журнал© Квант НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2009 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

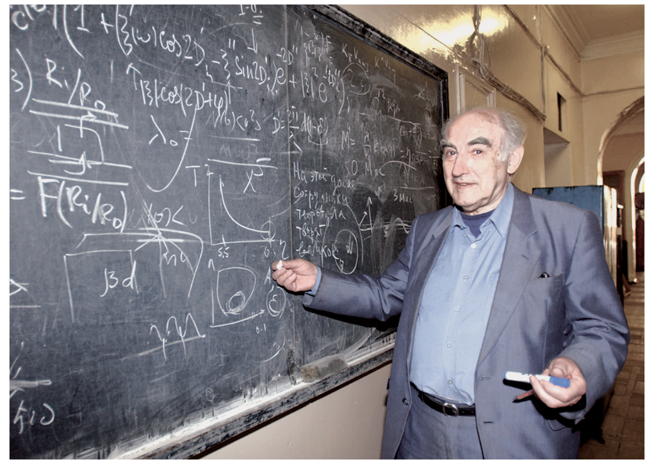
В номере:

TENEX В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН
Издатель – ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ПАМЯТИ ВИТАЛИЯ ЛАЗАРЕВИЧА ГИНЗБУРГА



Виталий Лазаревич Гинзбург

(4.10.1916 – 8.11.2009)

Российская и мировая наука понесли тяжелую утрату. Ушел из жизни великий физик, замечательный человек и выдающийся педагог – Виталий Лазаревич Гинзбург. Его научные работы и результаты известны физикам всех стран мира.

Академик Российской академии наук (РАН), доктор физико-математических наук, профессор, Советник РАН, руководитель научной группы Физического института им.П.Н.Лебедева РАН, автор около 450 научных работ и более 20 научных монографий и учебных пособий, иностранный член ряда научных обществ и академий, в том числе Лондонского Королевского общества, Американской национальной академии наук, Европейской академии и др., Виталий ЛазаревичГинзбург много успел сделать для физической науки.

В 2003 году В.Л.Гинзбургу (совместно с А.А.Абрикосовым и Э.Дж.Леггетом) была присуждена Нобелевская премия по физике «За пионерский вклад в теорию сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей».

Нельзя представить себе теоретическую физику нашего времени без разработанных им теорий, а российское образование и общественную жизнь – без его научных, научно-популярных и публицистических произведений. Бесконечная доброжелательность в сочетании с высоконравственной гражданской позицией и научной принципиальностью – вот что определяло поведение Виталия Лазаревича в многочисленных, часто непростых, жизненных ситуациях. Он постоянно заботился о развитии науки, много и с тревогой думал о воспитании молодого поколения. В.Л.Гинзбург был близок и нашему журналу, он печатал свои статьи в «Кванте», был постоянным членом редколлегии «Библиотечки «Квант».

В.Л.Гинзбург – крупнейший физик-теоретик, ему принадлежит ряд фундаментальных результатов в области квантовой теории, теории твердого тела, теоретической радиофизики, астрофизики, теории сверхпроводимости, оптики, специальной и общей теории относительности. Он участвовал в особо важных исследованиях, связанных с созданием термоядерного оружия. Именно он был автором одной из основных идей, приведших к созданию такого оружия. Многие результаты В.Л.Гинзбурга признаны классическими, вошли в учебники и активно цитируются как отечественными, так и зарубежными учеными.

В его работах предсказано существование термоэлектрических явлений в сверхпроводниках, развита феноменологическая теория сегнетоэлектрических явлений, создана феноменологическая теория сверхпроводимости и сверхтекучести жидкого гелия, создана теория кристаллических эффектов с учетом пространственной дисперсии, установлен критерий применимости теории Ландау фазовых переходов второго рода, указана возможность высокотемпературной сверхпроводимости в слоистых системах за счет электрон-экситонного взаимодействия, разработана теория распространения радиоволн в плазме, исследовано нелинейное воздействие на ионосферу мощных радиоволн – таков далеко не полный перечень впечатляющих результатов, полученных *одним* человеком.

В течение 18 лет Виталий Лазаревич возглавлял Теоретический отдел Физического института – один из основных центров теоретической физики в нашей стране. Он несколько десятилетий руководил уникальным еженедельным московским семинаром по теоретической физике. С 1968 года В.Л.Гинзбург возглавлял созданную им в Московском физико-техническом институте кафедру проблем физики и астрофизики. За годы существования кафедры ее закончили более 250 студентов и аспирантов, около 90 из них защитили кандидатские и около 30 – докторские диссертации. Среди учеников В.Л.Гинзбурга – академики и члены-корреспонденты РАН.

В.Л.Гинзбург всегда активно участвовал в работе научных и ученых советов и редакционных коллегий научных журналов – как отечественных, так и зарубежных. С 1998 года был главным редактором ведущего российского физического журнала «Успехи физических наук». В 1989 – 1991 годах В.Л.Гинзбург был народным депутатом СССР от Академии наук.

Виталий Лазаревич Гинзбург отмечен следующими наградами: Нобелевская премия (2003), Золотая медаль «Юнеско–Нильс Бор» (1998), Золотая медаль Лондонского Королевского астрономического общества (1991), Золотая медаль Э. Резерфорда (1981), Премия им. Дж. Бардина (1991), Премия им. Вольфа (1994/1995), Ленинская премия (1966), Государственная премия СССР (1953), Премия «Россиянин года» (2006), Орден «За заслуги перед Отечеством» III степени (1996), Орден «За заслуги перед Отечеством» I степени (2006), Большая золотая медаль им. М.В. Ломоносова РАН (1995), Золотая медаль им. С.И. Вавилова (1995), Премия им. М.В. Ломоносова (1962), Премия им. Л.И. Мандельштама (1947), Премия «Триумф (наука)» (2002).

Измеряем прочность тел от нано до мега

А.ВОЛЫНСКИЙ, Л.ЯРЫШЕВА

ЗАВИСИТ ЛИ ПРОЧНОСТЬ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТ ЕГО размеров? Вопрос может показаться странным. Под прочностью обычно понимают напряжение, при достижении которого твердое тело распадается на части. Обратите внимание – *напряжение*, т.е. сила, деленная на поперечное сечение, а не просто сила. Сила действительно зависит от размеров твердого тела. Например, чтобы разорвать одну нить, достаточно относительно малой силы, а чтобы разорвать сплетенный из этих же ниток канат, необходимо затратить существенно большее усилие. Но если силу отнести к поперечному сечению твердого тела (в первом случае малую силу к сечению одной нитки, а во втором – большую силу к сумме сечений всех ниток, составляющих канат), мы получим одно и то же разрушающее напряжение, или прочность. Казалось бы, ответ на заданный вопрос получен: нет, не зависит.

Однако все оказывается не так просто, если обратиться к практике. Установлено, что переход вещества от микро- к наноразмерам влечет за собой качественные изменения в его физических, механических, физико-химических и других свойствах. Эти изменения настолько разительны, что перед учеными встает неотложная задача изучить и понять механизм их возникновения.

Чем отличаются твердые тела, имеющие наноразмеры, от обычных твердых тел?

Самое очевидное отличие – усиление роли приповерхностной области. Взаимодействие между молекулами (атомами) на поверхности отличается от объемного взаимодействия, поскольку молекулы не имеют соседей с внешней стороны. С уменьшением размера образца вклад молекул, находящихся в поверхностном слое, возрастает. Это можно проследить на примере того, как изменяется отношение объема поверхностного слоя к полному объему. Для сферического образца размером 1 мкм поверхностный слой толщиной в 1 нм составит ничтожно малую долю, в то время как для образца размером 10 нм эта доля приближается к 50%.

Таким образом, в объемных, блочных, твердых телах вклад поверхностного слоя в макроскопические свойства крайне мал, и им обычно пренебрегают. Однако когда размеры твердого тела делаются малыми, соизмеримыми с молекулярными размерами (наноразмерами), влияние приповерхностных слоев становится значительным, и свойства вещества качественно изменяются.

Измеряем нанопрочность

Несмотря на уже достигнутые результаты в изучении свойств вещества в наносостоянии, проблема прочности материалов, имеющих размеры единиц – десятков нанометров, пока далека от своего решения. Отсутствие данных о деформационно-прочностных свойствах твердых тел в слоях нанометрового диапазона обусловлено главным образом экспериментальными трудностями.

Стандартный подход к оценке механических свойств твердых тел включает в себя изготовление образца, помещение его в зажимы деформирующего устройства и деформирование образца, сопровождающееся регистрацией напряжений и деформаций. В данном случае такой подход оказывается совершенно неэффективным. Действительно, трудно себе представить, каким образом можно изготовить образец толщиной в 10 нм, поместить его в некое устройство, подвергнуть деформации и измерить соответствующее напряжение.

Понятно, что развитие новых методов исследования, способных дать достоверную информацию о фундаментальных свойствах нановещества, очень актуально. Для практического решения этой задачи на химическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова был предложен новый подход к оценке механических свойств твердых тел, который базируется на обнаруженных ранее фундаментальных деформационно-прочностных свойствах полимерных пленок с нанесенным на их поверхность тонким покрытием. В экспериментальном плане такой подход очень прост. Твердое тело, свойства которого необходимо оценить, наносится в виде тонкого (практически любой толщины, в том числе и нанометровой) слоя на поверхность полимерной пленки. Методы такого нанесения хорошо разработаны, поскольку полимерные пленки с тонкими покрытиями широко используются на практике.

