

Чтобы выяснить, что происходит с направлением главной оси, или большой оси инерции, Луны в ходе оптической либрации по долготе, рассмотрим движение Луны по эллипсу с эксцентриситетом $e = 0,0549$ при совпадении периодов осевого вращения и обращения Луны вокруг Земли (рис.3). Далее ограничимся двумя законами Кеплера. Согласно первому закону, в точке первого фокуса эллипса находится центр масс Земля-Луна. Еще в древности астрономы, а позднее и Кеплер, наряду с истинной аномалией θ вводили угол эксцентрической аномалии ϵ . Оба угла связаны между собой таким тригонометрическим соотношением:

$$\cos \theta = \frac{\cos \epsilon - e}{1 - e \cos \epsilon}.$$

За время, прошедшее от момента, когда Луна находилась в перигее ($\epsilon = 0$, $\theta = 0$), до момента с заданными в данный момент времени t значениями этих углов ϵ и θ радиус-вектор Луны заметает площадь

$$S = \frac{a_1 a_2}{2} (\epsilon - e \sin \epsilon).$$

Второй закон Кеплера требует, чтобы отношение этой площади к полной площади эллипса было равно отношению соответствующих времен:

$$\frac{S}{\pi a_1 a_2} = \frac{t}{T},$$

где T – период обращения по эллипсу. Отсюда находим

$$t = \frac{(\epsilon - e \sin \epsilon)}{2\pi} T.$$

Поскольку осевая угловая скорость вращения Луны Ω должна быть равна (по условию синхронного ее обращения вокруг Земли) среднему значению угловой скорости $\omega = \frac{2\pi}{T}$ при обращении вокруг нашей планеты, то угол поворота большой оси инерции Луны за указанное время t равно

$$\delta = t\Omega = t\omega = \frac{T\omega}{2\pi} (\epsilon - e \sin \epsilon) = \epsilon - e \sin \epsilon.$$

Рассмотрим треугольник f_1MC . В нем

$$\frac{d_{Cf_1}}{\sin \chi} = \frac{r}{\sin(\theta - \chi)}, \quad \delta + \chi = \theta, \quad \text{и} \quad d_{Cf_1} = r \frac{\sin \chi}{\sin \delta}.$$

Нас интересует расстояние $\Delta = d_{Cf_2} = 2a_1 e - d_{Cf_1}$. Для него имеем

$$\frac{\Delta}{a_1} = 2e - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} \frac{\sin \chi}{\sin \delta} = 2e - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} (\sin \theta \operatorname{ctg} \delta - \cos \theta).$$

Определим теперь $\operatorname{ctg} \delta$ как функцию от угла ϵ (или θ):

$$\operatorname{ctg} \delta = \operatorname{ctg}(\epsilon - e \sin \epsilon) = \frac{1 + \operatorname{tg} \epsilon \operatorname{tg}(e \sin \epsilon)}{\operatorname{tg} \epsilon - \operatorname{tg}(e \sin \epsilon)}.$$

Поскольку

$$\cos \epsilon = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}, \quad \sin \epsilon = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}, \quad \operatorname{tg} \epsilon = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{e + \cos \theta},$$

получается

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{1 + \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{e + \cos \theta} \operatorname{tg} \left(\frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right)}{\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{e + \cos \theta} - \operatorname{tg} \left(\frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right)}.$$

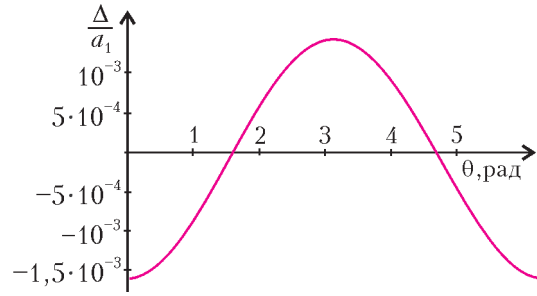


Рис.4. График для величины $\frac{\Delta}{a_1}$ как функции угла истинной аномалии θ

В итоге оказывается, что искомое расстояние от точки второго фокуса, на котором продолжение большой оси инерции Луны пересекает главную ось орбиты Луны, отлична от нуля и связано с полуосью a_1 таким соотношением:

$$\frac{\Delta}{a_1} = e + \cos \epsilon - \operatorname{ctg} \delta \cdot \sqrt{1 - e^2} \sin \epsilon.$$

Результаты расчетов по этой формуле приведены на рисунке 4. Разложение в ряд по степеням малого эксцентриситета:

$$\frac{\Delta}{a_1} = -\frac{\cos \epsilon}{2} e^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \cos^2 \epsilon \right) e^3 - \frac{\cos \epsilon}{24} (1 + 8 \cos^2 \epsilon) e^4 + \dots$$

дает, что в первом приближении эффект искомого отклонения пропорционален квадрату эксцентриситета орбиты Луны.

Итак, при обращении Луны по эллипсу вокруг Земли конец большой оси инерции нашего спутника не всегда будет направлен в точку второго фокуса, но совершает (без учета малой физической либрации) колебательные движения в окрестности этой самой точки:

$$-1,5933 \cdot 10^{-3} \leq \frac{\Delta}{a_1} \leq 1,4275 \cdot 10^{-3}.$$

В линейной мере

$$-612 \text{ км} \leq \Delta \leq 548 \text{ км}.$$

Обратим внимание на некоторую асимметрию относительно точки фокуса f_2 интервала изменения величины Δ . Как вы думаете, в чем причина такой асимметрии?

