ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 4)

1. 2054 = 764 + 26 + 1264

По условию Д и У – разные цифры. Наименьшее возможное значение Д = 2 при У = 1. Попробуем считать Е = 0. Получим

```
   МАЛ
+
    2А
+
  12АЛ
 ─────
  20ЦЛ
```

Из последнего столбца Л + А = 10. Цифры 0, 1, 2 заняты. Остались 4 случая: Л = 3, А = 7, или Л = 4, А = 6, или Л = = 7, А = 3, или Л = 6, А = 4. Перебирая их, находим ответ.

2. Барон не хвастает.

Приведем пример для $N = 19$ (можно доказать, что это наименьшее возможное N):

9|18|7|16|5|14|3|12|1|10|11|2|13|4|15|6|17|8|19.

3. Да.

Назовем *стоимостью чая в пряниках* количество пряников (возможно, нецелое), которое можно купить за те же деньги, что и чай. При подорожании стоимость чая в пряниках останется прежней. Заменим мысленно чай пряниками. Так как цены оба раза повышались на одно и то же число процентов, каждый раз количество пряников, которые можно купить на 1 рубль, уменьшалось в одно и то же число раз. Поскольку после первого подорожания это количество уменьшилось не больше, чем на один пряник, после второго подорожания оно также уменьшится не больше, чем на один пряник. Значит, рубля на чай хватит.

4. Обозначим ладьи цифрами 1, 2, 3, 4 по часовой стрелке, где 1 – ладья в левом нижнем углу. Ходы влево, вправо, вверх, вниз будем обозначать Л, П, В, Н соответственно. Серию ходов одной ладьей будем обозначать цифрой и последовательностью букв. Вот вариант ходов, собирающий ладьи в центре:

3Л, 4ВЛ, 1ПВЛ, 2НПВЛН, 3НПВ, 4НПВ, 1ЛНПВ, 3ЛНП, 2В, 4ПНЛВ, 2ПНЛВ, 4ПНЛВ, 2ПНЛВ, 3В.

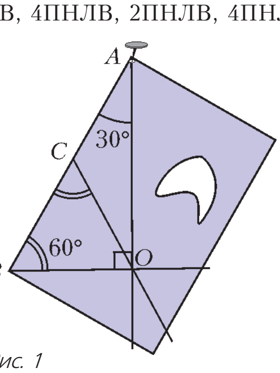

Рис. 1

5. 60°.

Если подвесить тело за одну точку, то оно обязательно повернется таким образом, чтобы центр тяжести (точка приложения силы тяжести) лежал на вертикали, проходящей через точку подвеса. Два первых подвешивания позволяют найти положение центра тяжести – точку O (рис. 1). При подвешивании за точку C вертикаль снова пройдет через точку O. Угол между ней и стороной AB будет равен 60°. (Треугольник AOB прямоугольный, поэтому $CO = CB$ и треугольник BCO равнобедренный, но один из его углов равен 60° – значит, этот треугольник равносторонний.)

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. См. рис.2.

2. Поскольку ускорение грузика пропорционально длине желоба, время движения по любому желобу, прорезанному по хорде диска, будет одним и тем же.

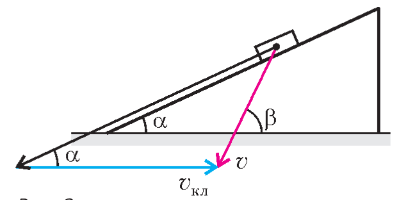

Рис. 2

3. Нужно построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся плоскости с заданным углом наклона α в некоторой точке A', а центр этой окружности должен лежать на вертикали под точкой A (рис.3). Тогда движение по желобу, расположенному по прямой AA' под углом $\alpha/2$ к вертикали, будет происходить за кратчайшее время (см. решение задачи 2).

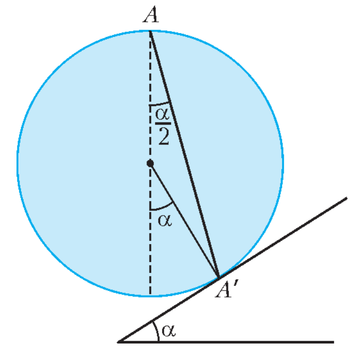

Рис. 3

4. Поршень будет находиться в равновесии, так как проекции сил давления жидкости на ось трубки слева и справа равны.

5. Давление жидкости определяется глубиной, отсчитываемой по вертикали, исходя из чего в первой мензурке давление воды на дно будет в два раза больше, чем во второй.

6. Кирпичи начнут скользить одновременно, так как действующие на них силы трения равны – они не зависят от размеров трущихся поверхностей.

7. До определенного угла α_0 (расчет дает значение $\operatorname{tg}\alpha_0 = \mu$, где μ – коэффициент трения скольжения) растет сила трения покоя, удерживающая брусок на плоскости, при дальнейшем увеличении угла на брусок действует сила трения скольжения, убывающая до нуля при достижении 90°.

8. $\vec{R} = -m\vec{g}$, $F_{тр} = mg\sin\alpha$.

9. Начав свободно падать, тело за некоторое время сместится по вертикали на высоту h, пропорциональную ускорению g (рис. 4). За то же время клин должен сместиться в горизонтальном направлении не менее чем на перемещение s, пропорциональное ускорению a (см. заштрихованный треугольник на рисунке). Учитывая, что $s/h = \operatorname{ctg}\alpha$, получаем $a = g\operatorname{ctg}\alpha$.

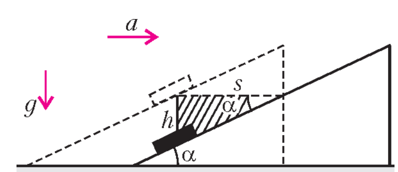

Рис. 4

10. Как только монета получит указанную скорость, сила трения окажется направленной противоположно ей. Так как эта сила горизонтальна, то она не сможет препятствовать движению монеты вниз по наклонной плоскости. В результате монета станет двигаться по кривой, изображенной на рисунке 5.