Оказалось, что если такую пленку с покрытием подвергнуть простому растяжению в одном направлении, то на ее поверхности произойдут удивительные превращения. На рисунке 1 представлена электронная микрофотография поверхности полимерной пленки с

Эта статья опубликована в рамках договора с ГК «РОСНАНОТЕХ»

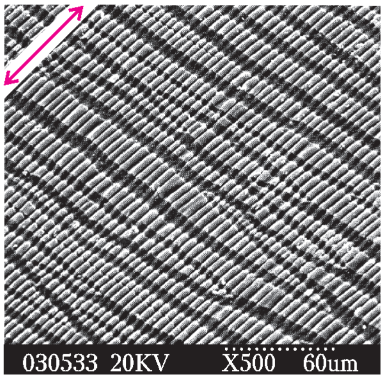


Рис.1. Поверхность образца поливинилхлорида, на который нанесли тонкий (16 нм) слой платины и после этого растянули в направлении стрелки на 50% при 90 °С (изображение получено в сканирующем электронном микроскопе)

нанометровым покрытием после ее растяжения в полтора раза. Легко видеть, что растяжение имеет удивительные последствия – покрытие распадается на множество сильно вытянутых (почти одномерных) островков примерно одинакового размера, ориентированных перпендикулярно направлению растяжения, и на поверхности пленки возникает удивительно регулярный микрорельеф. Поражает четкая регулярность самопроизвольно возникающего рельефа и строгая ориентация его элементов относительно оси растяжения. Углубления и вершины всегда ориентированы строго вдоль (параллельно) оси растяжения. При фрагментации покрытия также достигается высокая степень порядка. Таким образом, при растяжении полимерной пленки с тонким твердым покрытием образуются высокоорганизованные периодические структуры.

С чем связаны наблюдаемые изменения в поверхностном слое полимерной пленки с тонким покрытием? Важно отметить, что полимеры, хотя и являются твердыми телами, но, подобно жидкостям, при деформации стремятся сохранить постоянным свой объем. Это означает, что растяжение в одном направлении сопровождается соответствующим сжатием (контракцией) пленки в направлении, перпендикулярном действующей растягивающей силе. Другими словами, полимерная пленка испытывает два вида деформации одновременно: растяжение и (в нормальном к нему направлении) сжатие. Очевидно, что и нанесенное на поверхность пленки покрытие также будет испытывать оба вида напряжений. Оказывается, именно сжатие ответственно за возникновение регулярного рельефа, а растяжение вызывает разделение (разрушение) покрытия на отдельные фрагменты.

Экспериментальное и теоретическое исследование обнаруженного явления позволило разработать универсальную методику оценки механических свойств, и в частности прочности, твердых тел в слоях практически любой толщины. Установлена четкая связь между наблюдаемыми особенностями фрагментации и рельефообразования покрытия при деформировании полимера-подложки и свойствами материала покрытия и подложки. Так, средний размер (L) фрагмента разрушения в направлении оси растяжения (светлых полос на рисунке 1) оказывается равным

$$L = \frac{4h\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_0}, \qquad (*)$$

где h – толщина покрытия, $\sigma_{\text{пр}}$ – предел его прочности и σ_0 – напряжение в подложке. Значение h известно, величина σ_0 легко определяется в эксперименте, а L прямо измеряется на микрофотографии. Таким образом, данное соотношение дает возможность простым путем находить важнейшую характеристику твердого тела – прочность в слоях практически любой толщины.

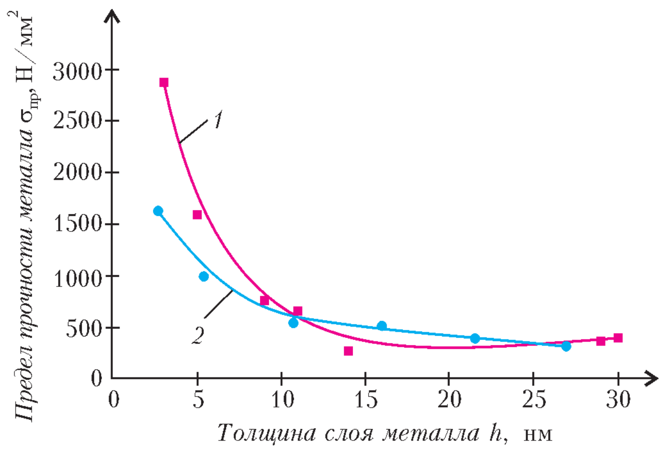


Рис.2. Зависимости прочности золота (1) и платины (2) от толщины металлического слоя, нанесенного на пленку полиэтилентерефталата (пленку с покрытием растягивали на 100% при 90 °С)

Теперь можно попытаться использовать формулу ($*$) для оценки прочности твердого тела в слоях нанометрового диапазона. На рисунке 2 представлена зависимость предела прочности платины и золота от толщины металлического слоя, нанесенного на полиэтилентерефталатную пленку. Видно, что в интервале толщин от 30 до приблизительно 15 нм прочность обоих металлов практически не зависит от толщины и составляет 180–220 Н/мм^2 для золота и 250–300 Н/мм^2 для платины. Эти значения хорошо согласуются с известными значениями прочности для блочных металлов (176–250 Н/мм^2 для золота и 240–351 Н/мм^2 для платины). В то же время, при уменьшении толщины покрытия ниже 15 нм прочность обоих металлов начинает возрастать: для платины достигается значение 1500–1700 Н/мм^2, для золота – до 2800 Н/мм^2. Получается, что прочность металла в нанослоях по крайней мере на порядок превосходит прочность блочного материала. Приведенные результаты можно считать первой прямой экспериментальной оценкой прочности твердого тела нанометрового размера в условиях его растяжения. Кроме того, эти данные позволяют провести условную границу между размерами твердого тела, в данном случае металла, в обычном объемном состоянии и в наносостоянии.

Итак, ответ получен: прочность твердого тела зависит от его размеров в наноразмерном диапазоне, причем чем меньше размер, тем выше прочность. Важно отметить, что, несмотря на отсутствие прямых измерений прочности твердого тела в нанослоях, теория предсказывает рост прочности твердых тел при переходе к наномасштабам.

От нано к мега

Вот такие интересные последствия удается наблюдать при простом растяжении полимерных пленок с тонкими нанометровыми покрытиями. Но неужели только в них могут происходить описанные явления? Трудно представить, что это так. Существует немало физических объектов, построенных по принципу «твердое покрытие на податливом основании». Не исключено, что деформация (сжатие и растяжение) полимерных пленок с тонкими покрытиями моделирует многие процессы в окружающем нас мире.

В природе очень часто имеют место ситуации, когда подобные системы подвергаются разного рода деформациям. Как следствие, возникают многочисленные регулярные структуры. Потеря устойчивости в условиях плоскостного сжатия приводит к появлению удивительно красивых рельефов – таких, например, которые образуются при высыхании капли краски.

Системы «твердое покрытие на податливом основании» подвергаются и деформации плоскостного растяжения. Его результаты видел каждый, кто замечал на почве сухие, в трещинах, корки. Когда высыхает влажная земля, образовавшаяся на ее поверхности твердая корка стремится сжаться, но этому препятствует лежащее под ней мягкое, почти несжимаемое основание – слой грязи. В результате корка оказывается в условиях плоскостного растяжения. За счет испарения жидкости из почвы растягивающие напряжения усиливаются, и появляется сетка трещин на жесткой поверхности. Трещины образуются и распространяются по строгим законам, присущим все тем же системам «твердое покрытие на податливом основании».

Аналогичные картины возникают и при остывании магматических расплавов – так называемых вулканических бомб. При медленном остывании расплава граница между жестким слоем и еще не остывшей жидкой сердцевиной движется вглубь. Твердая фаза, непрерывно сосуществующая вместе с жидкой, постоянно подвергается деформации плоскостного растяжения. Когда этот процесс замедлен, фрагментация происходит настолько регулярно, что кажется делом человеческих рук. Именно этот механизм лежит в основе возникновения удивительного природного объекта – базальтовых пальцев. Одно из таких образований находится в Северной Ирландии и известно как Мостовая гигантов (рис.3).