И еще. Полученная формула для величины $\frac{\Delta}{a_1}$ описывает оптическую либрацию по долготе для наблюдателя, расположенного в первом фокусе орбиты. А какой будет величина этой либрации для наблюдателя, переместившегося во второй фокус или в центр эллипса? Другими словами, в какой из трех указанных точек можно будет видеть наибольшую дополнительную (к 50%) площадь Луны?

Ответы на эти вопросы вдумчивым читателям предлагается найти самостоятельно.

Автор глубоко признателен рецензентам К.В.Холшевникову и В.Г.Сурдину за полезные замечания.

СНОВА О ТЕОРЕМЕ МОРЛЕЯ

Л.ШТЕЙНГАРЦ

Три короткие задачи о биссектрисах

Одной из самых удивительных и красивых теорем в геометрии по праву считается *теорема Морлея*, которая утверждает следующее (рис.1):

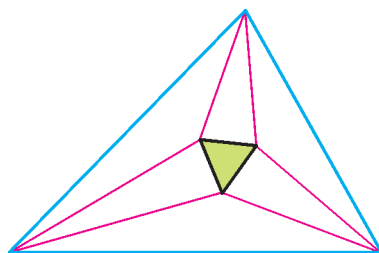


Рис. 1

Точки пересечения смежных трисектрис углов (т.е. лучей, делящих данный угол на три равные части) произвольного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника.

Теорема была открыта в 1904 году английским математиком Франком Морлеем (Frank Morley). Тогда он рассказал об этой теореме своим друзьям, а опубликовал ее двадцать лет спустя в Японии.

У этой теоремы есть, к сожалению, один существенный «недостаток». До недавнего времени были известны лишь довольно сложные доказательства этой теоремы (см. список литературы в конце статьи). Как правило, учителя, рассказывая ученикам об этой теореме, говорят, в каком году и кем она была открыта, показывают красивый чертеж, но очень редко ее доказывают. На наш взгляд, этот «недостаток» можно устранить.

В этой небольшой статье мы предлагаем три совсем нетрудные задачи, решения которых доступны практически любому школьнику.

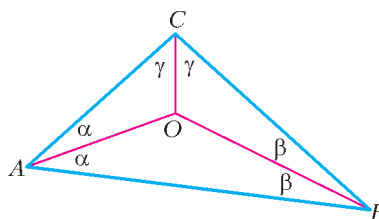


Рис. 2

После этих задач доказательство теоремы Морлея становится почти очевидным.

Задача 1. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O (рис.2). Докажите, что

угол COB на 90° больше, чем половина угла A.

Решение. Введем обозначения: $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Ясно, что $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Тогда $\beta + \gamma = 90^\circ - \alpha$. Следовательно, $\angle COB = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha + 90^\circ$.

Задача 2 (обратная к задаче 1). Внутри треугольника ABC (рис.3) взята точка O так, что угол COB на 90°

больше, чем угол CAO, а угол COA на 90° больше, чем угол CBO. Докажите, что AO, BO и CO являются биссектрисами углов данного треугольника.

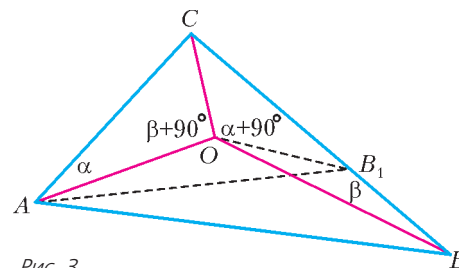


Рис. 3

Решение. Обозначим: $\angle CAO = \alpha$, $\angle CBO = \beta$. Тогда, по условию, $\angle COA = \beta + 90^\circ$, $\angle COB = \alpha + 90^\circ$. То, что CO — биссектриса угла C, очевидно, так как в каждом из треугольников ACO и BCO сумма двух углов одинакова (каждая из них равна $\alpha + \beta + 90^\circ$).

Докажем теперь, что AO — биссектриса угла CAB. Предположим, что это не так. Возьмем тогда на стороне CB (или на ее продолжении) точку B_1 так, чтобы луч AO оказался биссектрисой угла CAB_1 (см. рис.3). При этом окажется, что O — точка пересечения биссектрис треугольника CAB_1 . Тогда получаем (см. задачу 1), что $\angle COB_1 = \alpha + 90^\circ$, а это противоречит условию — ведь $\angle COB = \alpha + 90^\circ$. Следовательно, AO — биссектриса угла A. Но так как, кроме того, CO — биссектриса угла C, то BO — биссектриса угла B, что и требовалось.