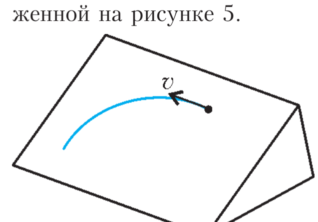

Рис. 5

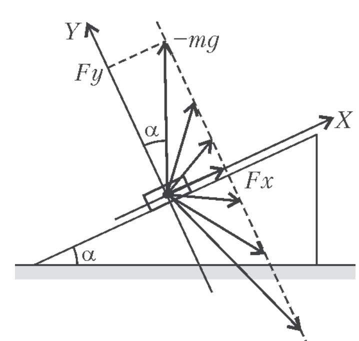

Рис. 6

11. $F_x = mg\sin\alpha$, $F_y \le mg\cos\alpha$ (см. рис. 6).

12. Поскольку маятник находится на тележке, скатывающейся с наклонной плоскости с ускорением $a = g\sin\alpha$, его поло-

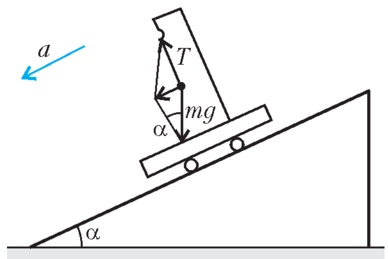

Рис. 7

жение равновесия будет таким, при котором маятник движется относительно плоскости с тем же ускорением, что и тележка. На рисунке 7 видно, что это возможно, лишь когда нить маятника перпендикулярна наклонной плоскости.

13. $\operatorname{tg}\alpha > 0{,}75$.

14. Для таких винтов выполняется неравенство $2\pi r \gg h$, где r и h – радиус и шаг винта соответственно.

15. Одинаково, если не учитывать сопротивление воздуха; второй вагон, если сопротивление учитывать.

16. При движении в гору необходимо увеличить силу тяги, а при постоянной мощности двигателя это возможно лишь при уменьшении скорости автомобиля.

17. При выполнении указанного в задаче условия скорость цилиндра у основания плоскости в первом случае больше, так как во втором случае часть потенциальной энергии цилиндра будет преобразована в кинетическую энергию вращения.

18. Верхнее бревно (2) останется в равновесии при $\alpha < 30°$. В противном случае направление силы тяжести этого бревна пройдет левее точки опоры о нижнее бревно (1), и верхнее бревно скатится на борт.

Микроопыт

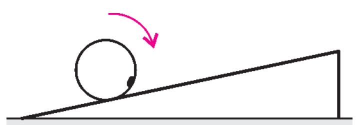

Рис. 8

Надо разместить цилиндр на наклонной плоскости так, как показано на рисунке 8, тогда он будет вести себя подобно игрушке «Ванька-встанька», когда момент силы тяжести относительно точки опоры заставляет фигурку разворачиваться, взбираясь вверх. Необходимо учесть, что при больших углах наклона плоскости цилиндр может начать проскальзывать по ней.

ЗАГАДКИ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ

Задачи 1. Концом одной из полосок надо прикоснуться к разным местам второй полоски. Если первая полоска – магнит, она будет притягивать вторую в любом месте. Если же первая полоска немагнитная, она будет с наибольшей силой притягиваться к концам второй полоски, с меньшей силой – ближе к ее центру и совсем не будет притягиваться точно в центре (где северный и южный полюса магнита как бы уничтожают друг друга).

Задачи 2. Если есть компас, то магнитную полоску, которая является магнитом, нужно поднести к компасу и посмотреть, как она будет действовать на стрелку. Тот конец полоски, который притянул синий конец стрелки компаса, надо покрасить в красный цвет, а другой конец полоски (он притягивает красный конец стрелки) – в синий. Если компаса нет, то подвесьте магнит на нитке точно в центре (или положите на плавающий в воде предмет) и посмотрите, как он будет ориентироваться по сторонам света. Тот конец бруска, который смотрит на север, надо покрасить в синий цвет.

СОХРАНЕНИЕ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОДИНАМИКИ

1. $T = 240$ К. **2.** $\delta = 60\%$. **3.** $T = 224$ К.
4. $\delta = 10\%$. **5.** $k = 5$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

1. 26 км/ч.
Обозначим место обитания племени Мумбо-Юмбо через O, хранилище, к которому побежал Мумбо, через M, а хранилище, к которому пошел Юмбо, через U. Очевидно, что M находится выше по течению, чем O, а U ниже. Пусть расстояния от O до M и U равны x и y км соответственно ($x < y$), скорость реки равна v км/ч. На путь от O до U Юмбо затратил $y/6$ часов, а Мумбо $x/11 + (x+y)/v$ часов. Ясно, что в соседнее племя Юмбо приплывает раньше Мумбо тогда и только тогда, когда $y/6 < x/11 + (x+y)/v$. Так как $x < y$, из этого неравенства следует, что $y/6 < y/11 + (y+y)/v$. Сократив на y и преобразовав, получаем $v < 26{,}4$ км/ч. Осталось проверить, что скорость реки могла равняться 26 км/ч. Для этого в неравенстве $y/6 < x/11 + (x+y)/v$ положим $v = 26$ км/ч и равносильно преобразуем его к виду $y/x < 111/110$. Последнее возможно (например, при $y = 1{,}12$ км, $x = 1{,}11$ км), что и завершает решение.

2. Да.
Каждая из данных дробей имеет вид $\frac{n+1-a}{a} = \frac{n+1}{a} - 1$, где $1 \le a \le n$. Стало быть, нам требуется найти такие различные натуральные числа a, b, c и d, не большие 2009, для которых $\left(\frac{n+1}{a}-1\right)+\left(\frac{n+1}{b}-1\right)=\left(\frac{n+1}{c}-1\right)+\left(\frac{n+1}{d}-1\right)$. Убрав минус единицы и поделив затем на $n+1$, получим равносильное равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Осталось подобрать удовлетворяющие ему дроби. Это можно сделать, взяв любое равенство двух сумм различных натуральных слагаемых, НОК которых не больше 2009, и поделив его на этот НОК. Например, равенство $1 + 4 = 2 + 3$, поделенное на 12, дает $\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$.