Рис.3. Столбчатые структуры Мостовой гигантов в Северной Ирландии

А разве наша Земля не похожа на типичную систему «твердое покрытие на податливом основании»? По современным представлениям, относительно тонкая (5–50 км) твердая наружная оболочка нашей планеты (литосфера) покоится на относительно податливой и толстой (2900 км) оболочке – верхней мантии. Ее вязкое, текучее вещество находится в состоянии неустойчивости из-за вертикального теплового градиента. Полагают, что именно поэтому в мантии генерируются гигантские конвекционные потоки (ячейки). За счет конвекции возникает механическое напряжение в земной коре, которое ответственно за такие геодинамические процессы, как дрейф континентов, формирование

(Продолжение см. на с. 9)

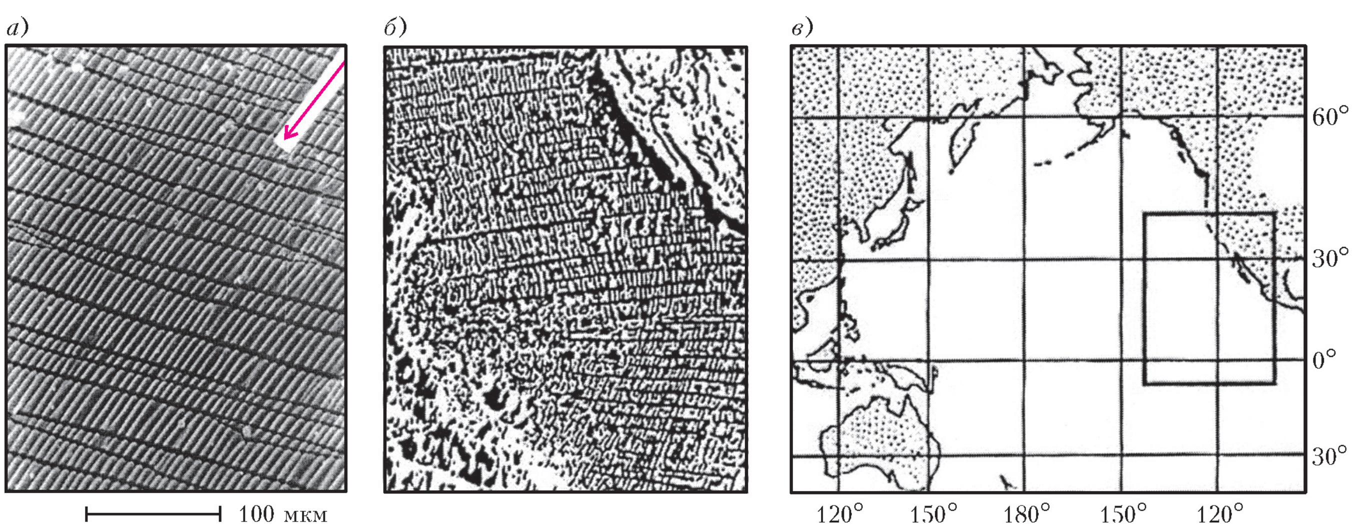


Рис.4. Электронная микрофотография образца натурального каучука с тонким (10 нм) золотым покрытием, растянутого на 50% (а); карта рельефа дна Тихого океана в районе Восточно-Тихоокеанского поднятия (б) и положение соответствующего участка в Тихом океане (в)

Прямая Сильвестра

С.ТАБАЧНИКОВ, В.ТИМОРИН

Графики многочленов: теорема Борвейна

Формулировка задачи Сильвестра настолько общая, что в ней можно заменять точки и прямые на многие другие объекты и получать осмысленные утверждения. Прямые и точки обладают некоторыми специальными свойствами. Например, через каждую пару точек можно провести прямую, и только одну. Похожие утверждения имеют место для графиков многочленов. Например, рассмотрим графики квадратных трехчленов

$$y = ax^2 + bx + c$$

($a = 0$ не воспрещается!).

Упражнение 13. Докажите, что через каждую тройку точек с различными x-координатами проходит график квадратного трехчлена, и только один.

Перенесем теорему Сильвестра–Галлаи на графики квадратных трехчленов. Рассмотрим конечное множество M точек на плоскости с различными x-координатами. Предположим, что не все точки множества M лежат на графике одного и того же квадратного трехчлена. В этом случае найдется такой квадратный трехчлен (аналог прямой Сильвестра), график которого содержит ровно три точки из множества M.

Докажем это. Предположим, что график квадратного трехчлена, проходящий через любую тройку точек множества M, содержит хотя бы еще одну точку этого множества. Предположим также, что не все множество M принадлежит одному графику.

Будем измерять расстояние от точки плоскости до графика функции по вертикали. Если расстояние равно нулю, то точка лежит на графике. Среди пар, состоящих из точек множества M и графиков квадратных трехчленов, проходящих через тройки точек множества M, найдется пара с минимальным ненулевым расстоянием от точки до графика. Обозначим эту точку через $(a;b)$, а квадратный трехчлен – через $g(x)$. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ – абсциссы четырех точек множества M на графике $y = g(x)$.

Рассмотрим случай $x_2 < a < x_3$. Существует квадратный трехчлен $f(x)$, график которого проходит через три точки $(x_1; g(x_1))$, $(a;b)$, $(x_4; g(x_4))$ (рис. 6). Рассмотрим квадратный трехчлен $h(x) = f(x) - g(x)$. Поскольку x_1 и x_4 – его корни, $h(x)$ меняет монотонность на отрезке $(x_1; x_4)$ не более одного раза (на рисунке – сначала возрастает, затем убывает). Это означает, что хотя бы одно из чисел $|h(x_2)|$ и $|h(x_3)|$ меньше, чем $|h(a)|$. А значит, или точка $(x_2; g(x_2))$ или точка $(x_3; g(x_3))$ находится ближе к графику $y = f(x)$, чем $(a;b)$ к $y = g(x)$. Противоречие.

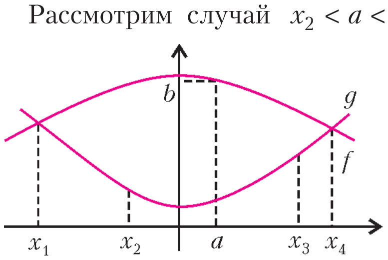


Рис. 6

Упражнение 14. Рассмотрите оставшиеся случаи: $a < x_2$ и $x_3 < a$.

Теорема для квадратных трехчленов является частным случаем более общей теоремы Борвейна [8], относящейся к произвольным системам Чебышева. Формулировать ее в полной общности мы не будем, но наметим еще несколько частных случаев в виде упражнений.

Упражнения

15. Докажите, что через любые $n + 1$ точек на плоскости с различными x-координатами можно провести графики многочлена степени не выше n. Более того, такой многочлен ровно один. Сформулируйте и докажите обобщение теоремы Сильвестра–Галлаи для графиков многочленов степени не выше n.

16. Рассмотрим функции вида

$$f(x) = a\cos x + b\sin x + c .$$

Докажите, что если f не равна тождественно нулю, то она обращается в ноль не более чем для двух значений x в полуинтервале $[0; 2\pi)$. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Сильвестра–Галлаи для функций данного класса. *Указание*: искомый аналог будет некоторым утверждением про конечное множество точек на плоскости, x-координаты которых различны и лежат в некотором фиксированном полуинтервале длины 2π, скажем, в $[0; 2\pi)$.

А в пространстве?

Еще одно естественное направление для обобщений и аналогов задачи Сильвестра – это выход из плоскости в пространство. Непосредственное пространственное обобщение звучало бы так. Пусть дан конечный набор M точек в трехмерном пространстве. Допустим, что не все эти точки лежат в одной плоскости. Верно ли, что найдется плоскость, содержащая три неколлинеарные точки множества M и больше никакие? К сожалению, ответ отрицательный. Простейший контрпример состоит из шести точек, лежащих на двух скрещивающихся прямых, – три точки на одной прямой, и три на другой.

Упражнение 17. Возможно еще такое пространственное обобщение проблемы Сильвестра (казалось бы, еще более

Окончание. Начало см. в «Кванте» №5.

непосредственное). Пусть дано конечное множество точек в пространстве, не все на одной плоскости. Верно ли, что есть плоскость, содержащая ровно три точки нашего множества (возможно, коллинеарные)? Ответ на этот вопрос тоже отрицательный, а контрпример получается простой модификацией примера, приведенного выше.

Приведенный выше контрпример был построен Моцкиным в 1951 году [9]. Он же доказал следующее (более правильное) обобщение теоремы Сильвестра–Галлаи.

Теорема 4. *Если не все точки конечного множества M лежат в одной плоскости, то найдется такая, плоскость (будем называть ее плоскостью Моцкина), пересечение которой с M состоит из нескольких (по меньшей мере, двух) коллинеарных точек и еще одной точки, не коллинеарной с ними.*

Окружности

Теорема Моцкина может быть использована для переноса теоремы Сильвестра–Галлаи на случай окружностей. Рассмотрим конечное множество точек на сфере. Всякая плоскость, проходящая через 3 различные точки сферы, высекает на сфере некоторую окружность. Допустим, что не все точки множества M лежат на одной окружности (или, что эквивалентно, не все точки лежат в одной плоскости). Тогда найдется плоскость Моцкина, пересечение которой с M состоит из ряда коллинеарных точек и еще одной единственной точки, не коллинеарной этому ряду. Заметим, однако, что ряд коллинеарных точек на сфере не может содержать больше двух точек. Следовательно, плоскость Моцкина содержит ровно три точки множества M, и эти точки с необходимостью не коллинеарны. В частности, эти три точки лежат на окружности, которая не содержит других точек множества M. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Для конечного множества точек M на сфере, не все из которых лежат на одной окружности, найдется такая окружность (аналог прямой Сильвестра), которая содержит ровно три точки множества M.*

Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость. Напомним, что стереографическая проекция определяется таким образом. Центр проекции – точка A на сфере. Проекция точки B на сфере (отличной от точки A) – эта такая точка C на выбранной нами плоскости, что A, B и C коллинеарны (рис.7). Известный факт состоит в том, что стереографическая проекция окружности на сфере – это окружность или прямая на плоскости (прямая получается в том случае, когда исходная окружность проходит через точку A). Наоборот, кривая, проецирующаяся в окружность или прямую на плоскости, обязательно является окружностью на сфере. Если этот факт неизвестен читателю, то было бы очень полезно его доказать самостоятельно.

