что $ab+bc+ca=1$ и среди чисел a, b, c хотя бы два положительны.

В.Асланян

15. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник можно разрезать на четыре части, из которых складывается прямоугольник.

С.Волчёнков

Мешает ли птицам попутный ветер

Н.КОНСТАНТИНОВ

Когда я уже научился читать, мне попалась книжка о путешественниках – какая именно книжка, я забыл, а запомнил из нее только один эпизод.

Путешественники разбили лагерь в лесу рядом с озером, на которое села для отдыха во время перелета стая диких гусей. Наступил вечер, и охотиться было уже невозможно.

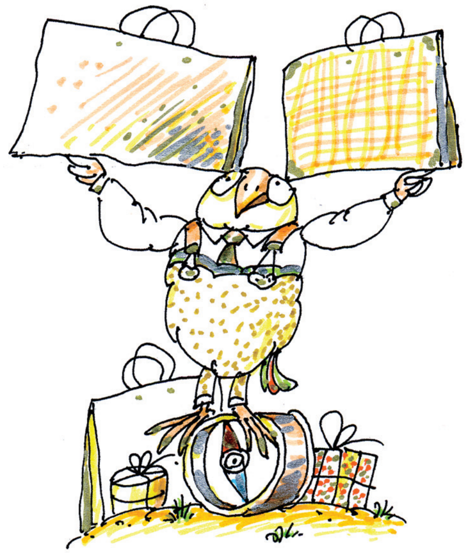
– Завтра будет славная охота, – сказал один.

– А ты не думаешь, что на рассвете птицы улетят? – сказал другой.

– Не улетят, ведь ветер северный, для гусей попутный. Птицы не летают с попутным ветром, так как он задувает им под маховые перья крыльев.

Этот разговор показался мне странным. Я бы на месте птиц радовался попутному ветру – на нем можно лететь быстро, быстрее ветра. Но я был маленький, и все, что написано в книгах, было для меня истиной. Так что я запомнил только, что я чего-то не понял.

Прошло двадцать пять лет. Я учился в аспирантуре, моим руководителем был Алексей Андреевич Ляпунов – известный математик, который в это время глубоко интересовался кибернетикой и математическими подходами к биологии. Он был связан научными интересами и личной дружбой с нашим крупным биофизиком, одним из основателей науки биофизики – Николаем Владимировичем Тимофеевым-Ресовским. По



совету Алексея Андреевича я посетил семинар по биофизике, проводившийся Николаем Владимировичем на биостанции Миассово на Урале. История, рассказанная Николаем Владимировичем, заставила меня вспомнить прочитанную в детстве книжку. Оказывается, было время (и я как раз его застал), когда из статьи в статью, из книги в книгу повторялась одна и та же мысль – что попутный ветер задувает птицам под крылья. И группа биологов, в их числе Тимофеев-Ресовский, в нескольких публикациях разъяснили биологам ошибочность этой мысли и рассказали о принципе относительности Галилея.

Еще один эпизод напомнил мне, что некоторые старшеклассники в наше время еще не доросли до понимания картины мира, возникшей после открытий Галилея.

Стройотряд из студентов и школьников работал летом на Беломорской биостанции МГУ (я был уже учителем). Мы возвращались с одной морской экскурсии на теплоходе «Научный». Группа ребят попросила у капитана разрешения сидеть не на теплоходе, а в шлюпке, которая тянулась за теплоходом на буксире (там было куда приятнее). А за шлюпкой, на расстоянии примерно трех метров от нее, тянулся еще маленький ялик, в котором никто не сидел.

И вот самый молодой из нас, Леша Кувшинов, который тогда перешел в десятый класс, захотел пересесть в ялик. А сделать это на ходу было, по-моему, невозможно. По крайней мере, очень трудно: даже если подтянуть ялик к шлюпке, то пересесть на него и не перевернуться было немыслимо. Но Леша придумал другой способ: «Я высоко подпрыгну, а пока буду опускаться, ялик окажется уже подо мной». И тут все старшеклассники (а это были все матшкольники, и с ними шутки плохи) стали наперебой объяснять Леше принцип относительности Галилея.