5. Нет.
Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел делится на каждое из них и, следовательно, на каждый их делитель. Значит, если среди чисел, от которых находят НОК, есть четное, то НОК тоже будет четным. Разность двух четных чисел – число четное, а 2009 – нечетное. Значит, если такие шесть последовательных натуральных чисел существуют, то все четные числа среди них должны быть в одном НОКе. Среди шести последовательных натуральных чисел три четных и три нечетных, значит, один НОК будет находится от трех последовательных четных чисел, а другой – от трех последовательных нечетных чисел. Но среди трех последовательных как четных, так и нечетных чисел есть кратное трем. Следовательно, оба НОКа кратны трем, и их разность делится на 3. Но 2009 на 3 не делится. Значит, таких шести последовательных натуральных чисел не существует.

6. Отложим на стороне AB отрезок $BE = BC$. Равнобедренные треугольники EBK и KBC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $EK = KC$, а $\angle AEK = 180° - \angle BEK = 180° - \angle BKC = \angle CKD$. Кроме того, $KD = BD - BK = BA - BE = EA$. Следовательно, треугольники AEK и DKC равны. Далее, поскольку оба треугольника BEK и BAD – равнобедренные, $\angle BEK = 90° - \angle EBD/2 = \angle BAD$. Поэтому $AD \parallel EK$, откуда $\angle KAD = \angle EKA = \angle KCD$.

7. Первый.
Назовем кучки из одного ореха единицами, а из двух – двойками. Первый игрок должен придерживаться следующих правил: 1) если на доске есть единицы – убрать одну из них; 2) не брать из двоек. В остальном ходы первого могут быть любыми. Заметим, что число орехов в начале игры нечетно,

значит, оно нечетно и перед любым ходом первого. Поэтому перед его ходом на доске всегда будет хотя бы одна нечетная кучка, т.е. первый всегда сможет сделать ход, не нарушая описанных правил. Теперь заметим, что после первого хода первого игрока на доске нет единиц. После хода второго игрока может появиться не более одной новой единицы, которую первый заберет. Значит, и после следующих ходов первого единиц на доске не будет, а после любого хода второго на доске будет не больше одной единицы. В частности, так будет и в конце игры, т.е. первый выиграет.

8. 3001.

Поскольку каждое число ряда, начиная со второго, больше предыдущего хотя бы на единицу, $9\cdot 1000^{1000}$-е его число больше $9\cdot 1000^{1000}$, т.е. в нем как минимум 3001 цифра. Обозначим n-е число ряда через a_n, и пусть k – наименьший номер такой, что в числе a_k 3002 цифры. Если мы докажем, что $k > 9\cdot 1000^{1000}$, то получим, что в $9\cdot 1000^{1000}$-м числе ряда не более 3001 цифры, т.е. в нем ровно 3001 цифра.

Рассмотрим числа от 0 до $10^{3001}-1$, не имеющие единиц в десятичной записи. Дополнив каждое слева нулями до 3001 знака, мы получим все последовательности длины 3001 из цифр, отличных от единицы. Таких последовательностей 9^{3001}. Значит, и среди чисел $a_1,\ldots,a_{k-1}$ не более 9^{3001} чисел, не имеющих единицы в десятичной записи (так как все они не превосходят $10^{3001}-1$).

Рассмотрим теперь процесс получения числа a_k из a_1. На каждом из $k-1$ шагов прибавляется число от 1 до 9, причем количество шагов, на которых прибавляется *не* единица, не превосходит 9^{3001}. Значит,

$$10^{3001}-1\le a_k-a_1\le 9\cdot 9^{3001}+1\cdot\left(k-1-9^{3001}\right)=k-1+8\cdot 9^{3001},$$

откуда $k\ge 10^{3001}-8\cdot 9^{3001}$. Осталось показать, что $10^{3001}-8\cdot 9^{3001}>9\cdot 10^{3000}$. Для этого достаточно доказать, что $9^{3002}<10^{3000}$. Заметим, что $9^7=4782969<5\cdot 10^6$, откуда $9^{28}<5^4\cdot 10^{24}<10^{27}$, и $9^{56}<10^{54}$. Поэтому $9^{3002}=9^{56}\cdot 9^{2946}<10^{54}\cdot 10^{2946}=10^{3000}$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. $2^3\cdot 3\cdot 7=168$.

Пусть наши дроби – это $\frac{a}{600}$ и $\frac{b}{700}$. Тогда a взаимно просто с 6, а b – с 7. Поэтому числитель их суммы $\frac{7a+6b}{4200}$ взаимно прост как с $6=2\cdot 3$, так и с 7. Поскольку $4200=2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 5^2$, это означает, что знаменатель после сокращения будет не меньше чем $2^3\cdot 3\cdot 7=168$. Такой знаменатель действительно может получиться; например, $\frac{1}{600}+\frac{3}{700}=\frac{1}{168}$.

3. Заметим, что разность между любыми двумя числами вида $a+i$ ($i=1,\ldots,n$) не превосходит $n-1$.

Пусть кратное числу n^2+i, содержащееся среди наших чисел, – это $a_i\left(n^2+i\right)$. Ясно, что $a_1>1$. Тогда найдется такое $1\le i\le n-1$, что $a_i>a_{i+1}$ (в противном случае $a_1\le a_2\le\ldots$ $\ldots\le a_n$, и $a_n\left(n^2+n\right)-a_1\left(n^2+1\right)\ge a_1(n-1)>n-1$, что невозможно). Тогда

$$n-1\ge a_i\left(n^2+i\right)-a_{i+1}\left(n^2+i+1\right)\ge$$

$$\ge a_i\left(n^2+i\right)-\left(a_i-1\right)\left(n^2+i+1\right)=n^2+i+1-a_i,$$

т.е. $a_i\ge n^2-n+i+2>n^2-n$. Теперь, так как одно из наших чисел есть $a_i\left(n^2+i\right)>\left(n^2-n\right)\left(n^2+1\right)=n^4-n^3+n^2-n$, то

$$a\ge a_i\left(n^2+i\right)-n>n^4-n^3+n^2-2n\ge n^4-n^3,\text{ так как } n\ge 2.$$

5. Заметим сначала, что для любых различных чисел x и y выполняется неравенство

$$x^2-xy+y^2>|xy|. \qquad (*)$$

В самом деле, если $|xy|=xy$, то неравенство $(*)$ равносильно неравенству $(x-y)^2>0$, которое верно; если же $|xy|=-xy$, то $(*)$ равносильно неравенству $x^2+y^2>0$.