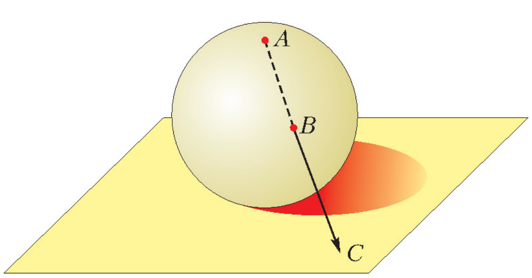


Рис. 7

При помощи стереографической проекции мы получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть дано конечное множество точек на плоскости. Допустим, что не все точки этого множества лежат на одной прямой и не все точки лежат на одной окружности. Тогда найдется прямая или окружность, содержащая ровно три точки нашего множества.*

На самом деле, можно доказать более сильное утверждение, и при этом даже не нужно использовать теорему Моцкина.

Теорема 7. *Пусть дано конечное множество M точек на плоскости. Допустим, что не все точки множества M лежат на одной прямой, и не все лежат на одной окружности. Тогда для всякой точки A из M найдется прямая или окружность, содержащая A и еще ровно две точки множества M.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать следующее утверждение для сферы (оно получается из только что сформулированной теоремы стереографической проекцией). Пусть дано конечное множество точек M' на сфере, не лежащее на одной окружности. Тогда, для всякой точки A' из множества M' найдется окружность на сфере, содержащая точку A' и еще ровно две точки множества M'. Чтобы доказать это утверждение, сделаем еще одну стереографическую проекцию, на этот раз с центром в точке A'. При этой проекции самой точке A' не соответствует никакая точка плоскости (неформально говоря, ей соответствует бесконечно удаленная точка). Все окружности, содержащие точку A', переходят в прямые. В результате нашей новой стереографической проекции мы получаем новое множество M'' точек на плоскости, не лежащее на одной прямой (поскольку множество M' не лежало на одной окружности). Но тогда для него существует прямая Сильвестра! Спроецируем эту прямую обратно на сферу и получим окружность, содержащую, помимо точки A', еще ровно две точки множества M'. Теорема доказана.

Дополнение: коники[1]

Естественно попытаться обобщить задачу Сильвестра на алгебраические кривые данной степени: ведь прямые и окружности – это естественные примеры кривых первой и второй степени. Для степени 2 речь идет о *кониках* – плоских кривых, заданных квадратичными уравнениями на координаты. Квадратичное уравнение – это уравнение, скажем относительно координат x и y, содержащее члены 1, x, y, x^2, y^2, xy с некоторыми коэффициентами. Тем самым, общая ко-

[1] *Это дополнение требует несколько большего запаса математических навыков, чем остальные разделы. В любом случае, читателю может быть интересна формулировка основной теоремы.*

ника на плоскости задается таким уравнением:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 = 0 .$$

Здесь $a_0, \ldots, a_5$ – некоторые постоянные коэффициенты (действительные числа). Мы предполагаем, что коэффициенты a_3, a_4, a_5 не равны одновременно нулю; иначе получится не коника, а прямая. Даже если квадратичные члены присутствуют, коника может оказаться вырожденной, т.е. объединением двух прямых (возможно, совпадающих) или точкой. Бывают квадратичные уравнения, которым не удовлетворяет ни одна точка плоскости (например, $x^2 + y^2 + 1 = 0$), но мы такие уравнения рассматривать не будем. Невырожденные коники – это эллипсы, параболы и гиперболы.

Заметим, что если уравнение коники умножить на число, отличное от нуля, то сама коника от этого не изменится. Всего в уравнении фигурирует 6 коэффициентов, но, как мы только что видели, существенными параметрами могут быть только отношения коэффициентов, но не сами коэффициенты. Нетрудно показать, что коника в самом деле существенным образом зависит от 5 параметров. Например, через любые 5 точек проходит коника, и, как правило, только одна.

Упражнения

18. Докажите, что через любые 5 точек на плоскости проходит некоторая коника.

19. Пусть точки A и B лежат на конике K. Тогда пересечение коники K с прямой AB состоит либо из двух точек A и B, либо из всей прямой AB.

Вайзман и Вильсон [10] доказали в 1988 году такую теорему.

Теорема 8. *Рассмотрим конечное множество точек M на плоскости. Допустим, что не все точки множества M принадлежат одной конике. Тогда найдется коника, содержащая ровно 5 точек из M и определяющаяся этими точками (т.е. нет никакой другой коники, проходящей через те же 5 точек).*

Мы представим в виде ряда упражнений новое доказательство теоремы Вайзмана–Вильсона. Оно более элементарно, чем оригинальное доказательство. Большинство упражнений являются скорее тестами на понимание, чем содержательными задачами, – читателю просто рекомендуется прочесть внимательно условия всех упражнений и понять, почему они очевидны. Отдельные упражнения покрывают отдельные шаги в доказательстве.

Упражнения

20. Рассмотрим три точки A, B и C на плоскости, не лежащие на одной прямой. Другими словами, мы имеем дело с вершинами треугольника ABC. Поместим массы 1, u, v в точки A, B, C соответственно. Обозначим через $X(u,v)$ центр масс трех рассматриваемых точек. Пару чисел (u,v) можно считать координатами точки $X(u,v)$. Таким образом, мы ввели другую систему координат на плоскости. (Заметим, что центр масс можно определить даже в том случае, когда u и/или v равны нулю или даже меньше нуля; проблема возникает только в том случае, когда сумма всех трех масс равна нулю, т.е. $1 + u + v = 0$.) Докажите, что в новой системе координат любая коника тоже представляется квадратичным уравнением.

21. Рассмотрим конику, проходящую через все три вершины треугольника ABC. В этом случае уравнение коники имеет специальный вид. А именно, некоторые коэффициенты обращаются в ноль. Запишем сначала уравнение коники в общем виде:

$$b_0 + b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 = 0 .$$

Теперь попробуем понять, какое ограничение на коэффициенты накладывает тот факт, что наша коника проходит через точку A. Точка A имеет координаты (0, 0) (т.е. $u = v = 0$). Значит, при $u = v = 0$ уравнение должно быть верным. Это произойдет только в том случае, когда $b_0 = 0$. Точки B и C накладывают следующие соотношения на коэффициенты: $b_3 = b_5 = 0$. Докажите это (рассуждение сложнее, чем для точки A, поскольку точки B и C не соответствуют никаким конечным значениям координат (u, v) – для рассмотрения этих точек придется поместить в точку A нулевую массу). Уравнение коники, описанной вокруг треугольника ABC, тем самым сведется к такому:

$$au + bv + cuv = 0$$

(мы здесь переобозначили коэффициенты).

22. Рассмотрим теперь все коники, описанные вокруг треугольника ABC, и докажем аналог теоремы Сильвестра–Галлаи для таких коник. Заметим (проверьте это утверждение!), что через любые две точки, не лежащие на прямых AB, BC и AC, можно провести конику, описанную вокруг треугольника ABC, притом только одну. (На самом деле, как мы уже упоминали, конику можно провести всегда; однако, если обе точки лежат на прямой, содержащей сторону треугольника ABC, то единственность нарушается.) Рассмотрим теперь некоторое конечное множество точек на плоскости, не принадлежащих прямым AB, BC и AC и удовлетворяющих следующему условию: на конике, описанной вокруг треугольника ABC и содержащей две точки нашего множества, лежит еще по крайней мере одна точка нашего множества. В этом случае все точки нашего множества лежат на одной и той же конике, описанной вокруг треугольника ABC.

Указание. Рассмотрите систему координат (u, v), связанную с треугольником ABC и описанную выше. Уравнение любой коники, описанной вокруг треугольника ABC, имеет вид $au + bv + cuv = 0$. Поделим это уравнение на uv, мы получим $av^{-1} + bu^{-1} + c = 0$. Значит, если вместо координат u и v ввести координаты $1/v$ и $1/u$, то в новых координатах уравнения коник, описанных вокруг треугольника ABC, будут линейными. Это значит, что на плоскости с координатами $1/v$ и $1/u$ такие коники изобразятся прямыми. Примените к этим прямым классическую теорему Сильвестра–Галлаи.

Скажем, что пятерка точек на плоскости *определяет конику*, если есть только одна коника, содержащая эти пять точек.

Упражнение 23. Пусть дано конечное множество M точек на плоскости. Допустим, что для каждых пяти точек множества M, определяющих конику, найдется некоторая шестая точка множества M на той же конике. Мы хотим доказать теорему Вайзмана–Вильсона, которая говорит, что в этом случае все точки множества M лежат на одной и той же конике. Докажите пока следующее утверждение: для любой тройки точек A, B и C множества M, не лежащих на одной прямой, все множество M содержится в объединении прямых AB, BC, AC и некоторой коники, описанной вокруг треугольника ABC.