Землю, говорили они, можно считать инерциальной системой отсчета. Это означает, что если на тело не действуют внешние силы (или, точнее, если все силы, действующие на тело, компенсируют друг друга), то оно сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно Земли. Конечно, бывают такие ситуации, в которых систему отсчета, связанную с Землей, нельзя считать инерциальной. Наглядный пример тому – маятник Фуко. В инерциальной системе отсчета плоскость, в которой колеблется маятник, остается постоянной, а в действительности, скажем если опыт поставлен в Москве, плоскость колебаний медленно поворачивается. Другой пример – реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег. А если бы система, связанная с Землей, была инерциальной, оба берега были бы равноправны. Но это все довольно тонкие эффекты, наблюдаемые либо при очень точных измерениях, либо за очень большие промежутки времени. В нашем же случае систему отсчета, связанную с Землей, вполне можно считать инерциальной. Значит, и любую другую систему отсчета, которая движется относительно Земли равномерно и прямолинейно, также можно считать инерциальной. Наша шлюпка как раз и есть такая система отсчета. И тогда, по принципу относительности Галилея, все законы физики в системе шлюпки выглядят так же, как и в системе, связанной с Землей. И подпрыгнув в шлюпке ты опустишся в ту же точку шлюпки, из которой стартовал, как это было бы и на берегу.

Тут один из наших ребят возразил, что если на твердой почве, т.е. на берегу, выстрелить вертикально вверх, то снаряд не упадет в ту же точку, из которой стартовал, даже если воздух полностью неподвижен относительно Земли. Это действительно так, но это еще один случай, демонстрирующий неинерциальность земной системы отсчета. Поскольку эффект незначительный, в нашем опыте его можно не учитывать.

Однако Лешу все эти объяснения не убедили. Приводили ему и рассуждения Галилея, объяснявшего своим современникам, что если дуэль на пистолетах происходит в трюме движущегося корабля, то ни один из дуэлянтов, смотрит ли он от кормы к носу корабля или наоборот, не имеет преимуществ. И напоминали, как он, Леша, едучи в поезде на Биостанцию, играл в вагоне в мяч и мяч двигался по отношению к вагону так же, как он двигался бы на неподвижной земле при тех же ударах по нему. Но все было бесполезно. Леша непременно хотел подпрыгнуть, а мы возражали, так как шлюпка в результате удара могла дать течь. Но в конце концов уступили, и Леша подпрыгнул. Он, как и должно было быть, опустился в исходную точку (а лодка так качнулась, что набрала некоторое количество воды). Леша надолго задумался. И, наверное, запомнил принцип относительности Галилея навсегда.

Воспользуюсь случаем, чтобы показать на примерах, как поверхностно зачастую школьники учат уроки.

Однажды один студент ехал на Беломорскую биостанцию. Он приехал на поезде в Пояконду, откуда его должны были доставить к месту на катере. Подошел к берегу в три часа ночи (ночи белые), до прихода катера было еще далеко. Кругом ни души. Он положил на землю свой тяжелый рюкзак и пошел осматривать окрестности. А когда вернулся, рюкзака не было. О воровстве не могло быть и речи – поселок крохотный, и жители даже дверей не запирают. Студент сел на камень и предался тяжелым размышлениям о превратностях жизни. «А что это там в море плавает?» – подумал студент. «Нет, не плавает, а, пожалуй, стоит на месте». Пригляделся. «Да это же мой рюкзак!» – догадался студент. Благо были на нем сапоги – дошел до рюкзака по мелководью. Забыл студент, что в море бывают приливы. А ведь учил это в школе, и, возможно, даже получил пятерку за отлично вызубренный урок. Но в том-то и дело, что можно вызубрить и не задуматься.

Другой случай – опять же на Белом море. Группа туристов пошла погулять, а один из них, Саша Кодряну, остался у костра, чтобы приготовить чай. Это был очень толковый школьник, только что заработавший первую премию на Всесоюзной математической олимпиаде. Он пошел к колодцу, а рядом море – вода в нем такая прозрачная и так красиво играет на солнце. И он набрал в ведро морской воды. Забыл он, что вода в море соленая, а ведь наверняка знал об этом. Но это были знания для отметки, а не для жизни. Вода (соленая) закипела как раз к возвращению уставшей группы.