Предположим, что $abc\ne 0$. Тогда, разделив второе равенство на первое, мы получаем

$$\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)=a^2b^2c^2=|ab|\,|bc|\,|ac|.$$

Однако все скобки слева и все сомножители справа положительны; при этом каждый сомножитель слева не меньше соответствующего сомножителя справа. Тогда равенство может достигаться лишь тогда, когда все эти три неравенства обращаются в равенства, т.е. когда $a=b=c$. В этом случае первое равенство из условия принимает вид $8a^3=a^3$, что невозможно при $a\ne 0$. Значит, наше предположение неверно, и $abc=0$.

8. Всегда.

Если $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, то способ построения очевиден. В противном случае можно считать, что $AB\ne A_1B_1$ (пусть для определенности $AB<A_1B_1$).

Построим треугольник $A'B'C$ такой, что $AB\parallel A'B'$, $A'B'=A_1B_1$, $B'C=B_1C_1$, $CA'=C_1A_1$ (рис.9; это построение легко осуществить, например, используя равенство $\angle BCB'=\angle ABC+\angle A_1B_1C_1$).

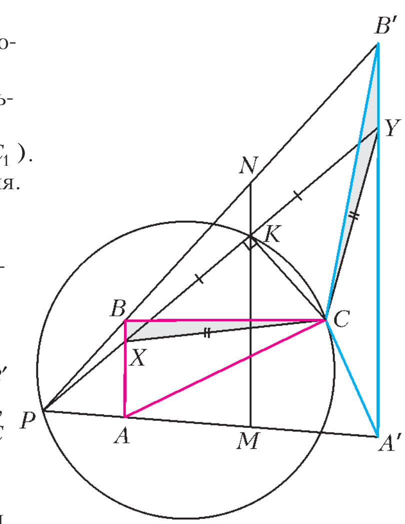

Рис. 9

Тогда $ABB'A'$ – трапеция. Пусть MN – ее средняя линия, а P – точка пересечения продолжений боковых сторон. Построим на отрезке PC как на диаметре окружность ω. Так как $AB<A_1B_1=A'B'$ и $S_{ABC}=S_{A_1B_1C_1}=S_{A'B'C'}$, то расстояние от точки C до прямой AB больше расстояния от C до прямой $A'B'$, поэтому точки P и C лежат по разные стороны от прямой MN, следовательно, ω пересекает прямую MN. Пусть K – одна из точек пересечения (на рисунке она лежит на отрезке MN, но наши рассуждения на это опираться не будут).

Проведем прямую PK до пересечения с прямыми AB и $A'B'$ в точках X и Y соответственно. Тогда $\frac{AX}{XB}=\frac{A'Y}{YB'}$, поэтому $S_{XBC}=S_{YB'C}$. Кроме того, $XK=KY$, а угол PKC – прямой как опирающийся на диаметр в окружности ω. Значит, CK – серединный перпендикуляр к отрезку XY, и $CX=CY$.

На продолжении отрезка XC за точку C возьмем точку Z такую, что $XC=CZ$. Построим треугольники A_2CZ и B_2CZ,

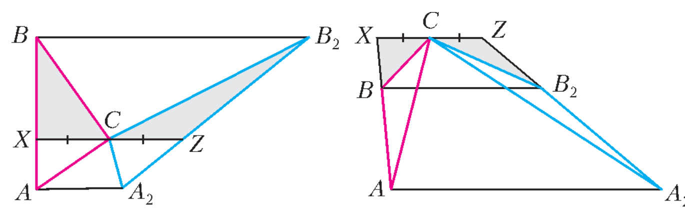

Рис. 10

равные треугольникам $A'CY$ и $B'CY$ соответственно (рис.10). Тогда $\Delta A_2B_2C = \Delta A'B'C = \Delta A_1B_1C_1$. Покажем, что $AA_2 \parallel BB_2$, тогда можно сдвинуть треугольник A_2B_2C вдоль прямой AA_2, получив требуемый. Так как $CX = CZ$, $S_{ABC} = S_{A_2B_2C}$ и $S_{XBC} = S_{ZB_2C}$, то $S_{XAC} = S_{ZA_2C}$, расстояния от точек A и A_2 до прямой XZ равны, и расстояния от точек B и B_2 до прямой XZ также равны. Следовательно, $AA_2 \parallel XZ \parallel BB_2$, что и требовалось.

10 класс

1. 1001, 1000, 500.

Ясно, что существуют требуемые многочлены с 1001 и 1000 ненулевыми коэффициентами (например, $(2x+2)^{1000} - (x+1)^{1000}$ и $(2x+1)^{1000} - (x+1)^{1000}$).

Предположим, что в нашем многочлене есть два коэффициента, равных нулю, – при x^i и x^j $(i > j)$. Тогда $a^ib^{1000-i} = c^id^{1000-i}$, $a^jb^{1000-j} = c^jd^{1000-j}$; разделив первое равенство на второе, получаем $\left(\frac{ad}{bc}\right)^i = \left(\frac{d}{b}\right)^{1000} = \left(\frac{ad}{bc}\right)^j$. Отсюда $\left|\frac{ad}{bc}\right| = 1$, $\left|\frac{d}{b}\right| = 1$ и $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$.

Ясно, что при замене $ax + b$ на $(-a)x + (-b)$ наш многочлен не изменится. Поэтому можно считать, что $\frac{a}{c} = 1$. Тогда, если $\frac{b}{d} = 1$, то итоговый многочлен $(ax+b)^{1000} - (ax+b)^{1000}$ нулевой, а если $\frac{b}{d} = -1$, то в полученном многочлене $(ax+b)^{1000} - (ax-b)^{1000}$ обнуляются в точности коэффициенты при четных степенях x, т.е. получается 500 ненулевых коэффициентов.

4. $k = 100400$.

Обозначим числа на окружности через $a_1, \ldots, a_{2009}$, и положим $a_{n+2009} = a_n = a_{n-2009}$. Пусть $N = 100400$.