Рассмотрим конечное множество M точек на плоскости такое, как в предыдущем упражнении. Если все точки множества M лежат на одной и той же прямой, то теорема Вайзмана–Вильсона доказана (прямая всегда является частью вырожденной коники). Допустим, что это не так. Тогда найдутся три точки A, B и C множества M, не лежащие на одной прямой. Согласно приведенному выше упражнению все точки множества M содержатся в объединении прямых AB, BC, AC и некоторой коники K, описанной вокруг треугольника ABC.

Упражнения

24. Предположим сначала, что найдется точка D из множества M, не лежащая в объединении прямых AB, BC и AC. Точка D, следовательно, обязана принадлежать конике K. Если все точки множества M принадлежат конике K, то теорема доказана. Допустим, что некоторые точки принадлежат объединению трех прямых AB, BC и AC, но не конике K. Например, пусть множество M содержит точку C_1, лежащую на прямой AB, но отличную от точек A и B. Докажите, что пять точек A, B, C, C_1, D определяют конику. Эта коника вырожденная; она совпадает с объединением прямых AB и CD.

25. Если в объединении прямых AB и CD нет других точек множества M, кроме точек A, B, C, C_1, D, то теорема доказана. Допустим, что есть какая-то шестая точка C_2. Эта точка обязана принадлежать прямой AB.

26. Либо C_1, либо C_2 не принадлежит прямой CD. Допустим, что это C_1. Мы знаем, что все точки множества M лежат в объединении прямых, содержащих стороны треугольника ADC, и некоторой коники K_1, описанной вокруг треугольника ADC. В частности, точки B и C_1 должны принадлежать конике K_1. Отсюда следует, что коника K_1 сводится к объединению прямых AB и CD. Таким образом, все точки множества M принадлежат объединению прямых AB, CD и AC (прямые AD и DC не могут иметь общих точек с коникой K, отличных от вершин треугольника ADC). Другими словами, все точки множества лежат в объединении прямых, содержащих стороны некоторого невырожденного треугольника.

27. Теперь достаточно рассмотреть случай, когда все точки множества M принадлежат объединению прямых AB, BC, AC. Поскольку M не может содержаться в объединении двух прямых, найдутся точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC, AB соответственно, не совпадающие с вершинами треугольника ABC. Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой. Тогда, согласно доказанному выше, все точки множества M лежат в объединении прямых A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 и некоторой коники, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$. Покажите, однако, что никакая коника, описанная вокруг треугольника $A_1B_1C_1$, не может содержать точки A, B и C одновременно. Противоречие.

28. Таким образом, точки A_1, B_1 и C_1 коллинеарны. Более того, множество M состоит только из шести точек A, B, C, A_1, B_1 и C_1. (В самом деле, если бы была еще одна точка в множестве M, то можно было бы заменить A_1, B_1 или C_1 на эту точку и получить невырожденный треугольник.) Но в этом случае пять точек A, B, A_1, B_1, C_1 определяют вырожденную конику, которая не содержит никаких других точек множества M.

Мы, таким образом, завершили доказательство теоремы Вайзмана–Вильсона.

Список литературы

8. P.Borwein. *On Sylvester's problem and Haar spaces.* – Pacific J. of Math., Vol 109 (1983), №2.

9. T.Motzkin. *The lines and planes connecting the points of a finite set.* – Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 451–464.

10. J.A.Wiseman, P.R.Wilson. *A Sylvester theorem for conic sections.* – Discrete and Comput. Geom., 3 (1988), 295–305.

11. L.Bouttier, M.Zaidenberg. *Le probleme de Sylvester.* – Quadrature, Janvier–Mars 2008.

12. Г.С.М.Кокстер. *Действительная проективная плоскость.* – М.: Физматгиз, 1959.

13. Г.С.М.Кокстер. *Введение в геометрию.* – М.: Наука, 1966.

14. G.D.Chakerian. *Sylvester's problem on collinear points and a relative.* – Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 164–167.

Измеряем прочность тел от нано до мега

(Начало см. на с. 3)

рельефа, открытие и закрытие океанов, извержения вулканов, землетрясения и т.п.

Как видим, строение верхних оболочек нашей Земли полностью соответствует структуре систем «твердое покрытие на податливом основании». Неудивительно поэтому, что рельеф колоссального по размерам участка океанического дна в районе Восточно-Тихоокеанского поднятия поразительно похож на рельеф, образующийся при растяжении армированных полимерных пленок (рис.4).

Многим, по-видимому, покажется фантастической идея родственности процессов, вызывающих регулярность разрушения твердого покрытия на податливой полимерной подложке, и событий, происходящих в земной коре. Но такая аналогия все же вполне правомерна. К настоящему времени первым автором статьи использованы уравнения, полученные для полимерных пленок с тонкими твердыми покрытиями, для расчетов напряжения прочности океанической коры.

Мало того, рассмотренный подход можно применить в планетологии для грубой оценки структуры космических объектов. Так, по анализу особенностей рельефа поверхности Венеры, полученному с помощью радарной съемки с ее искусственного спутника, с использованием такого подхода уже сделаны некоторые заключения относительно прошлого этой планеты.

Нет ничего удивительного в том, что зачастую одни и те же физические законы действуют в самых разнообразных системах. В нашем случае диапазон родственных явлений простирается от наноразмерного уровня до макроскопического и даже планетарного.

Итак, благодаря общности законов можно получать информацию о свойствах материалов, явлениях и процессах, например оценивать прочность материалов в нанослоях или судить об образовании рельефа на поверхности планет, происходящих в окружающем мире, обратившись к лабораторным моделям и взяв за аналог простой и хорошо изученный физический объект, такой как полимерная пленка с жестким нанометровым покрытием.

ПАМЯТИ ИЗРАИЛЯ МОИСЕЕВИЧА ГЕЛЬФАНДА

Не стало Израиля Моисеевича Гельфанда, одного из самых выдающихся математиков прошедшего века.

И.М.Гельфанд – поразительно разносторонний ученый. Нелегко назвать какую-либо из фундаментальных отраслей математики, в которой Гельфанд не имел бы основополагающих результатов. Он был всемирно признанным мировым лидером в функциональном анализе, теории групп Ли и теории представлений, и невозможно не отметить его вклада в алгебру, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, теорию дифференциальных уравнений, математическую физику, численный анализ, приложения к нефизическим наукам.

И.М.Гельфанд был воспитанником московской математической школы, учеником А.Н.Колмогорова. Он замыкает список учеников Лузина и первого поколения его выдающихся «внуков». Ими были Д.Е.Меньшов, М.Я.Суслин, А.Я.Хинчин, П.С.Александров, П.С.Урысон, Л.А.Люстерник, М.А.Лаврентьев, П.С.Новиков, Н.К.Бари, А.Н.Колмогоров, Л.В.Келдыш, Л.Г.Шнирельман, С.М.Никольский, А.Н.Тихонов, Л.С.Понтрягин, А.И.Мальцев, А.А.Ляпунов, М.В.Келдыш, И.М.Гельфанд.

В трудные двадцатые годы ему не довелось закончить школу. Он не получил высшего образования. С девятнадцати лет Израиль Моисеевич стал посещать семинары Московского университета и поступил в аспирантуру к Андрею Николаевичу Колмогорову. Кандидатскую диссертацию И.М.Гельфанд защитил в 1935 году и стал работать доцентом механико-математического факультета МГУ. Вскоре им были заложены основания теории нормированных колец (именуемых теперь банаховыми алгебрами). Эти исследования, послужившие основой его докторской диссертации, защищенной в 1940 году, сразу выдвинули его в число ведущих математиков своего времени. Гельфанд прочитал на механико-математическом факультете множество курсов: линейной алгебры, теории уравнений с частными производными, вариационного исчисления, интегральных уравнений. Он был блистательным лектором – многие называют его лучшим лектором среди тех, кого им доводилось слышать. Его перу принадлежит множество книг, по которым учились и продолжают учиться математики всего мира. Это учебник по линейной алгебре и написанные в соавторстве с коллегами учебник по вариационному исчислению и серия монографий по теории обобщенных функций. В течение полувека действовал знаменитый семинар Гельфанда, посвященный «всей математике», который послужил школой для многих поколений математиков. Долгое время Гельфанд работал в Отделении прикладной математики Математического института им.В.А.Стеклова, где выполнял работы большой государственной важности: он возглавлял группу ученых, которые проводили расчеты, связанные с созданием водородной бомбы. С шестидесятых годов Гельфанд заведовал лабораторией при Московском университете, где основное внимание уделялось проблемам медицины и биологии. Гельфанд был основателем и в течение многих лет главным редактором журнала «Функциональный анализ и его приложения». В годы, когда И.М.Гельфанд был президентом Московского математического общества, это общество достигло высшей степени своего развития.