Задача 3. На сторонах OA_1 и OB_1 равностороннего треугольника A_1OB_1 (рис.4) построили внешним образом треугольники A_1OA и B_1OB так, что угол B_1OB на 60°

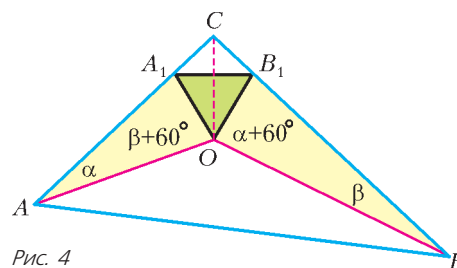


Рис. 4

больше, чем угол A_1AO , а угол A_1OA на 60° больше, чем угол B_1BO . Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C. Докажите, что AO, BO и CO являются биссектрисами углов треугольника ABC.

Решение. Обозначим: $\angle A_1AO = \alpha$, $\angle B_1BO = \beta$. Ясно, что $\angle AA_1O = \angle BB_1O$. Получается, что $\angle CA_1B_1 = \angle CB_1A_1$ (так как $\angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 = 60^\circ$), т.е. треугольник A_1CB_1 оказывается равнобедренным. Поэтому треугольники A_1OC и B_1OC равны (по трем сторонам), и каждый из углов A_1OC и B_1OC равен 30° . При этом $\angle BOC = \alpha + 90^\circ$, а $\angle AOC = \beta + 90^\circ$.

Следовательно (см. задачу 2), AO, BO и CO являются биссектрисами треугольника ABC, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы Морлея

Пусть ABC — данный треугольник, а треугольник XYZ образован трисектрисами углов данного треугольника (рис.5). Докажем, что треугольник XYZ равносторонний.

Автор статьи — преподаватель школы «Шуву» из Иерусалима.

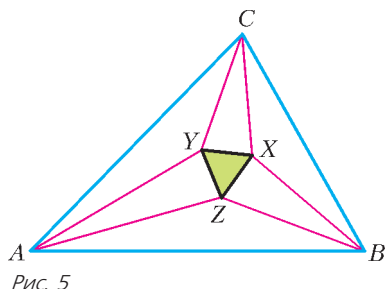


Рис. 5

Очевидно, что $\angle B_1A_2C_1 = \alpha$, так как $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

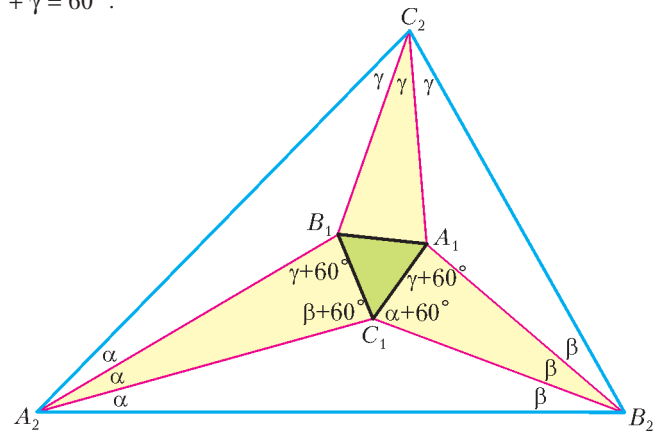


Рис. 6

Введем обозначения: $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$. Рассмотрим произвольный равно-
сторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 6). Построим на стороне B_1C_1 треугольник $A_2B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_2B_1C_1 = \gamma + 60^\circ$, а $\angle A_2C_1B_1 = \beta + 60^\circ$. Очевидно, что $\angle B_1A_2C_1 = \alpha$, так как $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

Точно так же построим еще два треугольника $A_1C_1B_2$ и $A_1B_1C_2$ (см. рис.6).

Лучи A_2B_1 и B_2A_1 пересекутся в некоторой точке M , так как сумма углов $B_1A_2B_2$ и $A_1B_2A_2$ меньше 180 градусов. При этом для треугольника A_2B_2M выполняются условия задачи 3. Поэтому A_2C_1 будет биссектрисой угла $B_1A_2B_2$, а B_2C_1 будет биссектрисой угла $A_1B_2A_2$. Это означает, что $\angle C_1A_2B_2 = \alpha$, а $\angle C_1B_2A_2 = \beta$.

Аналогичный результат получается и в остальных случаях (для A_2B_1 , C_2B_1 , C_2A_1 и B_2A_1).

Таким образом, оказывается, что в треугольнике $A_2B_2C_2$ проведены трисектрисы, и они при своем пересечении определяют равносторонний треугольник. Но очевидно, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны (по углам). Следовательно, и треугольник XYZ также равносторонний. Теорема Морлея доказана.

Литература

1. Г.С.М.Кокстер, С.П.Грейтцер. *Новые встречи с геометрией*. – М.: Наука, 1978.
2. Г.Тоноян, И.Яглом. *Теорема Морлея*. – «Квант», №8, 1978.
3. З.А.Скопец. *Геометрические миниатюры*. – М.: Просвещение, 1990.
4. В.В.Прасолов. *Геометрия. Задачи по планиметрии*. – М.: МИЦМО, 2007.
5. A.Connes. *A new proof of Morley's theorem*. – Publications Mathématiques de l'IHÉS, S88 (1998).

От редакции

С момента открытия теоремы Морлея прошло уже больше века, но до сих пор эта необыкновенно красивая задача привлекает к себе внимание математиков. В англоязычной литературе ее иногда называют «Morley's Miracle» («чудо Морлея»). «Квант» уже писал об этой теореме в № 8 за 1978 год в статье Г.Тонояна и И.Яглома «Теорема Морлея», где приведены первые элементарные, но весьма непростые ее доказательства.