Положим $a_2 = a_4 = \ldots = a_{2008} = 100$ и $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2009} = 0$. Пусть мы сумели сделать все числа равными при каком-то значении k. Рассмотрим сумму $S = (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2008} - a_{2009})$. Эта сумма увеличивается на 1 при прибавлении единицы к паре (a_1, a_2), уменьшается на 1 при прибавлении к паре (a_{2009}, a_1) и не изменяется при всех остальных операциях. Поскольку исходное значение S равно $S_0 = 100 \cdot 1004 = N$, а конечное должно быть нулем, то пара (a_{2009}, a_1) увеличивалась хотя бы N раз. Это значит, что $k \geq N$.

Осталось показать, что при $k = N$ требуемое всегда возможно. Рассмотрим произвольный набор чисел a_i. Увеличим каждую пару (a_i, a_{i+1}) ровно $s_i = a_{i+2} + a_{i+4} + \ldots + a_{i+2008}$ раз. Тогда число a_i превратится в

$$a_i + s_{i-1} + s_i = a_i + (a_{i+1} + a_{i+3} + \ldots + a_{i+2007}) + (a_{i+2} + a_{i+4} + \ldots + a_{i+2008}) = a_1 + \ldots + a_{2009},$$

т.е. все числа станут равными. С другой стороны, $s_i \leq 1004 \cdot 100 = N$, что и требовалось.

5. $k = 2010$.

Обозначим нашу последовательность (a_n). Ясно, что $a_1 < 1005 \cdot 1006 \cdot 97 \cdot N = D$ при некотором натуральном N. Тогда найдется такое n, что $a_n \leq D$, но $a_{n+1} > D$ (при этом $a_n \neq D$ из условия). Но наибольшими числами, меньшими D и делящимися на 1005 и 1006, являются числа $D - 1005$ и $D - 1006$ соответственно; поэтому $a_n \leq D - 1005$. Аналогично, $a_{n+1} \geq D + 1005$; отсюда $a_{n+1} - a_n \geq (D + 1005) - (D - 1005) = 2010$. Значит, и $k \geq 2010$.

При $k = 2010$ подходит, например, последовательность всех чисел, кратных 1005, но не кратных 97 (заметим, что 1005 не кратно 97).

7. Пусть ω_B касается BA_1, IA_1 и BC_1 в точках K_B, L_B и M_B соответственно, а ω_C касается CA_1, IA_1 и CB_1 в точках K_C, L_C и M_C соответственно (рис.11). Обозначим через O_B и O_C центры окружностей ω_B и ω_C соответственно, а через r_B и r_C – их радиусы (пусть для определенности $r_B > r_C$). Тогда четырехугольники $O_BK_BA_1L_B$ и $O_CK_CA_1L_C$ – квадраты, поэтому $A_1L_B = r_B$, $A_1L_C = r_C$ и $L_BL_C = r_B - r_C$.

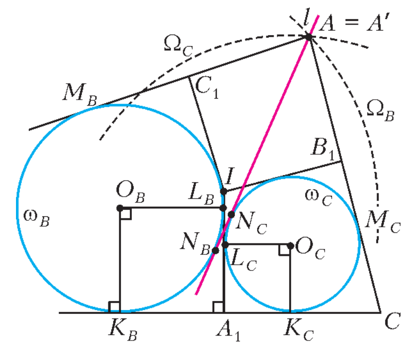

Рис. 11

Если вторая общая внутренняя касательная l касается ω_B и ω_C в точках N_B и N_C, то $N_BN_C = r_B - r_C$, причем N_C и L_B лежат по одну сторону от линии центров O_BO_C (заметим, что точка A лежит по ту же сторону).

Аналогично получаем, что $C_1M_B = r_B$, $B_1M_C = r_C$. Отложим на продолжении отрезка N_BN_C за точку N_C отрезок $N_CA' = AM_C = AB_1 + B_1M_C$. Тогда

$$N_BA' = AM_C + N_BN_C = (AB_1 + r_C) + (r_B - r_C) = AC_1 + r_B = AM_B.$$

Итак, касательные из точек A и A' к окружности ω_B равны, и касательные из них к ω_C также равны.

Заметим, что ГМТ, длина касательной из которых к окружности ω_B равна AM_B, есть окружность Ω_B с центром O_B и радиусом $\sqrt{r_B^2 + AM_B^2}$. Таким образом, точки A и A' лежат на Ω_B. Аналогично, они лежат на окружности Ω_C с центром O_C и радиусом $\sqrt{r_C^2 + AM_C^2}$.

Итак, каждая из точек A и A' является одной из двух точек пересечения окружностей Ω_B и Ω_C, а поскольку A и A' лежат по одну сторону от O_BO_C, имеем $A' = A$. Значит, A лежит на прямой N_BN_C, что и требовалось доказать.

11 класс

1. Рассмотрим самый короткий маршрут l, проходящий по всем городам. Пусть он начинается в городе A, заканчивается в городе B, а его длина равна N. Тогда числа на табличках в городах A и B равны N, а все остальные не меньше N. Пусть C – один из оставшихся городов. Он лежит на данном маршруте, поэтому длина пути от C до одного из городов A или B не больше $N/2$ (без ограничения общности – до A). Рассмотрим маршрут, который выходит из C, доходит кратчайшим образом до A, а затем повторяет маршрут l. Он проходит через все города, и его длина не превосходит $N/2 + N = 3N/2$. Следовательно, число на табличке в городе C не больше $3N/2$.

Таким образом, все числа на табличках принадлежат отрезку $[N;\ 3N/2]$, откуда и следует требуемое.

2. Положим $b_k = a_k - k$. Тогда

$$b_{k+1} = b_k - 1 + \frac{k}{k + b_k} = b_k - \frac{b_k}{k + b_k} = b_k\left(1 - \frac{1}{k + b_k}\right).$$

Отсюда очевидной индукцией по k получаем, что $b_k > 0$ (поскольку $b_1 > 0$). Кроме того, $b_{k+1} = b_k - \frac{b_k}{k + b_k} < b_k$. Отсюда, в частности, следует, что $b_k \leq b_1 < 1$.