Израиль Моисеевич Гельфанд (2.09.1913–5.10.2009)

Велики заслуги Израиля Моисеевича в области математического просвещения в нашей стране. Он был среди основателей школьных математических кружков при Московском университете, принимал активнейшее участие в проведении первых Московских математических олимпиад, основал Заочную математическую школу, был среди основателей знаменитой московской второй школы. Он был инициатором издания и основным соавтором многих замечательных брошюр, обращенных к школьникам. И.М.Гельфанд был другом нашего журнала. В первом номере «Кванта» за 1989 год опубликовано замечательное интервью с академиком И.М. Гельфандом.

И еще об одном нельзя не сказать: очень многим Израиль Моисеевич оказывал существеннейшую помощь в трудные минуты их жизни.

Поразительной особенностью его жизни в науке явилось невероятное творческое долголетие: его путь в науке на уровне высших достижений длился семьдесят пять лет. Сравнить его просто не с кем за всю историю науки.

В 2003 году в США состоялась конференция «Единство математики», приуроченная к девяностолетию И.М.Гельфанда. На конференции выступили с докладами крупнейшие математики нашего времени. На этой конференции 2 сентября, в день своего девяностолетия, выступил с докладом и сам юбиляр. Его доклад назывался «Математика как адекватный язык». В докладе были отражены суперсовременные проблемы алгебры, теории чисел, геометрии, анализа и прикладной математики. В начале доклада Израиль Моисеевич произнес такие слова:

«Я не ощущаю себя пророком. Я лишь ученик. (I do not consider myself a prophet. I am simply a student.) Всю жизнь я учился у великих математиков, таких как Эйлер или Гаусс, у моих старших и младших коллег, у моих друзей и сотрудников, но более всего – у моих учеников».

Имя Гельфанда навсегда останется в истории науки.

Вероятностные доказательства

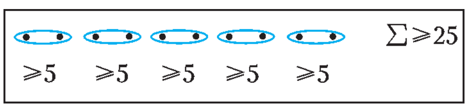
А.ШЕНЬ

Неравенства и оценки

Начнем с совсем простой задачи.

1. *На доске написаны 10 чисел. Сумма любых двух из них не меньше 5. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 25.*

▹ Тут даже и доказывать-то особо нечего: разобьем числа на пять пар. В каждой паре сумма не меньше 5, всего получается 25. ◃



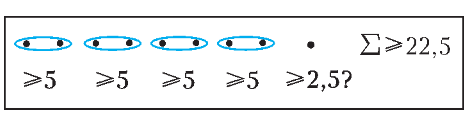
Теперь немного более сложная задача.

2. *На доске написаны 9 чисел. Сумма любых двух из них не меньше 5. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 22,5.*

(Если все числа равны 2,5, то и получится 22,5.)

▹ Рассуждая аналогично предыдущей задаче, можно выбрать четыре пары, и одно число останется. В каждой паре сумма не меньше 5, всего 20. Если бы мы знали, что оставшееся без пары число не меньше 2,5, то мы получили бы требуемое. Но гарантировать это мы не можем. Скажем, если одно из чисел равно нулю, а остальные равны 5, то сумма любых двух будет не меньше 5 (а именно, 5 или 10). При этом непарным может оказаться ноль.

Наверное, вы уже сообразили, как завершить рассуждение. Разбиение на пары в наших руках, и мы можем оставить непарным любое из чисел. В любой паре хотя бы одно из чисел равно 2,5 или больше. Нам

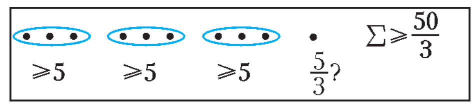


достаточно знать, что хотя бы одно из чисел таково – можно оставить непарным именно это число, и все получится. ◃

Усложним задачу еще немного.

3. *На доске написаны 10 чисел. Сумма любых трех из них не меньше 5. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 50/3.*

▹ Используем тот же прием: в любой тройке чисел большее равно 5/3 или больше (иначе все три числа меньше 5/3, и сумма меньше 5). Возьмем одно из таких чисел (не меньших 5/3), останутся три тройки, в каждой из которых сумма не меньше 5. Всего получается как минимум $3 \cdot 5 + (5/3) = 50/3$. ◃



В двух предыдущих задачах оставалось одно число. А что будет, если останется два?

4. *На доске написаны 11 чисел. Сумма любых трех из них не меньше 5. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 55/3.*

Можно решить эту задачу аналогично предыдущим (см. задачу 14 и указание к ней). Но мы приведем другое решение, которое обобщается на любые количества.

▹ Обозначим наши числа $a_1, \ldots, a_{11}$ и запишем их по кругу. Сумма любой тройки соседей не меньше 5 (по условию):

$$
\begin{gathered}
a_1 + a_2 + a_3 \geq 5, \\
a_2 + a_3 + a_4 \geq 5, \\
\ldots \\
a_9 + a_{10} + a_{11} \geq 5, \\
a_{10} + a_{11} + a_1 \geq 5, \\
a_{11} + a_1 + a_2 \geq 5.
\end{gathered}
$$

Сложим эти одиннадцать неравенств. Каждое число встречается три раза (входит в три тройки), поэтому получится

$$3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}) \geq 55,$$

откуда и следует требуемое. ◃

Вероятности и ожидания

Сейчас мы рассмотрим другое решение последней задачи – на языке теории вероятностей.

Пусть в ящике (или, как любят говорить в теории вероятностей, в урне) лежат 11 шаров, на которых написаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Мы вынимаем один из шаров не глядя, и нам дают столько рублей, сколько на нем написано.

Сколько мы будем выигрывать в среднем за игру, если играть много раз? Мы имеем в виду, что каждый раз вынутый шар возвращают в урну и ее содержимое перемешивают. Несложно сообразить, что ответ тут –

среднее арифметическое всех чисел,

$$S = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}}{11}.$$

В самом деле, пусть мы играем большое количество раз. Поскольку все шары на ощупь одинаковые и их перемешивают, то они будут попадаться нам одинаково часто. В $1/11$ доле всех игр нам попадется шар a_1, в $1/11$ доле – шар a_2 и так далее. Всего мы выиграем (за N игр)

$$\frac{N}{11}a_1 + \frac{N}{11}a_2 + \ldots + \frac{N}{11}a_{11},$$

и в среднем на одну игру придется как раз S. В теории вероятностей средний выигрыш за большое число игр называют *математическим ожиданием* выигрыша, так что в данной игре математическое ожидание выигрыша равно среднему арифметическому всех чисел.

А что будет, если разрешить команде из трех человек $А$, $Б$ и $В$ вынимать по шару? Мы имеем в виду, что шары вынимают без возвращения, так что в урне остается 8 шаров. Каково будет математическое ожидание выигрыша команды (средний выигрыш в расчете на одну игру)?

Ясно, что по-прежнему каждый из игроков будет вынимать все шары одинаково часто (ведь тот факт, что кто-то до тебя не глядя вынул шар, не меняет равенства шансов). Значит, каждый из игроков будет в среднем выигрывать S, а вся команда – в среднем $3S$.

Теперь вспомним условие задачи: сумма любых трех чисел не меньше 5. Значит, в каждой игре команда выигрывает не меньше 5, и средний выигрыш тоже не меньше 5. Таким образом,

$$3S = 3 \times \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}}{11} \ge 5,$$

поэтому $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} \ge 55/3$, что и требовалось доказать.

Это рассуждение выглядит нестрогим: что значит «большое число игр», «в среднем одинаково часто» и т.д.? Строгое обоснование дает математическая теория вероятностей, но оно выходит за рамки этой статьи. Мы, оставаясь на уровне правдоподобных нестрогих рассуждений, рассмотрим еще несколько подобных примеров.

Случайные расстановки

5. *В клетках шахматной доски 8×8 стоят плюсы и минусы, причем плюсов столько же, сколько минусов (по 32). Докажите, что можно так расставить 8 ладей, не бьющих друг друга, чтобы не меньше 4 ладей стояли на плюсах.*

$\triangleright$ Будем ставить ладьи (пронумеруем их от 1 до 8) на доску случайным образом, считая равновероятными все расстановки, удовлетворяющие правилам (ладьи не бьют друг друга: на каждой вертикали и горизонтали их по одной).

Выберем какую-то одну из ладей. На какую клетку у нее больше шансов попасть: на a1 или, скажем, на e1? Одинаково, потому что в любой расстановке можно переставить вертикали a и e (вместе с ладьями, на них стоящими), и расстановки одного типа соответствуют расстановкам другого. По тем же причинам шансы попасть на e1 такие же, как, скажем, на e4 (переставляем первую и четвертую горизонтали). Аналогичные рассуждения показывают, что вообще у этой ладьи равные шансы попасть во все клетки доски.

Следовательно, у нее равные шансы попасть на плюс и на минус (по условию ровно половина клеток занята плюсами и половина минусами). Если за плюс ей дают рубль, а за минус отбирают, то в среднем ладья будет оставаться «при своих».

Теперь внимание: раз каждая ладья остается в среднем при своих, то и вся команда остается в среднем при своих. А если бы утверждение задачи было неверно (всегда больше ладей на минусах, чем на плюсах), то команда бы всегда проигрывала, а потому и в среднем бы проигрывала – противоречие. $\triangleleft$

Случайные точки

6. *Известно, что более половины поверхности Земли занимают океаны. Используя из географии только этот факт, докажите, что можно найти две диаметрально противоположные точки, обе попавшие в океан.*

$\triangleright$ Будем выбирать случайную точку поверхности Земли (или глобуса). Если делать это много раз, то больше чем в половине случаев выбранная точка A будет попадать в океан – она равномерно распределена по всей поверхности Земли, а океаны занимают больше половины.