Мы предлагаем вашему вниманию еще два элегантных и коротких рассуждения, найденных не так давно. Первое принадлежит Дж.Конвею (изобретателю игры «Жизнь»), а второе взято из математического фольклора. Они близки по духу, но в каждом есть своя изюминка.

Советуем также заглянуть на сайт

<http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/>

Там приведено больше десятка доказательств теоремы, в том числе принадлежащих и известным математикам.

Доказательство Конвея

Пусть углы исходного треугольника равны $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$. Введем удобное обозначение: будем писать ϕ^* вместо $\phi + 60^\circ$. Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 0^*$. Заметим, что существуют треугольники с углами $(0^*, 0^*, 0^*)$, $(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$, $(\alpha^*, \beta, \gamma^*)$, $(\alpha^*, \beta^*, \gamma)$, $(\alpha^{**}, \beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta^{**}, \gamma)$, $(\alpha, \beta, \gamma^{**})$, так как в каждом случае сумма углов равна 180° . Теперь для каждой тройки углов построим конкретный треугольник с этими углами, специально подбирая длины сторон.

Для тройки $(0^*, 0^*, 0^*)$ это будет равносторонний треугольник со стороной 1.

Для тройки $(\alpha^*, \beta, \gamma^*)$ – это треугольник, в котором сторона, соединяющая вершины с углами α^* и γ^* , равна 1 (рис.1,а). Аналогично поступим с тройками $(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$ и $(\alpha^*, \beta^*, \gamma)$.

Для тройки $(\alpha^{**}, \beta, \gamma)$ сделаем так. Рассмотрим треугольник BXC (рис.1,б), в котором угол при вершине B равен β , при вершине X равен α^{**} , а при вершине C равен γ . Через

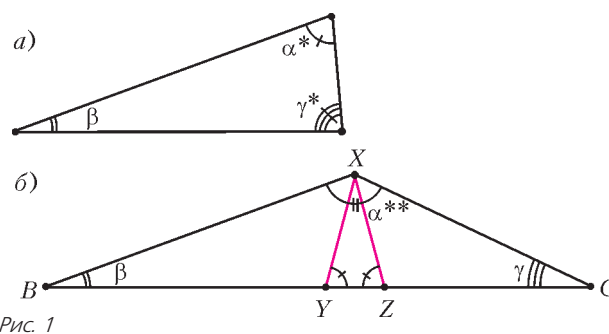


Рис. 1

вершину X проведем два луча, которые пересекают прямую BC в точках Y и Z под углом α^* , и подберем масштаб так, чтобы $XY = XZ = 1$. При этом сторона BX окажется равной стороне, лежащей против угла α^* в уже построенном треугольнике с углами $\alpha^*, \beta, \gamma^*$ (подумайте, почему). Это потребует нам чуть дальше. Аналогично построим треугольники и для двух оставшихся троек такого вида.

Итак, мы получили 7 треугольников. Расположим их как показано на рисунке 2, и начнем придвигать их друг к другу, чтобы получился рисунок 3. Почему все так хорошо совпадает? Во-первых, суммы углов при всех внутренних вершинах

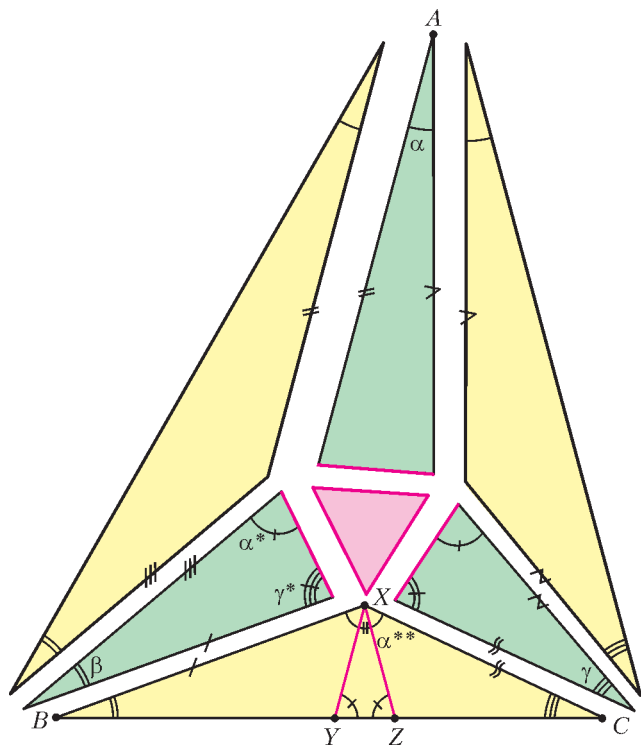


Рис. 2

равны 360° . Во-вторых, красный треугольник примыкает к зеленому по единичным отрезкам, а желтые треугольники примыкают к зеленым по равным отрезкам по построению (выше мы доказали это для треугольника BXC и треугольника с углами α^* , β , γ^* , аналогично рассматривается любая пара из желтого и зеленого треугольников).