Заметим, что $b_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} - 2 = \left(\sqrt{a_1} - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2$. Выражение в скобках положительно и возрастает, когда a_1 пробегает интервал (1; 2); тогда $0 = 1 + \frac{1}{1} - 2 < b_2 < 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, $b_k \le b_2 < \frac{1}{2}$ при $k \ge 2$.

Теперь, если $a_k + a_j$ – целое число, то $b_k + b_j$ – также целое. Значит, одно из чисел b_k, b_j (для определенности b_k) не меньше $\frac{1}{2}$; тогда $k = 1$, и $b_j = 1 - b_1$. Но таких чисел j не больше одного, так как последовательность (b_i) убывает. Из этого и следует утверждение задачи.

Замечание. Можно показать, что количество пар с целой суммой будет конечным при любом $a_1 > 1$.

3. Пусть AB_1, AC_1, AD_1 – высоты граней ACD, ABD, ABC (рис.12). Точки пересечения высот этих граней лежат на пря-

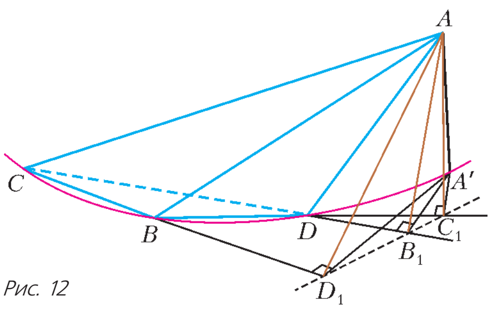

Рис. 12

мых AB_1, AC_1, AD_1 и отличны от точки A. Поскольку они лежат на одной прямой l, то прямые AB_1, AC_1, AD_1 лежат в плоскости α, содержащей l и A (ясно, что A не лежит на l). Значит, точки B_1, C_1, D_1 лежат на прямой пересечения плоскостей α и BCD.

Пусть A' – проекция точки A на плоскость BCD. Тогда по теореме о трех перпендикулярах точки B_1, C_1, D_1 являются проекциями A' на прямые CD, BD, BC. Значит, точки A', C, B_1, D_1 лежат на одной окружности (с диаметром $A'C$), а также точки A', D, B_1, C_1 лежат на одной окружности (с диаметром $A'D$). Отсюда

$$\angle(BC, A'C) = \angle(D_1C, A'C) = \angle(D_1B_1, A'B_1) =$$
$$= \angle(C_1B_1, A'B_1) = \angle(C_1D, A'D) = \angle(BD, A'D)$$

(здесь через $\angle(a, b)$ обозначен угол от прямой a до прямой b, отсчитываемый против часовой стрелки; этот угол считается с точностью до прибавления числа вида πk, где k – целое). Из равенства $\angle(BC, A'C) = \angle(BD, A'D)$ следует, что точка A' лежит на описанной окружности треугольника BCD (рис.13) и, следовательно, на описанной сфере S пирамиды $ABCD$.

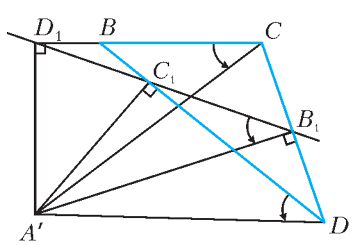

Рис. 13

Тогда центр O сферы S лежит в плоскости β, являющейся серединным перпендикуляром к AA'. Ясно, что середины ребер AB, AC, AD также лежат в β (так как треугольники ABA', ACA', ADA' прямоугольные). Это и требовалось доказать.

Замечание 1. Опустим перпендикуляры из произвольной точки A', лежащей в плоскости BCD, на прямые BC, CD, BD (см. рис. 13). Их основания лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда A' лежит на описанной окружности треугольника BCD. Эта прямая называется *прямой Симсона* точки A'.

Замечание 2. Тетраэдры, удовлетворяющие условию задачи, существуют.

4. Первый игрок.

Докажем более общее утверждение:

Пусть игра с теми же правилами происходит на конечном множестве точек S, которое содержит точку O(0; 0) и переходит в себя при повороте на 90°. Тогда в этой игре выигрывает первый игрок.

(Ясно, что множество точек из условия удовлетворяет этим условиям.)

Доказательство будем вести индукцией по количеству n точек в S. Если $n = 1$, то первый выигрывает первым своим ходом. Пусть $n > 1$. Далее под *отрезками* мы всегда будем подразумевать отрезки, концы которых лежат в S и не симметричны относительно O. Рассмотрим длины всех отрезков. Пусть d – максимальная из них, и пусть A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n – все отрезки длины d (некоторые из точек A_i, B_j могут совпадать).

Заметим, что точка O не является концом ни одного из этих отрезков. Действительно, пусть это не так, и среди наших отрезков есть какой-то отрезок OA. Пусть точка $B \in S$ получается из A поворотом на 90° относительно O. Тогда $AB = \sqrt{2}\,OA > OA$, т.е. длина отрезка OA не максимальна – противоречие.

Выкинем из S все точки A_i, B_i. Заметим, что полученное множество S' удовлетворяет всем условиям нашего утверждения (так как множество отрезков A_iB_i переходит в себя при повороте на 90°). Значит, по предположению индукции в игре на полученном множестве S' выигрывает первый.

Предъявим теперь выигрышную стратегию для него на множестве S.

Первый будет действовать по стратегии для множества S' с начала до того момента, когда второй впервые выведет фишку за пределы множества S'. Это случится, ибо согласно стратегии для S' у первого всегда есть ход, после которого фишка остается в множестве S'. Значит, рано или поздно второй сделает ход из точки X, лежащей в S', в точку Y, не лежащую там (пусть тогда $Y = A_i$). Тогда первый может сделать ход в точку B_i (так как $A_iB_i = d$, а $XA_i < d$, иначе бы X не лежала в S'), после чего второму ходить некуда – он должен сделать ход длины большей d, а таких ходов нет. Итого, первый выигрывает.

Замечание. Аналогично доказывается, что если множество S переходит в себя при повороте на 90° вокруг O, но **не содержит** ее, то выигрывает второй.