Противоположная ей точка B тоже равномерно распределена по всей поверхности Земли и потому более чем в половине случаев попадает в океан. Значит, эти случаи (A в океане и B в океане) иногда должны происходить одновременно, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

Если это рассуждение кажется вам подозрительным (что значит «случайная равномерно распределенная по поверхности Земли точка»? почему доля случаев, в которых она попадает в океан, определяется долей океанов по площади?) – это не зря. Строгое его обоснование снова выходит за пределы этой статьи.

Однако по существу то же самое рассуждение можно изложить и без вероятностей. Пусть S – часть Земли, занятая океанами. Рассмотрим симметричную ей относительно центра Земли часть S'. (Она состоит из точек, у которых диаметрально противоположные попадают в океан.) Площади S и S' одинаковы (симметрия сохраняет площади). Если утверждение задачи неверно и общих точек у S и S' нет, то получается противоречие: две непересекающиеся части сферы содержат более 50% площади каждая.

В следующей задаче такой простой перевод рассуждения на язык площадей невозможен.

7. *На белой сфере есть черное пятно, занимающее не более 10% ее площади. Покажите, что можно вписать куб в сферу таким образом, чтобы ни одна его вершина не попала в это пятно.*

$\triangleright$ Возьмем куб $ABCDA'B'C'D'$ (надлежащего размера) и будем вписывать его в сферу случайным образом. При большом количестве испытаний доля случаев, когда вершина A попадает в пятно (вероятность события «A черная») равна $1/10$, поскольку вершина A равномерно распределена по всей сфере.

По тем же причинам вершина B оказывается черной в 10% случаев, и то же самое можно сказать про любую из 8 вершин. Значит, остается как минимум 20% = 100% − 80% случаев, в которых все вершины белые (может быть больше за счет случаев, когда несколько вершин черные). Поэтому куб можно вписать требуемым способом. ◁

На самом деле тут мы уже серьезно жульничаем и заметаем под ковер основную часть рассуждения: почему слова «случайно вписанный куб» имеют смысл и почему вершина равномерно распределена по сфере. Интуитивно это выглядит правдоподобно и действительно может быть строго обосновано (хотя я не знаю никакого решения этой задачи в рамках школьной программы).

Случайные раскраски

Рассмотрим произвольный *граф* – несколько точек (*вершин*), соединенных линиями (*ребрами*). Раскрасим вершины графа в два цвета (скажем, черный и белый). Ребро назовем *разноцветным*, если оно (как вы уже догадались) соединяет вершины разных цветов.

Количество разноцветных ребер зависит от раскраски. Если мы хотим сделать это число минимальным, нет ничего проще – достаточно покрасить все вершины в один и тот же цвет. А что будет, если мы хотим сделать его максимальным (для данного графа)? Ответ зависит от графа, но оказывается, что всегда можно гарантировать как минимум половину разноцветных ребер.

8. *Докажите, что в произвольном графе можно раскрасить вершины в два цвета таким образом, чтобы как минимум половина ребер оказались разноцветными.*

▷ Будем раскрашивать вершины случайным образом (для графа с n вершинами возможно 2^n раскрасок, и мы считаем все их равновероятными). Для каждой раскраски посчитаем, сколько ребер окажутся разноцветными. Это, как говорят, «случайная величина» – она зависит от выбора раскраски.

Каково ее математическое ожидание (среднее значение при большом числе испытаний)? Другими словами, пусть в каждой вершине графа бросают монету (независимо от других вершин, так что все комбинации равновероятны), а на каждом ребре дежурит игрок, который получает рубль, если ребро окажется разноцветным (монеты в его концах выпадут по-разному). Сколько в среднем будут зарабатывать игроки за игру?

Каждый игрок в среднем выигрывает в половине игр (есть четыре варианта комбинации цветов на концах ребра, и в двух из них оно разноцветное). Значит, каждый игрок в среднем выигрывает полтинник за игру, а вся команда в среднем выигрывает $V/2$ рублей, где V – число ребер.

Отсюда очевидно следует, что есть раскраски, когда не менее половины ребер разноцветные (иначе бы в каждой игре команда выигрывала меньше $V/2$, и среднее тоже было бы меньше $V/2$). ◁

На самом деле это утверждение имеет простое конструктивное доказательство (см. задачу 19).

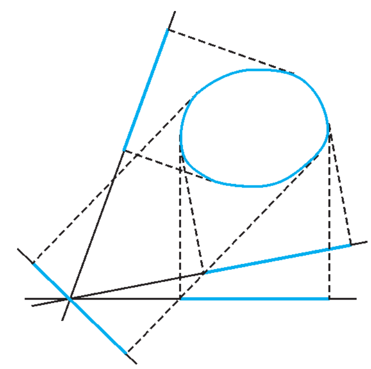
Случайные проекции

В этом разделе мы применим вероятностные соображения для решения такой задачи.

9. *На плоскости нарисована выпуклая фигура, ограниченная кривой длины L. Докажите, что ее диаметр, т.е. максимальное расстояние между двумя ее точками, не меньше L/π.*

Появление здесь числа π не случайно: неравенство задачи обращается в равенство для случая окружности диаметра $D = L/\pi$.

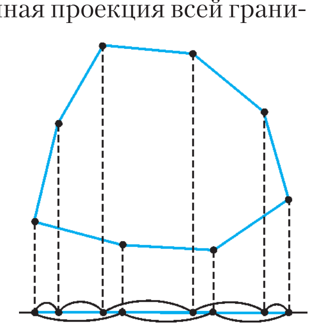
▷ Мы докажем более сильное утверждение: средняя длина проекции нашей фигуры на случайное направление равна L/π. (Мы проводим прямую в случайно выбранном направлении, и потом из каждой точки фигуры опускаем перпендикуляр на эту прямую. Получается отрезок – проекция фигуры на прямую.)



Из этого утверждения следует, что найдется направление, проекция на которое имеет длину не меньше L/π (среднее значение не может быть больше всех). А тогда и точки фигуры, которые попадают в концы проекции, находятся на таком же или большем расстоянии (наклонная длиннее перпендикуляра).

Как же доказать обещанное? Рассмотрим кривую, ограничивающую фигуру. Проекция фигуры – это все равно что проекция ее границы. Разобьем эту кривую на множество очень маленьких частей – настолько маленьких, что каждую из них можно считать отрезком. Пусть все эти отрезки будут равной длины.

Проекция всей границы складывается из проекций этих отрезков. Точнее, удвоенная проекция всей границы равна сумме проекций отрезков (так как они покрывают ее два раза – туда и обратно).



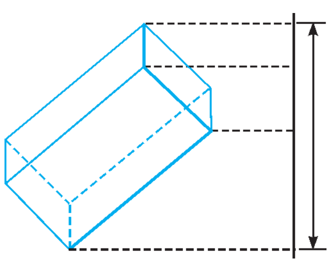
Это верно для любого направления проектирования – значит, и удвоенная *средняя* длина проекции фигуры равна сумме средних длин проекций каждого из отрезков, составляющих ее границу. Но отрезки эти равной длины, и потому средние длины их проекций одинаковы (поскольку мы проектируем на случайное направление, то направление самого отрезка роли не играет). Значит, средняя длина проекции кривой зависит только от числа этих отрезков, т.е. пропорциональна длине кривой, и коэффициент пропорциональности можно вычислять на примере окружности. ◁

Две коробки

10. *В московском метро можно провозить коробки, у которых сумма измерений (длины, ширины и высоты) не превосходит некоторой границы. Возникает вопрос: можно ли перехитрить правила, поместив одну коробку внутрь другой? Другими словами, пусть один прямоугольный параллелепипед целиком содержится внутри другого. Может ли сумма измерений внутреннего быть больше суммы измерений внешнего?*

▷ Оказывается, что нет, но доказать это не так просто. Есть несколько красивых доказательств, и одно из них использует вероятностные соображения (примерно такие же, как в предыдущем разделе).

Будем проектировать коробку на прямую случайно выбранного направления (в пространстве). Из картинки видно, что проекция коробки складывается из проекции трех отрезков, идущих по ее высоте, длине и ширине. Следовательно, средняя длина проекции (математическое ожидание) равно сумме средних длин проекций этих отрезков. А средняя длина проекции отрезка пропорциональна его собственной длине (с каким-то коэффициентом, нам сейчас не важно – с каким). Поэтому средняя длина проекции коробки пропорциональна сумме ее измерений.