Образовавшийся треугольник ABC подобен исходному по трем углам, а получившаяся картинка совпадает с той, что получится при проведении трисектрис. Поэтому и в исход-

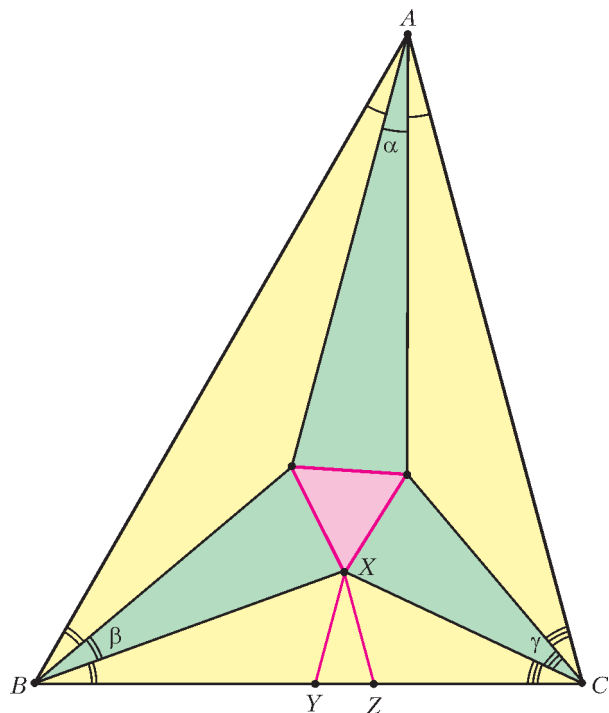


Рис. 3

ном треугольнике образованный трисектрисами треугольник будет равносторонним.

Еще одно доказательство

Рассмотрим равносторонний треугольник XYZ и отразим его симметрично относительно каждой из сторон, получится

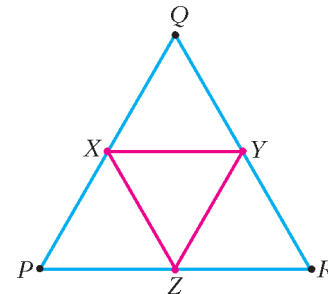


Рис. 4

треугольник PQR (рис.4). Пусть нам дан треугольник с углами 3α , 3β и 3γ . Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Из точки X проведем луч, образующий угол γ с лучом XP , а из точки Z — образующий угол α с лучом ZP . Эти лучи обязательно пересекутся (в точке B), так как сумма углов, которые они образуют с отрезком XZ , меньше 180° (рис.5). Аналогично проведем лучи ZA и YA ($\angle RZA = \beta$, $\angle RYA = \gamma$). Ясно, что

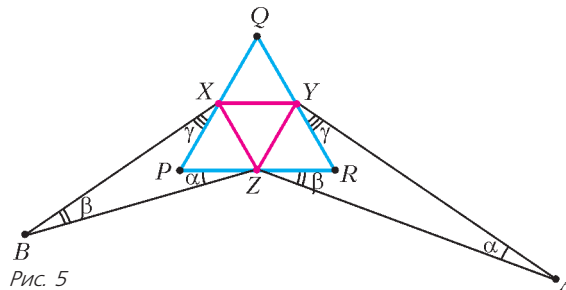


Рис. 5

угол при вершине B в треугольнике BXZ равен β , а угол при вершине A в треугольнике AZY равен α . Пусть прямая PR пересекает BX и AY в точках S и T соответственно (рис. 6). Треугольники SXZ и TYZ равны по стороне и двум прилежащим углам. Поэтому $SZ = TZ$. Далее, треугольники SBZ

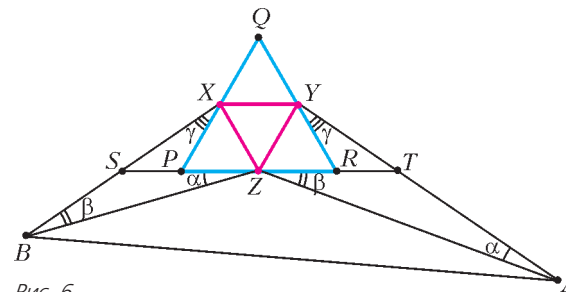


Рис. 6

и TZA подобны (в каждом есть углы α и β). Из двух последних утверждений получаем равенства $BZ:ZA = SZ:TA = TZ:TA$. Наконец, заметим, что $\angle BZA = \angle ZTA = 180^\circ - \alpha - \beta$. Тогда треугольник BZA подобен треугольнику ZTA по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, $\angle ZBA = \beta$, $\angle ZAB = \alpha$. Аналогичные рассуждения для точек X и Y вместо точки Z приведут нас к треугольнику ABC , углы которого равны 3α , 3β и 3γ . Этот треугольник подобен исходному, и, значит, снова теорема доказана.

Сохранение полной энергии в задачах термодинамики

А. ЧЕРНОУЦАН

В тех задачах термодинамики, где действующими лицами являются жидкости и твердые тела, внутренняя энергия выступает достаточно обособленно по отношению к механической энергии. Более того, первые же качественные задачи показывают, что типичные происходящие вокруг нас превращения внутренней энергии соответствуют весьма значительным изменениям энергии механической.

Вот характерный пример.