5. Введем переменные $x = \log_a b$, $y = \log_b c$. В новых переменных неравенство принимает вид

$$x + y + \frac{1}{xy} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy,$$

что после приведения к общему знаменателю переходит в

$$\frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy} \ge 0.$$

Последнее неравенство верно, так как $x \ge 1$, $y \ge 1$ и $xy \ge 1$ в силу условия задачи.

6. $k = 16$.

Рассмотрим расстановку k ладей, удовлетворяющую условию. Возможны два случая.

1. Пусть в каждом столбце стоит хотя бы по одной ладье. Тогда вся доска находится под боем, и можно убрать ладью из любого столбца, в котором их хотя бы две. Значит, в этом случае в каждом столбце стоит ровно по одной ладье, и $k \le 10$. Аналогично, если в каждой строке есть ладья, то тоже $k \le 10$.

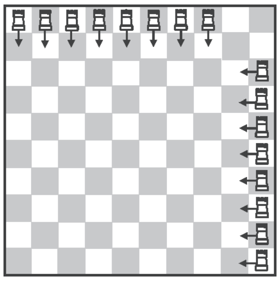
Рис. 14

2. Пусть теперь найдутся пустая строка и пустой столбец. Тогда клетка на их пересечении не под боем. Заметим, что каждая ладья является единственной либо в своей строке, либо в своем столбце (иначе ее можно выкинуть, и ее строка и столбец останутся под боем). Для каждой ладьи отметим эту строку или этот столбец. Если отмечены не более 8 столбцов и не более 8 строк, то всего ладей не больше 8 + 8 = = 16. Если же, для определенности, отмечены 9 столбцов, то ладей всего 9 (в каждом из 9 столбцов по одной, а в 10-м столбце по предположению ладей нет).

Итого, во всех случаях мы получили $k \le 16$. Пример для 16 ладей показан на рисунке 14; для каждой ладьи стрелкой указана клетка, которая останется не под боем, если эту ладью убрать.

7. Обозначим описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P через ω_A и ω_C, соответственно. Пусть лучи AQ и CQ пересекают стороны CD и AD в точках C_2 и A_2 соответственно. Тогда из параллельности $AB \parallel CD$ и вписанности четырехугольника AA_1PQ получаем

$$\angle PCC_2 = 180° - \angle AA_1P = \angle AQP = 180° - \angle PQC_2,$$

т.е. четырехугольник $CPQC_2$ также вписан. Это значит, что C_2 лежит на ω_C; аналогично, точка A_2 лежит на ω_A (рис.15).

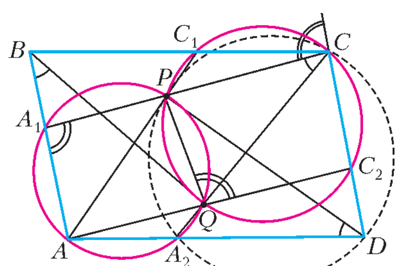

Рис. 15

Далее, так как четырехугольник AA_1PA_2 вписан и $AB \parallel CD$, имеем $\angle A_2PC = 180° - \angle A_1PA_2 = \angle A_1AA_2 = 180° - \angle A_2DC$, т.е. четырехугольник A_2PCD также вписан. Тогда $\angle PDA = = \angle PDA_2 = \angle PCA_2 = \angle PCQ$. Аналогично получаем, что четырехугольник BA_1QC вписан, откуда $\angle QBA = \angle QCA_1 = = \angle PCQ$. Отсюда следует $\angle PDA = \angle PCQ = \angle QBA$, что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение задачи остается верным, если Q не лежит в треугольнике ACD.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

2. Начальная скорость конфеты относительно ленты транспортера равна $v_0' = u\sqrt{3}$ и направлена по большей диагонали ромба со стороной u и углом 60° при вершине. Минимальная скорость конфеты относительно Глюка равна $v_{\min} = u/2$.

4. $t_x = 10$ °C.

10 класс

1. $T = mg\sqrt{3}$.

2. См. рис.16, если линза собирающая, и рис.17, если линза рассеивающая.

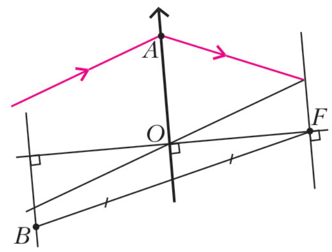

Рис. 16

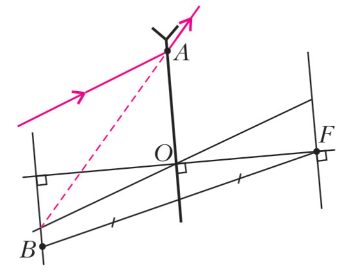

Рис. 17

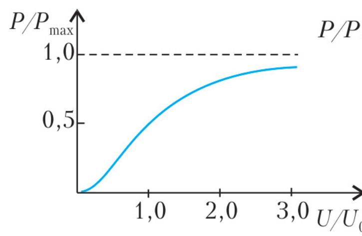

Рис. 18

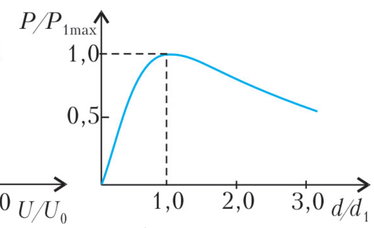

Рис. 19

4. 1) $I_{\max} = \dfrac{S}{2\sqrt{A\rho_0}} = 5$ мА; 2) $P_{\max} = \dfrac{Sd}{A} = 10$ Вт, см. рис.18; 3) $d_1 = \dfrac{U_1}{\sqrt{\rho_0/A}} = 2$ см, $P_{1\max} = \dfrac{Sd_1}{2A} = 10$ Вт, см. рис.19.

11 класс

1. 1) $L = \dfrac{h}{3} = 30$ м, $k = \dfrac{9mg}{2h} = 35$ Н/м;

2) $x_0 = \dfrac{2h}{9} = 20$ м; 3) $v_{\max} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2gh} = 28{,}3$ м/с;

4) $A = \dfrac{4h}{9} = 40$ м, $\omega = \sqrt{\dfrac{9g}{2h}} = 0{,}71$ с$^{-1}$;

5) $\tau = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2\pi}{9}\right)\sqrt{\dfrac{2h}{9}} = 5{,}41$ с.