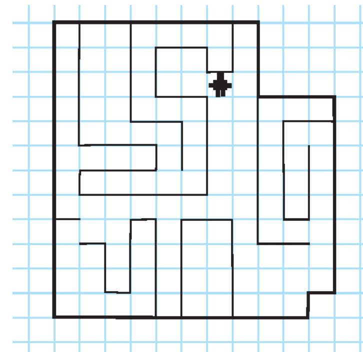
Теперь представим себе две коробки, одну внутри другой. На какую прямую их ни проектируй, проекция внутренней коробки всегда находится внутри проекции внешней и потому имеет меньшую или равную длину. Значит, и средние длины проекций находятся в том же соотношении, а они пропорциональны сумме измерений. ◁

Случайные блуждания

11. *На листке из тетрадки в клеточку нарисован лабиринт и в нем робот, который по командам «вверх», «вниз», «влево» и «вправо» ходит из клетки в клетку. Стены лабиринта идут по сторонам клеток, выхода из лабиринта нет. Если, начав двигаться по команде, робот упирается в стену, то он остается на месте. Мы не знаем, какой лабиринт нарисован, но знаем размер листка, измеренный в клеточках. Докажите, что можно составить последовательность команд, которая гарантирует, что робот побывает во всех клетках доступной ему части лабиринта.*

▷ Сразу же признаемся, что не только наше рассуждение будет чистым доказательством существования (без предъявления способа построения такой последовательности), но и длина такой последовательности будет астрономической.

Будем давать роботу случайные команды и смотреть,



с какой вероятностью он обойдет лабиринт. Пусть в лабиринте есть замкнутый обход из не более чем N шагов. Тогда при любом начальном положении робота есть некоторая вероятность, что при подаче ему N случайных команд он пойдет как раз по этому пути и обойдет лабиринт. Она не меньше 4^{-N}, а вероятность не обойти лабиринт не больше $\left(1-4^{-N}\right)$. Процесс можно повторять: если мы дадим $2N$ случайных команд, то вероятность *не* обойти лабиринт не больше $\left(1-4^{-N}\right)^2$ (неудача на первом этапе происходит в доле $\left(1-4^{-N}\right)$ случаев или меньше, и в каждом из них вероятность сокращается во столько же раз за счет второго этапа).

Вообще, после Nk случайных команд вероятность неудачи (в данном лабиринте с данным начальным положением) не больше $\left(1-4^{-N}\right)^k$.

Хотя основание степени и близко к единице, но все равно это число можно сделать сколь угодно малым, увеличивая k. Заметим, что для всех лабиринтов на доске данного размера можно выбрать одно общее N. После этого возьмем k таким, чтобы $\left(1-4^{-N}\right)^k$ стало меньше $1/M$, где M – число разных способов нарисовать лабиринт и робота внутри него (на листке бумаги данного размера их конечное число). Тогда для каждого из M вариантов расположения вероятность неудачи меньше $1/M$, и потому с положительной вероятностью последовательность команд длины Nk окажется удачной для всех вариантов. Значит, такая удачная последовательность существует, что и требовалось доказать. ◁

Несравнимые множества

В этом разделе мы предполагаем знакомство с элементами комбинаторики (множества, подмножества, число сочетаний).

12. *Пусть A – множество из $2n$ элементов. Мы хотим выбрать несколько подмножеств множества A, причем требуется, чтобы они были несравнимы: ни одно из них не должно быть подмножеством другого. Какое максимальное число подмножеств можно выбрать?*

▷ Заметим, что требование выполняется, если все выбранные подмножества одного размера (и разные). Чтобы их число было максимальным, надо взять размер n, поскольку число сочетаний C_{2n}^k при данном n

максимально при $k = n$. Это следует из формулы $C_v^u = v!/(u!(v-u)!)$. Но можно это объяснить и без формул: из k-элементного подмножества можно получить $(k+1)$-элементное, добавив любой из оставшихся $2n - k$ элементов, при этом каждое $(k+1)$-элементное множество получится $k+1$ раз, так что

$$\frac{C_{2n}^{k+1}}{C_{2n}^{k}} = \frac{2n-k}{k+1},$$

и это отношение больше 1, когда $2n - k > k + 1$, т.е. $k < n - 1/2$.

Таким образом, если брать подмножества одинакового размера, то наилучший вариант получится, если взять C_{2n}^n подмножеств размера n. Остается доказать – и это самое трудное, – что даже если брать множества разных размеров, то ничего лучшего не найдется.

Рассмотрим следующий случайный процесс: начав с пустого множества, мы добавляем элементы множества A в случайном порядке, пока не получится все множество A. Пусть X – некоторое подмножество множества A. Какова вероятность того, что мы в ходе этого процесса пройдем через X (в какой-то момент будут добавлены все элементы X и только они)?

Легко сообразить, что она равна $1/C_{2n}^k$, где k – число элементов в X. В самом деле, в ходе добавления элементов мы пройдем ровно через одно k-элементное множество (после k шагов), и все k-элементные множества равновероятны (симметрия). Таких множеств C_{2n}^k, значит, каждое из них появляется в $1/C_{2n}^k$ доле случаев (имеет вероятность $1/C_{2n}^k$).

Пусть теперь мы выбрали какое-то количество подмножеств (не обязательно одинакового размера), соблюдая требования задачи (никакие два выбранных подмножества не сравнимы). Для каждого из выбранных подмножеств вероятность пройти через него равна $1/C_{2n}^k$, что, как мы знаем, не меньше $1/C_{2n}^n$. С другой стороны, события эти, как говорят, «несовместны»: не может быть так, что в ходе добавления элементов мы сначала получим одно выбранное подмножество, а потом другое (они ведь несравнимы). Поэтому сумма вероятностей этих событий не больше 1, и потому количество событий, т.е. количество выбранных подмножеств, не больше C_{2n}^n, что и требовалось доказать. ◃

Еще несколько задач

13. Среди любых трех участников математического кружка есть хотя бы одна девочка. Сколько мальчиков может быть в этом кружке?

14. Решите задачу 4 аналогично предыдущим (задачи 1, 2).

Указание. Докажите, что если сумма трех чисел равна 5, то сумма некоторых двух из них не меньше $10/3$. То же самое верно, если сумма трех чисел больше 5.

15. Сделайте рассуждение раздела «Вероятности и ожидания» строгим, рассмотрев случай, когда все комбинации из трех шаров были вытащены по одному разу.

16. Покажите, что можно найти 8 расстановок ладей на шахматной доске, которые вместе используют все 64 клетки доски (по одному разу каждую). Используя этот факт, дайте другое решение задачи 5.

17. Не используя вероятностей, докажите такой ослабленный вариант утверждения задачи 7: если черное пятно занимает 10% площади сферы, то в нее можно вписать *прямоугольный параллелепипед*, у которого все вершины попадают в белые точки.

Указание. Проведем координатные плоскости, которые делят сферу на 8 равных частей. Будем искать параллелепипед, стороны которого параллельны осям координат. Он задается одной из своих вершин, и она не должна попасть в восемь множеств площади $1/10$.

18. Докажите, что для данного графа существует раскраска, делающая все его ребра разноцветными, если и только если в этом графе нет циклов нечетной длины (нельзя вернуться в исходную вершину, нечетное число раз пройдя по ребрам).

19. Придумайте конструктивное решение задачи 8 (способ раскраски, который гарантирует, что разноцветных ребер будет не меньше половины).

Указание. Красим вершины по очереди «жадным алгоритмом» – каждая следующая красится так, чтобы число разноцветных ребер максимально увеличивалось.

20. Вершины графа с V ребрами разрешим красить в три цвета. Докажите. что можно найти раскраску с $2V/3$ или более разноцветными ребрами.

21. На листок в линейку случайно бросают иглу, длина которой равна расстоянию между линейками. Докажите, что она пересечет одну из линеек с вероятностью $2/\pi$.

Указание. Математическое ожидание числа пересечений зависит (пропорционально) от длины иглы, но не от ее формы, а коэффициент пропорциональности можно найти на примере окружности.

22. Несамопересекающаяся кривая длины 22 находится внутри круга радиуса 1. Докажите, что найдется прямая, имеющая с этой кривой по крайней мере 8 общих точек.

23. На кальке нарисована фигура площади 2,5. Докажите, что кальку можно так положить на клетчатую бумагу (со стороной клетки 1), что фигура покроет не менее трех узлов сетки. Докажите, что можно положить кальку так, чтобы фигура покрыла не более двух узлов сетки.

24. Рассмотрим R-окрестность прямоугольной коробки (все точки, которые находятся на расстоянии не более R хотя бы от одной из точек коробки; внутренность коробки также включаем в ее окрестность).

а) Покажите, что объем этой окрестности можно найти по формуле

$$V + S \cdot R + L \cdot \pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где V – объем коробки, S – площадь ее поверхности, L – сумма ее измерений.

б) Если одна коробка находится внутри другой, то и R-окрестность первой находится внутри R-окрестности второй. Сравнив их объемы при больших R, покажите, что сумма измерений внутренней коробки не больше суммы измерений внешней (задача 10).

25. Решите задачу 11, не используя вероятностных соображений.

Указание. Рассмотрим все возможные лабиринты и расположения робота по очереди. Выберем какой-то первый вариант и напишем соответствующую последовательность. (Если этот вариант осуществится на самом деле, то нам повезло.) Для второго варианта эта последовательность (вообще говоря) не годится, но тем не менее посмотрим, куда она приводит, и допишем то, что нужно, чтобы обойти лабиринт второго типа. И так далее.

26. Какое максимальное число несравнимых подмножеств можно выбрать в $(2n+1)$-элементном множестве?