Задача 1. На какую высоту можно было бы поднять груз массой $M = 100$ кг, если бы удалось полностью превратить в работу энергию, выделяющуюся при охлаждении стакана воды от 100°C до 20°C ? Масса воды в стакане $m = 250$ г.

Решение. Записав соотношение

$$c_v m |\Delta t| = Mgh,$$

где $c_v = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) – удельная теплоемкость воды, получим

$$h = 84 \text{ м.}$$

Забывать выпить стакан чая – дело обычное, а вот поднять стокилограммовый груз почти на стометровую высоту – достойно Геракла или Ильи Муромца!

Совсем другая ситуация возникает в задачах с идеальными газами. Там изменения механической и внутренней энергии выступают как тесно связанные величины одного порядка. Наиболее ярко это проявляется в задачах, где система, выведенная из равновесия, приходит в новое равновесное состояние в результате неравновесного переходного процесса. Особенность таких задач состоит в том, что мы не можем описать промежуточные состояния системы, но закон сохранения энергии совместно с условием конечного равновесия позволяют найти решение.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 2. В высоком теплоизолированном цилиндре под поршнем находится гелий. Поршню толчком сообщают скорость $v = 2$ м/с. На сколько выше начального положения окажется поршень после прихода системы в равновесие? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. Поскольку к системе газ – поршень тепло не подводится и работа этой системы над внешними телами равна нулю, полная энергия системы (механическая плюс внутренняя) сохраняется. Кроме того, по условию можно

пренебречь изменением (за время процесса) внутренней энергии стенок сосуда и поршня. Тогда получаем (рис.1)

$$mgh_1 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2}vRT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2}vRT_2.$$

Теперь запишем условие механического равновесия поршня

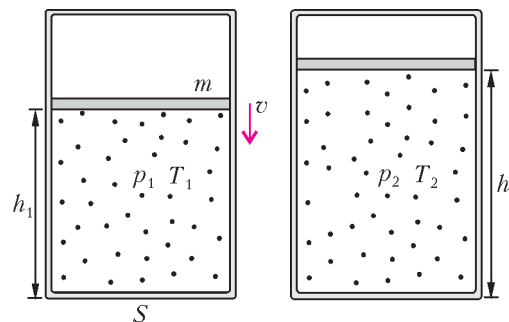


Рис. 1

и уравнение Менделеева–Клапейрона для гелия в начальном и конечном состояниях системы:

$$p_1 S = mg, \quad p_1 S h_1 = vRT_1,$$

$$p_2 S = mg, \quad p_2 S h_2 = vRT_2.$$

Отсюда, исключив давления, получим

$$mgh_1 = vRT_1, \quad mgh_2 = vRT_2.$$

Видно, что благодаря условию механического равновесия внутренняя энергия газа оказывается пропорциональной потенциальной энергии поршня. Подставив эти соотношения в закон сохранения энергии, найдем

$$\frac{5}{2}mgh_1 + \frac{mv^2}{2} = \frac{5}{2}mgh_2,$$

или

$$h_2 - h_1 = \frac{v^2}{5g} = 8 \text{ см.}$$

Отметим, что ответ не зависит от того, в каком направлении толкнули поршень – вверх или вниз.

Замечание. Иногда удобнее записывать уравнения по-другому. Для газа отдельно можно записать в стандартной форме второй закон термодинамики:

$$0 = \Delta U + A,$$

а работу газа над внешними телами (над поршнем) приравнять к изменению механической энергии поршня. Это особенно удобно в тех задачах, где надо учесть подводимое к системе тепло.

Задача 3. В высоком вертикальном цилиндре под поршнем массой $m = 16,6$ кг находится $\nu = 0,1$ моль гелия при температуре $T_1 = 200$ К. Вначале поршень удерживают на высоте $h_1 = 50$ см, а затем отпускают. На какой высоте окажется поршень после прихода системы к равновесию? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. Отличие этой задачи от предыдущей состоит в том, что условие равновесия поршня можно записать только в конечном положении, а в начальном состоянии сила тяжести поршня не равна силе давления газа. Тогда получим

$$p_2 S = mg, \quad p_2 S h_2 = vRT_2,$$

или

$$mgh_2 = \nu RT_2.$$

Подставив это соотношение в закон сохранения энергии

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2}\nu RT_2,$$

найдем

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{5}{2}mgh_2,$$

откуда

$$h_2 = 0,4h_1 + 0,6 \frac{\nu RT_1}{mg} = 80 \text{ см.}$$

Отметим, что конечная высота может быть как больше, так и меньше начальной. Если сила давления газа в начальном состоянии превышает вес поршня:

$$p_1 S = \frac{\nu RT_1}{h_1} > mg,$$

то поршень после освобождения пойдет вверх и высота увеличится, в противном случае поршень пойдет вниз и высота уменьшится.