Получается, что школьные знания могут оказаться бесполезными. Это бывает, если они не связываются с жизненными наблюдениями. У человека должны быть две «школы» – одна на улице и дома, другая – в школе, и они должны быть связаны. Но так бывает не всегда. Вот идет человек по городу, ему пятнадцать лет, и у него стопроцентное зрение. Но он ничего не видит. Он не заметил, что голуби и вороны – это разные птицы. Не заметил, что у троллейбусов на крыше рога (они по-научному называются пантографы). Он никогда не видел радуги, не замечал, что у кучевых облаков нижние поверхности обычно ровные. Все это я не выдумал – это результаты наблюдений. Спросил я както своих кружковцев, бывает ли так, что Луна и Солнце видны на небе одновременно. Один сказал, что он однажды это видел, остальные ничего такого не замечали, а некоторые вообще удивились, что Луну можно увидеть днем.

Но... вернемся к птицам. Меня всегда учили, что записные книжки Леонардо да Винчи изобилуют гениальными догадками. И вот недавно я, наконец, решил почитать эти книжки, которые, разумеется, давно изданы в солидных академических издательствах. В «Избранных произведениях» Леонардо да Винчи (М.: Издательство АН СССР, 1955) есть глава «О летании и движении тел в воздухе». Это подробное исследование, в котором много интересных наблюдений и прекрасных рисунков. Но понимать его очень трудно, порой невозможно. Ведь Леонардо писал для себя, не заботясь о том, чтобы разъяснять смысл употребляемых терминов. В этой главе есть раздел «Почему перелетные птицы летают против течения ветра?» Я в этом тексте не смог разобраться, но вывод очевидно не верен. На рисунках показано, как птицы взлетают – действительно всегда против ветра. А когда они уже высоко, то не видно, куда дует ветер. Можно предположить, что это и привело к ошибке.

Надо заметить, что Леонардо постоянно ссылается на законы статики, открытые еще Архимедом (Архимеда он изучал по полному собранию сочинений, которое, как известно из его записных книжек, было ему доступно). Но для изучения полета недостаточно статики. А динамики, как науки, тогда еще не было, и Леонардо там, где не хватало знаний, постоянно использовал интуитивные догадки. Так, всю жизнь он пытался создать летательный аппарат, но это ему не удалось. Потребовались четыре столетия развития науки и техники, чтобы человек поднялся, наконец, в воздух.

Итак, мне кажется, я догадался, откуда у биологов возникла ошибочная мысль о том, что попутный ветер мешает птицам летать. Она возникла из трудов Леонардо да Винчи. А удерживалась эта идея в головах некоторых людей потому, что в знании физики эти люди не перевалили через эпоху Галилея. Но не будем упрекать Леонардо в том, что он не опередил следовавшего за ним гения...

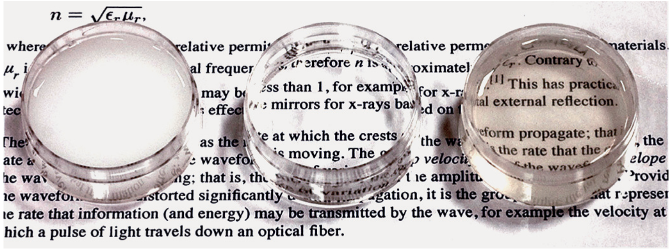
ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Как сделать молоко прозрачным?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

... Оказывается, что через некоторое время, когда концентрация сахара в растворе молока в воде достигнет необходимой величины, раствор опять станет прозрачным. Просветляющее действие сахара объясняется довольно просто.

Тела перестают быть прозрачными, когда внутри них появляются границы раздела сред с различными показателями преломления света. В молоке это границы между капельками молочного жира (его показатель преломления $n = 1{,}433 - 1{,}500$) и водой ($n = 1{,}333$). На этих границах свет отражается в самых разных направлениях, т.е. рассеивает-



ся. Вот почему молоко непрозрачное. Если же увеличить показатель преломления воды, доведя его до показателя преломления молочного жира, например растворив в ней сахар, то молоко можно сделать прозрачным.

К.Богданов