2. 1) $I_0 = \sqrt{\dfrac{2Q_0}{L}}$; 2) $q_1 = \dfrac{\sqrt{2Q_0L}}{R}$; 3) $q_2 = 0$;

4) $A = \mathcal{E}q_0 + \dfrac{\mathcal{E}}{R}\sqrt{2Q_0L}$; 5) $Q = A - Q_0$.

3. 1) $m_л = \dfrac{P_0\tau_0}{\lambda} \approx 0{,}15$ кг, где $\tau_0 = 2$ мин – время плавления льда;

2) $M \approx 0{,}48$ кг; 3) $\alpha \approx 2{,}0$ Вт/°C;

4) $P_{\max} \approx 200$ Вт; 5) $\tau_1 \approx 21$ мин.

4. 1) См. рис.20, где a = 400 К, b = 4 л, $l = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Максимальное давление соответствует точке C на графике и равно $p_{\max} \approx 4{,}75$ МПа.

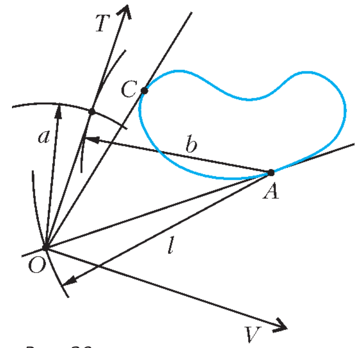

Рис. 20

5. $F_1 = \dfrac{L^2 + 2l_1L \pm L\sqrt{L^2 + 4l_1l_2}}{2(L + l_1 - l_2)} = (20{,}0 \pm 16{,}3)$ см,

$F_2 = \dfrac{L^2 + 2l_2L \pm L\sqrt{L^2 + 4l_1l_2}}{2(L + l_2 - l_1)} = (16{,}0 \pm 9{,}8)$ см,

возможны два случая: обе линзы длиннофокусные, тогда $F_1 = 36{,}3$ см и $F_2 = 25{,}8$ см, или обе линзы короткофокусные, тогда $F_1 = 3{,}7$ см и $F_2 = 6{,}2$ см.

МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2009 ГОДА

1. $R_{\min} = \dfrac{mv^2}{2F}$. **2.** $F = \dfrac{mg}{2}\left(1 - \dfrac{R}{r_2}\right)$.

3. $r = 2l$. **4.** $A = \dfrac{T_1T_2\eta\Delta S}{T_1(1-\eta) - T_2}$. **5.** $E = \dfrac{\sigma}{2\sqrt{2}\,\varepsilon_0}$.

6. $\Phi = \mu_0\pi IN\delta$. **7.** $I = \dfrac{2\pi R\delta\sigma(U - BL\omega R)}{1 + B^2\sigma^2/(e^2n^2)}$.

8. $M = \dfrac{4\pi\omega L\varepsilon_0^2E^2R^3}{\delta\gamma}$.

9. Пучок света отклонится на угол $\beta = \arcsin\dfrac{\Lambda\sin\alpha}{\lambda}$ и сфокусируется на расстоянии $L = \dfrac{l\lambda}{\Lambda}$ от пластинки.

МОДУЛЬ СУММЫ И СУММА МОДУЛЕЙ

(см. «Квант» №4)

1. Неравенство (2) (см. статью) равносильно неравенству $|ab| \ge -ab$. Равенство достигается при $ab \le 0$.
Неравенство ($2'$) равносильно неравенству $|ab| \ge ab$. Равенство достигается при $ab \ge 0$.

2. Стандартное рассуждение по индукции. Неравенство (3) справедливо при $n = 2$ (это неравенство (1)). Если оно справедливо при $n = k$, то оно справедливо и при $n = k + 1$:

$$|a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}| \le |a_1 + \ldots + a_k| + |a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{k+1}|.$$

3. Равносильное неравенство имеет вид $(x^2-1)(y^2-1) < 0$, а это значит, что число 1 расположено между $|x|$ и $|y|$.

4. Числа x, y, z либо неположительны, либо неотрицательны, а числа $|x|$, $|y|$, $|z|$ – длины сторон некоторого треугольника (может быть, вырожденного).
Неравенство задачи 3 обращается в равенство, если и только если являются равенствами три неравенства, которые мы складывали, решая задачу. Для этого необходимо и достаточно выполнения трех условий:

$$x^2 - (z-y)^2 \ge 0, \quad y^2 - (x-z)^2 \ge 0, \quad z^2 - (x-y)^2 \ge 0,$$

или

$$|x| \ge |z-y|, \quad |y| \ge |x-z|, \quad |z| \ge |x-y|. \qquad (*)$$

Докажем, что все числа x, y, z либо неположительны, либо неотрицательны.
Если одно из трех чисел равно 0, то, очевидно, два остальных равны.
Если ни одно из них не равно нулю и среди них есть как положительные, так и отрицательные, можно считать, что $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$ (если x, y, z удовлетворяют системе ($*$), то $-x$, $-y$, $-z$ тоже ей удовлетворяют).
Но тогда $x \ge y - z$, $y \ge x - z$, откуда $x + y \ge y + x - 2z$, т.е. $z \ge 0$ (противоречие).
Итак, числа x, y, z имеют одинаковые знаки, и из ($*$) следует, что выполняются неравенства треугольника

$$|x| + |y| \ge |z|, \quad |y| + |z| \ge |x|, \quad |x| + |z| \ge |y|.$$

Нетрудно проверить, что эти условия не только необходимы, но и достаточны.

5. $n \cdot 2^{n-2}$.
Каждая такая расстановка однозначно определяется выбором точки, в которой ставится 1 (n способов), и любым набором чисел, стоящих против часовой стрелки на дуге между 1 и n. Таких наборов (включая и пустой набор) 2^{n-2}. Итого, получается $n \cdot 2^{n-2}$ способов.

7. Нет.
Если $x = ai$, $y = -ai$, где a – действительное число и $|a| < 1$, то $\left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right| = \left|\dfrac{2a}{1-a^2}\right|$. При a, близких к 1, последнее выражение может быть сделано сколь угодно большим.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59