Задача 4. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре $T_1 = 240 \text{ К}$. На поршне лежит груз массой, равной половине массы поршня. Груз мгновенно убирают и ждут прихода системы к равновесию. Чему станет равна температура газа? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. В этой задаче условия механического равновесия в начальном и конечном состояниях выглядят по-разному (рис.2):

$$p_1 S = \left(m + \frac{m}{2}\right)g, \quad p_2 S = mg,$$

где m – масса поршня, и после подстановки в уравнения

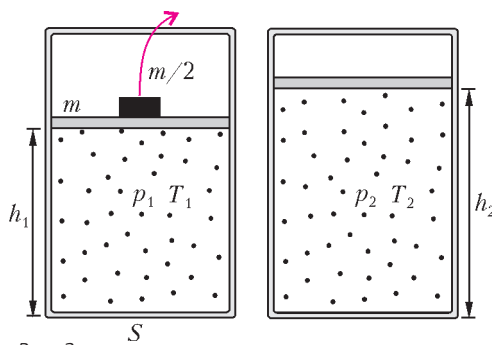


Рис. 2

Менделеева–Клапейрона получаются разные соотношения:

$$\frac{3}{2}mgh_1 = \nu RT_1, \quad mgh_2 = \nu RT_2.$$

Используя эти соотношения и закон сохранения энергии

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_1 = mgh_2 + \frac{3}{2}\nu RT_2,$$

получим

$$T_2 = \frac{13}{15}T_1 = 208 \text{ К.}$$

Замечание. При решении этой задачи часто встречается характерная ошибка: в левой части уравнения, выражающего закон сохранения энергии, записывают начальную потенциальную энергию не как mgh_1 , а как $1,5mgh_1$, т.е. учитывают лежавший на поршне груз. Это неверно, так как поршень

начинает двигаться только после снятия груза и система поршень – газ после этого является замкнутой. (Если же включать в систему груз, то можно считать, что после отделения от поршня его удерживают на месте, и тогда его потенциальная энергия сокращается.)

Задача 5. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре $T_1 = 200 \text{ К}$. Температуру быстро, так что поршень не успевает сдвинуться с места, повышают до $T_2 = 250 \text{ К}$. Какой станет абсолютная температура газа после прихода системы к равновесию? Над поршнем газа нет.

Решение. После быстрого нагревания газа его давление возрастет, и равновесие нарушится. Поэтому условие равновесия и закон Менделеева – Клапейрона надо записывать для системы до нагревания (рис.3):

$$p_1 S = mg, \quad p_1 Sh_1 = \nu RT_1$$

и в конечном состоянии:

$$p_3 S = mg, \quad p_3 Sh_2 = \nu RT_3,$$

а закон сохранения энергии – для системы сразу после

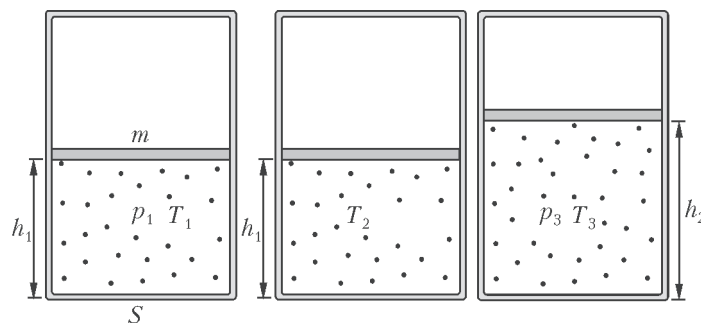


Рис. 3

нагревания и в конечном состоянии:

$$mgh_1 + \frac{3}{2}\nu RT_2 = mgh_2 + \frac{3}{2}\nu RT_3.$$

После преобразований приходим к уравнению

$$\nu RT_1 + \frac{3}{2}\nu RT_2 = \nu RT_3 + \frac{3}{2}\nu RT_3,$$

откуда находим

$$T_3 = \frac{2T_1 + 3T_2}{5} = 230 \text{ К.}$$

Задача 6. В высоком теплоизолированном цилиндре под тонким массивным поршнем находится одноатомный идеальный газ. Над поршнем на некоторой высоте удерживают груз, масса которого равна массе поршня. Груз отпускают, и он падает на поршень. Через некоторое время после абсолютно неупругого удара система приходит в равновесие. Оказалось, что поршень в конце находится на той же высоте, что и в начале. Во сколько раз начальная высота груза над дном сосуда больше высоты поршня? Трением и теплообменом пренебречь, над поршнем газа нет.

Решение. В этой задаче нельзя приравнивать начальную и конечную энергии системы, так как при неупругом ударе часть энергии перейдет во внутреннюю энергию поршня и груза. Поскольку теплообменом между поршнем и газом за время установления механического равновесия мы пренебрегаем, эту энергию учитывать не надо.

Запишем закон сохранения энергии для падающего груза и закон сохранения импульса системы груз–поршень при

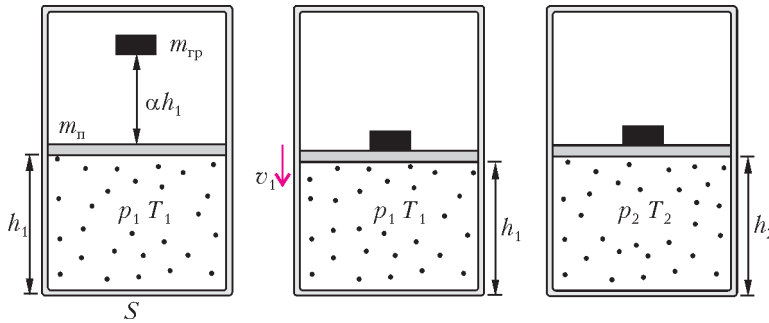


Рис. 4

неупругом ударе (рис.4):

$$m_{\text{гр}} g \alpha h_1 = \frac{m_{\text{гр}} v^2}{2}, \quad m_{\text{гр}} v = (m_{\text{гр}} + m_{\text{п}}) v_1,$$

где h_1 – начальная высота поршня, αh_1 – начальная высота груза над поршнем (нам надо найти $\alpha + 1$). Теперь запишем закон сохранения энергии для всей системы после удара:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \nu R T_1 + (m_{\text{гр}} + m_{\text{п}}) \frac{v_1^2}{2} + (m_{\text{гр}} + m_{\text{п}}) g h_1 = \\ = \frac{3}{2} \nu R T_2 + (m_{\text{гр}} + m_{\text{п}}) g h_2. \end{aligned}$$

От температур мы избавимся, записав условие равновесия и уравнение Менделеева–Клапейрона в начальном и конечном состояниях:

$$p_1 S = m_{\text{п}} g, \quad \nu R T_1 = p_1 S h_1,$$

$$p_2 S = (m_{\text{гр}} + m_{\text{п}}) g, \quad \nu R T_2 = p_2 S h_2.$$

Подставив все в закон сохранения энергии и обозначив $m_{\text{гр}} = \beta m_{\text{п}}$, в данной задаче $\beta = 1$, получим

$$\frac{3}{2} m_{\text{п}} g h_1 + \frac{\beta^2}{1 + \beta} m_{\text{п}} g \alpha h_1 + m_{\text{п}} (1 + \beta) g h_1 = \frac{5}{2} m_{\text{п}} (1 + \beta) g h_2.$$

Учитывая, что $h_2 = h_1$ и $\beta = 1$, найдем

$$\alpha = \frac{3(1 + \beta)}{2\beta} = 3,$$

т.е. начальная высота груза над дном сосуда должна быть в 4 раза больше высоты поршня.

Замечание. Высота поршня осталась прежней несмотря на увеличение веса поршня, поскольку приобретенной при ударе кинетической энергии хватило для соответствующего увеличения высоты (см. задачу 2).

Задача 7. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ при температуре $T_1 = 300$ К. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, объем газа оказался в 1,5 раза больше начального. Найдите конечную температуру газа (по шкале Кельвина). Трением и теплообменом пренебечь, над поршнем газа нет.

Решение. Запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{3}{2} \nu R T_1 = \frac{3}{2} \nu R T_2 + \frac{kx^2}{2},$$

где x – деформация пружины, равная по условию половине начальной высоты поршня ($x = h_1/2$). Из условия равновесия поршня в конечном состоянии и уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p_2 S = kx, \quad p_2 (S \cdot 3x) = \nu R T_2$$

получим соотношение

$$kx^2 = \frac{\nu R T_2}{3}.$$

Подставив в закон сохранения энергии, найдем

$$T_2 = 0,9 T_1 = 270 \text{ К}.$$

В следующих задачах конечное состояние не является состоянием механического равновесия. Рассматривается момент, когда внутренняя энергия (и температура) достигает максимального значения. Первая из этих задач включалась в последние годы в варианты ЕГЭ.

Задача 8. В вакууме закреплен горизонтальный цилиндр. В цилиндре находится $\nu = 0,1$ моль гелия, запертого поршнем. Поршень удерживается упорами и может скользить влево вдоль стенок цилиндра без трения. В поршень попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 400$ м/с, и застревает в нем. Температура гелия в момент остановки поршня в крайнем левом положении возрастает на $\Delta T = 64$ К. Какова масса поршня? Считать, что за время движения поршня газ не успевает обмениваться теплом с поршнем и цилиндром.

Решение. Из закона сохранения импульса при ударе

$$mv = (m + M) v_1$$

выразим начальную скорость поршня с пулей и подставим в закон сохранения энергии

$$\frac{(m + M) v_1^2}{2} + \frac{3}{2} \nu R T_1 = \frac{3}{2} \nu R T_2.$$

Получим соотношение

$$\frac{m^2 v^2}{2(m + M)} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T,$$

откуда найдем массу поршня:

$$M = \frac{m^2 v^2}{3 \nu R \Delta T} - m = 90 \text{ г}.$$

Задача 9. В длинном горизонтальном цилиндре между двумя одинаковыми поршнями находится $\nu = 0,1$ моль гелия. В начальный момент один поршень покоится, а другой приближается к нему со скоростью $v = 12$ м/с. На сколько градусов максимальная температура газа больше начальной? Массы поршней $m = 415$ г. Трением между поршнями и цилиндром и теплообменом пренебечь, за поршнями газа нет.

Решение. Максимальная температура соответствует моменту, когда поршни окажутся на минимальном расстоянии друг от друга и их скорости будут одинаковы. (Это особенно хорошо видно в системе отсчета центра масс, где поршни в этот момент неподвижны.) Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2} \nu R T_1 = \frac{2mv^2}{2} + \frac{3}{2} \nu R T_2.$$

Скорость поршней в момент наибольшего сближения найдем из закона сохранения импульса

$$mv = 2mu.$$

Подставив в закон сохранения энергии, получим

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mv^2}{6 \nu R} = 12 \text{ К}.$$

(Продолжение см. на с. 57)